2021 (R3) 年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）（配点120点）150分

第　1　問

a, b を実数とする。座標平面上の放物線

$$C:y=x^2+ax+b$$

は放物線 $y=-x^2$ と２つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1) 点 $(a\,,b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

<解答>

(1)

$y=x^2+ax+b$　①

$y=-x^2$　②

①，② の２つの共有点の x 座標は両者を連立させてできる２次方程式

$f(x)=2x^2+ax+b=0$ の２つの解。

$$\left.\begin{array}{l}\text{一方の共有点 } -1<x<0\\ \text{他方の共有点 } 0<x<1\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}f(0)=b<0 & ③\\ f(1)=2+a+b>0 & ④\\ f(-1)=2-a+b>0 & ⑤\end{array}\right.$$

点 $(a\,,b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示すると，図１の打点部になる。境界は含まない。

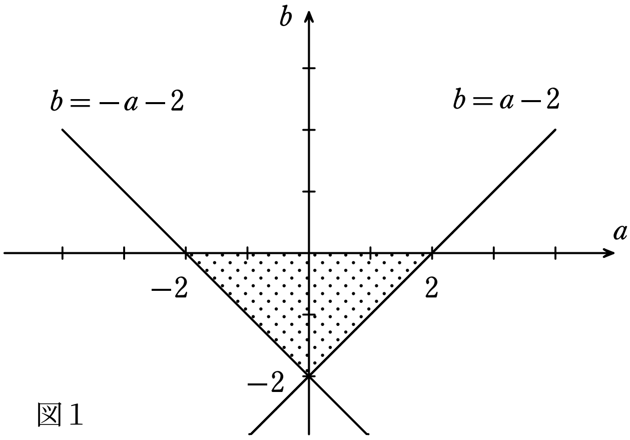

図１

(2)

放物線 $C:y=x^2+ax+b$ 上の点 $(x\,,y)$ は $(a\,,b)$ の関係を定める。

すなわち，$b=-xa+y-x^2$　⑥

⑥ によって定まる $(a\,,b)$ が図１の領域の点であれば，そのような $(a\,,b)$ を与える $(x\,,y)$ が放物線 C の通り得る範囲ということになる。

⑥ は ab 平面における直線を示すから，直線 ⑥ が図１の領域を通過するような (x, y) が求める範囲ということになる。

直線 ⑥ の傾き $-x$ の値によって場合分けして考える。

(ⅰ) $-x \geqq 0$，すなわち $x \leqq 0$ のとき

a) $-x \geqq 1$，すなわち $x \leqq -1$ のとき

直線 ⑥ が図１の領域を通るためには，a 軸との交点が -2 と 2 の間にある。

すなわち $b=0$ のとき，$a=\dfrac{y}{x}-x$，$\therefore\ -2<\dfrac{y}{x}-x<2$，$\therefore\ x^2+2x<y<x^2-2x$

b) $0 \leqq -x<1$，すなわち $-1<x \leqq 0$ のとき

直線 ⑥ が図１の領域を通るためには，直線 $b=-a-2$ と $-2<a<0$ において交わる。

$-2<\dfrac{y-x^2+2}{x-1}<0$，$\therefore\ -2x+2>y-x^2+2>0$，$\therefore\ x^2-2<y<x^2-2x$

(ⅱ) $-x<0$，すなわち $x>0$ のとき

a) $-x \leqq -1$，すなわち $x \geqq 1$ のとき

直線 ⑥ が図１の領域を通るためには，a 軸との交点が -2 と 2 の間にある。

すなわち $b=0$ のとき，$a=\dfrac{y}{x}-x$，$\therefore\ -2<\dfrac{y}{x}-x<2$，$\therefore\ x^2-2x<y<x^2+2x$

b) $-1<-x<0$，すなわち $0<x<1$ のとき

直線 ⑥ が図１の領域を通るためには，直線 $b=a-2$ と $0<a<2$ において交わる。

$0<\dfrac{y-x^2+2}{x+1}<2$，$\therefore\ 0<y-x^2+2<2x+2$，$\therefore\ x^2-2<y<x^2+2x$

以上をまとめると，図２の打点部が放物線 C の通りうる範囲である。境界は含まない。

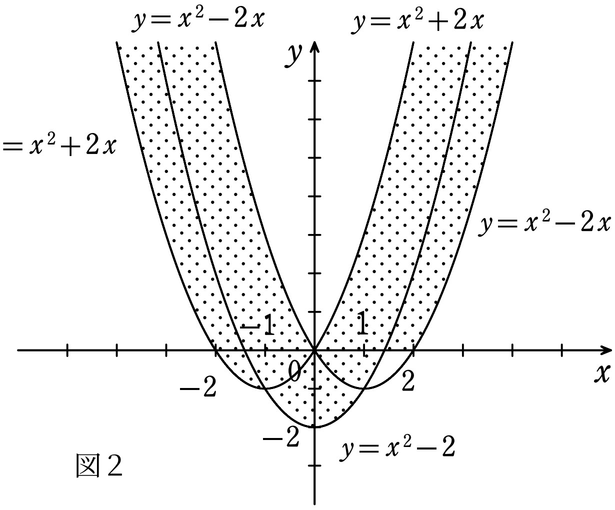

図２

<解説>

(1)

2次方程式の解について，よくある問題だから，スムーズに解きたい。

(2)

図１に示す(a, b)の領域内で a，b が動いたとき，放物線 $y=x^2+ax+b$ はどう動くかを考えても，解答できそうにない。何か着想が必要だ。ここは，この放物線の式がa，bの１次式であることに

気づきたいところだ。

(x, y) が決まると，a，b の関係が決まる。その関係は直線の式 $b = -xa + y - x^2$　⑥ によって表される。その直線が図１の (a, b) の領域を通れば，点 (x, y) は図１の領域内の (a, b) を与えることになる。したがって，直線が図１の領域を通るような (x, y) が放物線 C が通る範囲ということになる。

直線 ⑥ が図１の領域を通る条件を求めるには，その傾き $-x$ について場合分けすれば，考えやすい。

第　2　問

複素数 a，b，c に対して整式 $f(z) = az^2 + bz + c$ を考える。i を虚数単位とする。

(1)

α，β，γ を複素数とする。$f(0) = \alpha$，$f(1) = \beta$，$f(i) = \gamma$ が成り立つとき，a，b，c をそれぞれ α，β，γ で表せ。

(2)

$f(0)