2021（R3）年度　東京工業大学　入学試験　数学解説

180分

$\boxed{1}$（60点）

正の整数に関する条件

（$*$）10 進法で表したときに，どの位にも数字 9 が現れない

を考える。以下の問いに答えよ.

(1)　k を正の整数とするとき，10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件（$*$）を満たす正の整数の個数を a_k とする。このとき，a_k を k の式で表せ.

(2)　正の整数 n に対して，

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n \text{ が条件（}*\text{）を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件（}*\text{）を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく．このとき，すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

<解答>

(1)

10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満の整数は $p_{k-1}10^{k-1} + p_{k-2}10^{k-2} + \cdots + p_1 10 + p_0$　①

ただし p_m は $1 \leqq p_m \leqq 9$,（ $m = k-1,\ k-2,\ \cdots,\ 1,\ 0$ ）を満たす整数

（$*$）を満たす整数とは，① において p_m が下記のように 9 を含まない。

$1 \leqq p_m \leqq 8$　（ $m = k-1$ ），$0 \leqq p_m \leqq 8$,（ $m = k-2,\ k-3,\ \cdots,\ 1,\ 0$ ）

したがって，その個数 $a_k = 8 \times 9^{k-1}$　（答）

(2)

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n = \sum_{n=10^{k-1}}^{10^k-1} b_n + \sum_{n=10^{k-2}}^{10^{k-1}-1} b_n + \cdots + \sum_{n=10^1}^{10^2-1} b_n + \sum_{n=1}^{10^1-1} b_n \quad ①$$

$10^{k-(j+1)} \leqq n \leqq 10^{k-j}-1$ のとき，$b_n = \dfrac{1}{n}$ の最大値は $\dfrac{1}{10^{k-(j+1)}}$　（$j = 0, 1, \cdots, k-1$）

(1) の結果を活用して $\displaystyle\sum_{n=10^{k-(j+1)}}^{10^{k-j}-1} b_n < \sum_{n=10^{k-(j+1)}}^{10^{k-j}-1} \frac{1}{10^{k-(j+1)}} = \frac{a_{k-j}}{10^{k-(j+1)}}$ ，したがって ① より

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < \frac{a_k}{10^{k-1}} + \frac{a_{k-1}}{10^{k-2}} + \cdots + \frac{a_2}{10^1} + \frac{a_1}{10^1} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} + 8\left(\frac{9}{10}\right)^{k-2} + \cdots + 8\left(\frac{9}{10}\right) + 8$$

$$= 8 \times \frac{1-(9/10)^k}{1-9/10} = 80\left\{1-\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\} < 80$$

以上のように，すべての正の整数 k に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$ が成立する。

＜解説＞

(2)

① のような展開を着想することがポイント。等比数列の和を求めることに帰着する。

$\displaystyle\sum_{n=10^{k-(j+1)}}^{10^{k-j}-1}\frac{1}{10^{k-(j+1)}}=\frac{1}{10^{k-(j+1)}}\sum_{n=10^{k-(j+1)}}^{10^{k-j}-1}1=\frac{1}{10^{k-(j+1)}}\times a_{k-j}=\frac{a_{k-j}}{10^{k-(j+1)}}$ に注意する。

$\boxed{2}$ (60点)

xy 平面上の楕円

$$E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) a，b を実数とする．直線 $l:y=ax+b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a，b の条件を求めよ．

(2) 実数 a，b，c に対して，直線 $l:y=ax+b$ と直線 $m:y=ax+c$ がそれぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする．ただし，$b>c$ とする．直線 l と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする．また，直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S，大きい方を R とする．このとき，等式

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$$

が成り立つための a，b，c の条件を求めよ．

(3) 楕円 E 上の 4 点の組で，それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ．

＜解答＞

(1)

楕円$E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　①

直線 $l:y=ax+b$　②

①と② が異なる 2 点を共有するためには，両者を連立させた 2 次方程式 $\dfrac{x^2}{4}+(ax+b)^2=1$　③

が 2 つの実数解をもつことである。

③ を変形して $\left(a^2+\dfrac{1}{4}\right)x^2+2abx+(b^2-1)=0$　④

2 次方程式 ④ の解の判別式 $D=a^2b^2-\left(a^2+\dfrac{1}{4}\right)(b^2-1)=a^2-\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{1}{4}>0$

以上によって，① と ② が異なる 2 点を共有するための条件は $4a^2-b^2+1>0$　（答）

(2)

直線 $m:y=ax+c$　⑤ と① とを連立させてできる

2 次方程式は $\left(a^2+\dfrac{1}{4}\right)x^2+2acx+(c^2-1)=0$　⑥

直線 m が楕円 E と異なる 2 点を共有するための条件は ⑥ が 2 つの実数解をもつことだから，

(1) と同様に $4a^2-c^2+1>0$

　$\mathrm{P}(x_P,\ ax_P+b)$，$\mathrm{Q}(x_Q,\ ax_Q+b)$，$\mathrm{R}(x_R,\ ax_R+c)$，$\mathrm{S}(x_S,\ ax_S+c)$とする。

$\overrightarrow{PQ}=(x_Q-x_P,\ a(x_Q-x_P))$，$\overrightarrow{SR}=(x_R-x_S,\ a(x_R-x_S))$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}\Leftrightarrow x_Q-x_P=x_R-x_S$

x_P，x_Q は 2 次方程式 ④ の実数解，x_S，x_R は 2 次方程式 ⑥ の実数解

　したがって，

$$x_Q-x_P=\frac{4\sqrt{4a^2-b^2+1}}{4a^2+1},\quad x_R-x_S=\frac{4\sqrt{4a^2-c^2+1}}{4a^2+1}$$

　したがって，

$4a^2-b^2+1=4a^2-c^2+1$，$\therefore b^2=c^2$，$\therefore c=b$ または$-b$，しかるに $b>c$ であるから $c\neq b$

したがって，$c=-b<b$，したがって $b>0$，$c=-b$

以上によって，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ が成り立つための a，b，c の条件は

$4a^2-b^2+1>0$，$b>0$，$c=-b$　（答）

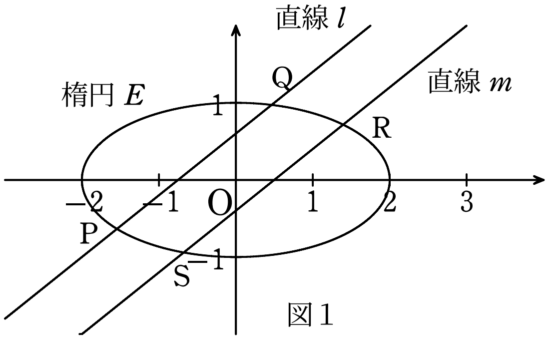

図１

(3)

「求める 4 点の組 → (2) の 4 頂点」であるから，「(2) の 4 頂点」から正方形となる 4 頂点を求める。

　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ であれば $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$ だから，4 頂点が正方形となる残りの条件である

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PS}|$ かつ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=0$ を満たす 4 頂点を求める。

$\overrightarrow{PQ}=(x_Q-x_P,\ a(x_Q-x_P))$，$\overrightarrow{PS}=(x_S-x_P,\ a(x_S-x_P))$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=(x_Q-x_P)(x_S-x_P)+a^2(x_Q-x_P)(x_S-x_P)=(x_Q-x_P)(x_S-x_P)(1+a^2)=0$

$\therefore (x_Q-x_P)(x_S-x_P)=0$，$x_S\neq x_P$ だから，$x_Q=x_P$ であり，$x_Q=x_P=u$ とおく。

また $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$ だから $x_S=x_R$

また $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PS}$ が直交するので，$y_P=y_S$，$y_Q=y_R$ であり，$y_P=y_S=v$ とおく。

4 頂点は楕円E：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上にあるので，

$\dfrac{{x_P}^2}{4}+{y_P}^2=1,\ \dfrac{{x_P}^2}{4}+{y_Q}^2=1,\ \dfrac{{x_S}^2}{4}+{y_P}^2=1,\ \dfrac{{x_S}^2}{4}+{y_Q}^2=1$

これより，$x_S=-x_P=-u,\ y_Q=-y_P=-v$

また 4 頂点が正方形をなすことから，$x_S-x_P=y_Q-y_P,\ \therefore 2x_s=2y_Q,\ \therefore x_s=y_Q,\ \therefore u=v$

以上によって，

$\mathrm{P}(x_P,y_P)=\mathrm{P}(u,u)$，$\mathrm{Q}(x_Q,y_Q)=\mathrm{Q}(u,-u)$

$\mathrm{R}(x_R,y_R)=\mathrm{R}(-u,-u)$，$\mathrm{S}(x_S,y_S)=\mathrm{S}(-u,u)$

$\dfrac{u^2}{4}+u^2=1,\ \therefore u=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ または $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，したがって，

4 頂点は $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，$\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$，$\left(\dfrac{-2\sqrt{5}}{5},\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$，$\left(\dfrac{-2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ （答）

$u=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$ の場合も同じ。

＜解説＞

(2)

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}\Leftrightarrow x_Q-x_P=x_R-x_S$ を導く。$b>c$ が与えられているので，$b>0$ が必要なことを忘れない。

(3)

図 1 のような図を描いて考える。「四角形が正方形であるものをすべて求めよ」とあっても，直感的に，x 軸，y 軸 に平行な辺をもつ正方形しか考えられない。

すると 4 点は (u,u)，$(-u,u)$，$(-u,-u)$，$(u,-u)$ となって，直ちに求まる。

おそらく，これでは正解満点とはならないであろう。(1)，(2) を踏まえて，上記の 4 点であることの論理的帰結を明らかにして求める必要がある。

$\boxed{3}$ （60点）

以下の問いに答えよ．

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ．

$$n\,{}_{2n}C_n=(n+1)\,{}_{2n}C_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}C_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ．

(2) 正の整数 n に対して，

$$a_n=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

とおく．このとき，$n\geqq 4$ ならば $a_n>n+2$ であることを示せ．

(3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ．

＜解答＞

(1)

組合せの考え方により，

$${}_{2n}C_n=\frac{2n\,!}{n\,!\,n\,!}\quad ①,\quad {}_{2n}C_{n-1}=\frac{2n\,!}{\{2n-(n-1)\}!(n-1)!}=\frac{2n\,!}{(n+1)!(n-1)!}\quad ②$$

$(n+1)!=(n+1)\,n\,!$, $(n-1)!=\dfrac{n\,!}{n}$ を ② に代入すると，

$${}_{2n}C_{n-1}=\frac{2n\,!\,n}{(n+1)\,n!\,n\,!}=\frac{n}{n+1}\times\frac{2n\,!}{n\,!\,n\,!}\text{，① より }{}_{2n}C_{n-1}=\frac{n}{n+1}\,{}_{2n}C_n$$

したがって $n\,{}_{2n}C_n=(n+1)\,{}_{2n}C_{n-1}$ ③ が成立する。

③ において，n と $(n+1)$ は互いに素であるから，${}_{2n}C_n$ は $n+1$ の倍数である。

(2)

$n\geqq 4$ ならば $a_n=\dfrac{{}_{2n}C_n}{n+1}>n+2$ ④ を数学的帰納法によって示す。

$n=4$ のとき，$a_4=\dfrac{{}_8C_4}{4+1}=\dfrac{{}_8C_3}{4}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{8!}{5!3!}=14>n+2=6$，④ は成立

$n=k>4$ のとき，④ すなわち $a_k=\dfrac{{}_{2k}C_k}{k+1}>k+2$ ⑤ が成立するとする。

(1)より，正の整数 k に対して，$a_k=\dfrac{{}_{2k}C_k}{k+1}=\dfrac{{}_{2k}C_{k-1}}{k}$ ⑥

$n=k+1$ のとき，⑥ を利用して

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{{}_{2(k+1)}C_{k+1}}{(k+1)+1}=\frac{{}_{2(k+1)}C_k}{k+1}=\frac{1}{k+1}\times\frac{(2k+2)!}{(k+2)!\,k\,!}\\&=\frac{1}{k+1}\times\frac{(2k+2)(2k+1)\ldots(k+3)}{k\,!}\\&=\frac{1}{k+1}\times\frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+2)(k+1)}\times\frac{2k(2k-1)\ldots(k+3)(k+2)(k+1)}{k\,!}\\&=\frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+2)(k+1)}\times\frac{{}_{2k}C_k}{k+1}=\frac{2(2k+1)}{k+2}a_k\quad ⑦\end{aligned}$$

⑤より，$a_{k+1}>\dfrac{2\,(2k+1)}{k+2}\times(k+2)=4k+2>(k+1)+2$

以上のように $n=4$ において ④ は成立し，$n=k>4$ で ④ が成立すれば，$n=k+1$でも ④ は成立するので，数学的帰納法により $n\geqq 4$ において ④ が成立する。

(3)

(1)，(2)より a_n は整数である。

⑦より，$a_{n+1}=\dfrac{2(2n+1)}{n+2}\,a_n=\left(4-\dfrac{6}{n+2}\right)a_n$

$n\geqq 4$ のとき，a_n が素数とする。

a_{n+1} が整数（素数を含む）となるためには，④ により$a_n>n+2$ であるから，$\dfrac{6}{n+2}$が整数

したがって，$n+2=2$，3 または6，したがって $n=4$

したがって，$n\leqq 4$ の場合の a_n が素数か否かを調べればよい。

$a_1=\dfrac{{}_2C_1}{1+1}=1$，$a_2=\dfrac{2(4-1)}{2+1}a_1=2$，$a_3=\dfrac{2(6-1)}{3+1}a_2=5$，$a_4=\dfrac{2(8-1)}{4+1}a_3=14$

以上によって，a_n が素数となる正の整数 n は 2 および 3 （答）

＜解説＞

(1)

組合せの表式とその意味をよく理解していること。n と $(n+1)$ は互いに素であることも理解していること。

(2)

数学的帰納法によって証明する，という解答方針を速やかに着想したい。直接 ① を証明しようとすると，かなり煩瑣になることが (1) の取り扱いにおいて感じられるであろう。

(3)

題意を満たす n をどのように限定するか，その方法を案出する必要がある。(2) ⑦より得られる，$a_{n+1}=\dfrac{2(2n+1)}{n+2}a_n$ の式を見つめる。すると $n \geqq 4$ で $a_n > n+2$ が素数のとき，$\dfrac{2(2n+1)}{n+2}$ が整数でない限り a_n は整数とならないことに気づく。

別解を考えてみる。$n \geqq 4$ のとき，a_n が素数 p とする。

$a_n = p = \dfrac{{}_{2n}C_n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{2n(2n-1)\ldots(n+2)(n+1)}{n\,!} > n+2$

$pn! = pn\,(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = 2n\,(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+3)\cdot(n+2)$ ①

$p \geqq 2n$ とすれば，p が素数であることと矛盾，$\therefore\ n+3 \leqq p < 2n$

① は，$p\,(n-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3 = (2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+3)(n+2)$ ②

ここで $k = 2, 3, 4, \ldots, n-1$ とすれば

② は，$p\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3 = (2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+k)\cdot\ldots\cdot(n+3)(n+2)$ ③

③ の左辺，右辺とも $(n-2)$ 個の整数の積で，p は $p = (n+k)$，$(k = 3, 4, \ldots, n-1)$ なる素数 p を除く左辺，右辺の大きい順に各項を比較すると，いずれも右辺の項の方が大きい。

したがって，③ の等式は成立しない。$n \geqq 4$ のとき，a_n が素数 p としたことが誤り。

したがって，$n = 1, 2, 3$ について，a_n が素数か否かを調べればよい。

$\boxed{4}$ (60点)

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする．S 上を動く点 A，B，C，D に対して

$$F = 2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2) - 3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$$

とおく．以下の問いに答よ．

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$$

と書けることを示し，定数 k を求めよ．

(2) 点 A，B，C，D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ．

(3) 点 C の座標が $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4}, 0\right)$，点 D の座標が $(1, 0, 0)$ であるとき，$F = M$ となる S 上の点 A，B の組をすべて求めよ．

＜解答＞

(1)

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d}) = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2-3\vec{d}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})-3\vec{d}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$=3+2(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})-3\vec{d}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

一方，$\mathrm{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(\vec{b}-\vec{a})^2=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}=2-2\vec{b}\cdot\vec{a}$

同様に，$\mathrm{BC}^2=(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=2-2\vec{c}\cdot\vec{b}$，$\mathrm{CA}^2=(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=2-2\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\mathrm{AD}^2=(\vec{d}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{a})=2-2\vec{d}\cdot\vec{a}$，$\mathrm{BD}^2=(\vec{d}-\vec{b})\cdot(\vec{d}-\vec{b})=2-2\vec{d}\cdot\vec{b}$，

$\mathrm{CD}^2=(\vec{d}-\vec{c})\cdot(\vec{d}-\vec{c})=2-2\vec{d}\cdot\vec{c}$

したがって，

$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$

$=4\{3-(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})-6\{3-(\vec{d}\cdot\vec{a}+\vec{d}\cdot\vec{b}+\vec{d}\cdot\vec{c})\}$

$=-6-4(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})+6\vec{d}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=-2\{3+2(\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})-3\vec{d}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}$

$=-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$

したがって，

$F=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$ と書ける。$k=-2$　（答）

(2)

$F=-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})=2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(3\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$

$=18\times\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\left(\vec{d}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)=18\vec{g}(\vec{d}-\vec{g})$,

ただし G を△ABC の重心とし，$\overrightarrow{OG}=\vec{g}$ とする。$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$,　$0<|\vec{g}|<1$である。

$\vec{g}$ と $\vec{d}$ のなす角度を θ とすれば，$F=18(|\vec{g}||\vec{d}|\cos\theta-|\vec{g}|^2)=18(|\vec{g}|\cos\theta-|\vec{g}|^2)$，ただし$|\vec{d}|=1$

$\cos\theta\leqq1$であり，$\vec{g}$ と $\vec{d}$ が同一方向なら $\theta=0$ で $\cos\theta=1$ となるから，

$F\leqq 18(|\vec{g}|-|\vec{g}|^2)=18\left\{-\left(|\vec{g}|-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right\}\leqq\dfrac{9}{2}$

したがって，F の最大値 $M=\dfrac{9}{2}$　（答）

(3)

(2)より $F=M$ となるとき，$\vec{d}=(1,0,0)$，$|\vec{g}|=\dfrac{1}{2}$だから，$\vec{g}=\dfrac{1}{2}(1,0,0)$

$\vec{g}=\dfrac{1}{2}(1,0,0)=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{15}}{4},0\right)$

$\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$とすれば，

$a_x+b_x-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$　①，$a_y+b_y+\dfrac{\sqrt{15}}{4}=0$　②，$a_z+b_z=0$　③

また，$a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2=b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2=1$　④ だから，

$(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2$

$= 2(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) + (a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2 + b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2)$

$= 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2 = \left(\dfrac{7}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = 4$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = 1$，したがって ④ より $\vec{a} = \vec{b}$

①より $a_x = b_x = \dfrac{7}{8}$，②より $a_y = b_y = -\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，③より $a_z = b_z = 0$

以上によって，求める点は $\mathrm{A}\left(\dfrac{7}{8}, -\dfrac{\sqrt{15}}{8}, 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{8}, -\dfrac{\sqrt{15}}{8}, 0\right)$　（答）

＜解説＞

(1)

F の表式をベクトル表式に変換する。AB，BC，･･･というような図形の記号表式は煩瑣で図形的意味が浮かび難い。ベクトル表式にすれば，$k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\cdot(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$との関連性が見えてくる。

(2)

$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$の表式から，重心の位置ベクトルの表式に気づきたい。数学 B の教科書には平面図形の場合について同様の表式が記載されているようだ。立体図形では記載がないようだ（すべての教科書を調べたわけではない）。

図１の三角錐 OABC において，G は △ABC の重心とする。すると，

$\vec{g} = \vec{a} + \overrightarrow{g_A} = \vec{b} + \overrightarrow{g_B} = \vec{c} + \overrightarrow{g_C}$，したがって $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} + \dfrac{\overrightarrow{g_A}+\overrightarrow{g_B}+\overrightarrow{g_C}}{3}$

CG の延長線と AB の交点を M とすれば，M は AB の中点

$\overrightarrow{g_A} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG}$，$\overrightarrow{g_B} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG}$，$\therefore \overrightarrow{g_A} + \overrightarrow{g_B} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG}$

$\mathrm{GC} = 2\mathrm{MG}$，$\therefore \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{g_C}$，したがって $\overrightarrow{g_A} + \overrightarrow{g_B} = -\overrightarrow{g_C}$，

$\therefore \overrightarrow{g_A} + \overrightarrow{g_B} + \overrightarrow{g_C} = 0$，したがって $\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

上記の解答の中ではこのことを記載せず，自明として扱ったが問題ないであろう。

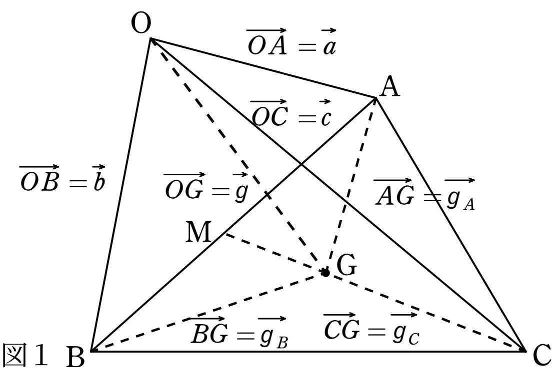

図１

(3)

(2)より $F = M$ となるとき，$\vec{g}$ と $\vec{d}$ が同一方向であることから，$\vec{g} = \dfrac{1}{2}(1, 0, 0)$ が導かれる。

$\boxed{5}$ (60点)

xy 平面上の円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2$ （$a>0$）を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(2) 円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．

(3) a が (2) の範囲にあるとする．xy 平面内において連立不等式

$$|x| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4},\ y \geqq x^2-x^4,\ x^2+(y-a)^2 \geqq a^2$$

で表される領域 D を，y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

＜解答＞

(1)

円 C の中心 $(0,a)$ と放物線 $y=x^2$ 上の点 (x,x^2) との距離 $\sqrt{x^2+(x^2-a)^2}$

円 C が $y \geqq x^2$ で表される領域に含まれる $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(x^2-a)^2} \geqq a$ （$a>0$）

$\Leftrightarrow x^2+(x^2-a)^2 \geqq a^2 \Leftrightarrow x^4+(1-2a)x^2 \geqq 0$，$\therefore x^2+(1-2a) \geqq 0$

$\Leftrightarrow 0<a \leqq \dfrac{1}{2}$ （答）

(2)

円 C の中心 $(0,a)$ と曲線 $y=x^2-x^4$ 上の点 (x,x^2-x^4) との距離 $\sqrt{x^2+(x^2-x^4-a)^2}$

円 C が $y \geqq x^2-x^4$ で表される領域に含まれる $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(x^2-x^4-a)^2} \geqq a$ （$a>0$）

$\Leftrightarrow x^2+(x^2-x^4-a)^2 \geqq a^2$

$\Leftrightarrow 1+x^2(1-x^2)^2-2a(1-x^2) \geqq 0$

$\therefore x^6-2x^4+(1+2a)x^2+(1-2a)=t^3-2t^2+(1+2a)t+(1-2a) \geqq 0$ ①，$t=x^2$

① を変形すると，$t\{(t-1)^2+2a\}+(1-2a) \geqq 0$，$t\{(t-1)^2+2a\} \geqq 0$ だから，

x の値に関わらず ① が成立するためには $1-2a \geqq 0$，すなわち必要十分条件は $0<a \leqq \dfrac{1}{2}$ （答）

(3)

図1に領域 D を打点部で示す。円Cが $0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4}$ に含まれる場合は図1(a)，$y=\dfrac{1}{4}$ を超える場合は図1(b) である。

i）$0<2a \leqq \dfrac{1}{4}$，すなわち $0<a \leqq \dfrac{1}{8}$ のとき

領域 D を y 軸の周りに1回転させてできる立体を $y=s$ の平面で切った断面を図2に示す。

$0 \leqq s \leqq 2a$ の場合は図2(a)，$2a \leqq s \leqq \dfrac{1}{4}$ の場合は図2(b)である。立体の体積 V は，

$$V=\int_0^{2a}\pi({r_2}^2-{r_1}^2)ds+\int_{2a}^{\frac{1}{4}}\pi {r_2}^2 ds=\int_0^{\frac{1}{4}}\pi {r_2}^2 ds-\int_0^{2a}\pi {r_1}^2 ds$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-s}\right)ds-\pi\int_0^{2a}(2as-s^2)ds$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}s+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-s\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}}-\left[as^2-\frac{s^3}{3}\right]_0^{2a}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}-4a^3+\frac{8a^3}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{8}-4a^3\right)\quad \text{(答)}$$

ii) $\frac{1}{4}<2a$，すなわち $\frac{1}{8}<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$y=s$ の平面で切った断面を図２(c) に示す。

$$V=\int_0^{\frac{1}{4}}\pi({r_2}^2-{r_1}^2)ds=\pi\int_0^{\frac{1}{4}}\left\{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-s}\right)-(2as-s^2)\right\}ds$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}s+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}-s\right)^{\frac{3}{2}}-as^2+\frac{s^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{4}}=\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{a}{16}+\frac{1}{192}-\frac{1}{12}\right)=\frac{\pi}{16}\left(\frac{3}{4}-a\right)\quad \text{(答)}$$

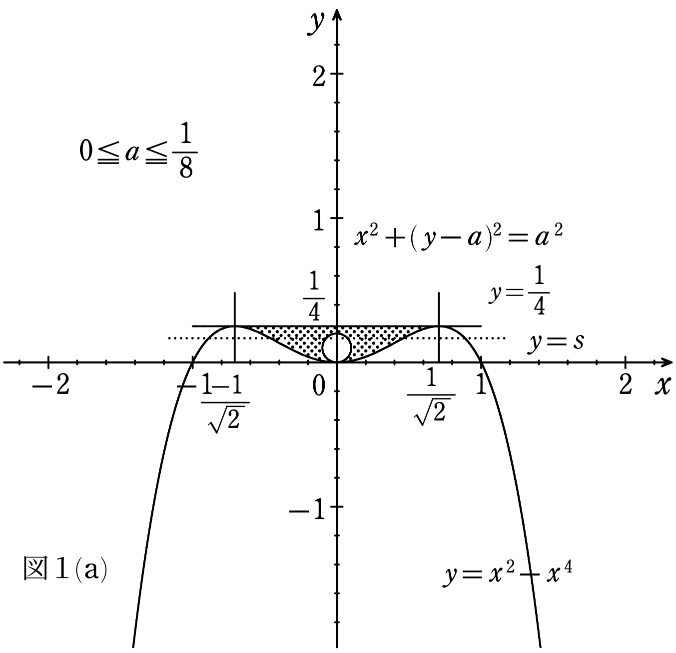

図１(a)

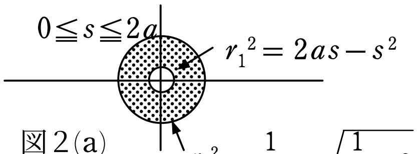

図２(a)

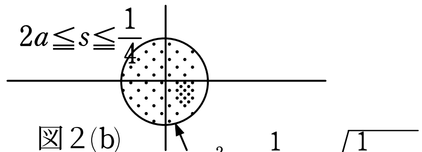

図２(b)

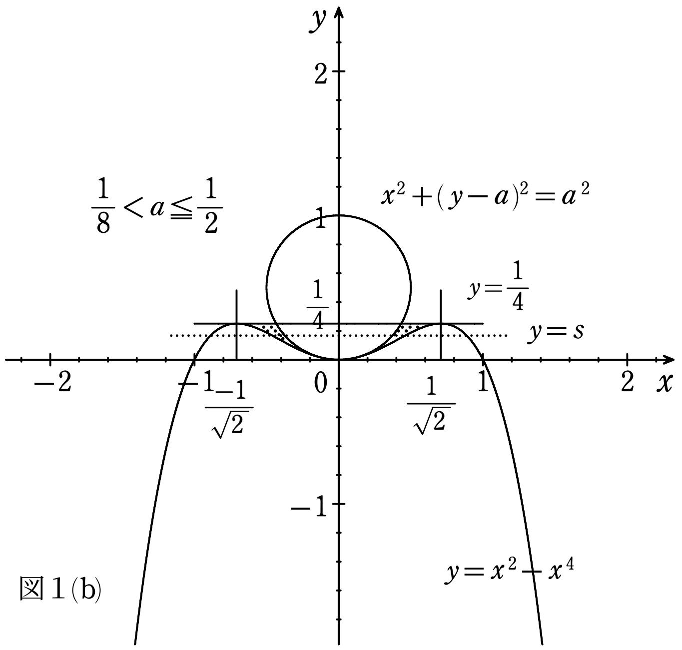

図１(b)

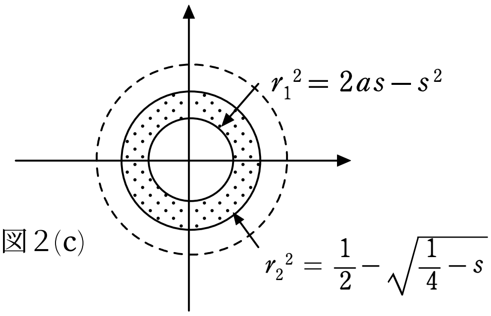

図２(c)

＜解説＞

⑴

円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2$ （ $a>0$) は，その中心が $(0\,,\,a)$ であり，$y=x^2$ と $(0,0)$ で接しているので，

「円 C が $y\geqq x^2$ で表される領域に含まれる」$\Leftrightarrow$ 「$(0\,,\,a)$と $y=x^2$ の点との距離が半径 a より大」に着目する。略図を描いてみればわかる。

⑵

⑴と同様の考え方である。

⑶

ある軸の周りに回転してできる立体の体積を求める場合，まずは軸に垂直な平面で切った立体の断面の面積を求める。断面は円形をなすはずである。（ 微小体積 ）＝（ 断面の面積 ）×（軸方向の微小厚さ）を軸方向に加算していけば，立体の体積が求まる。

ここでは，回転軸は y 軸だから，扱いは容易である。

<総評>

着眼，着想が必要な問題，場合分けや計算を的確に粘り強く行う必要のある問題など，骨のおれる問題が揃っている。

$\boxed{1}$

整数の問題。(1)は難しく考えない。各桁でとり得る数字の場合の数を考えればよい。当然，最上位の桁では数字 0 をとりえない。(2) では (1) の結果を活用することがポイント。難易度はＢ。

$\boxed{2}$

図形を関数によって扱う問題。2次方程式の実数解の条件を活用する。解答へ至る論理的展開は難しくないであろう。難易度はＢ。

$\boxed{3}$

整数の問題。解答に至る思考力と着想が必要な問題で，難易度はＡ－。

$\boxed{4}$

立体図形をベクトル表式によって扱う問題。ベクトルの内積演算に習熟している必要がある。重心の位置のベクトル表示を理解していることも必要。難易度はＡ－。

$\boxed{5}$

平面図形を回転してできる立体図形の求積の問題。中心軸に垂直な断面の面積を軸方向に加算する積分を行う。積分そのものは難しくない。図形の状況の場合分けを的確に行う。難易度はＡ－。

240531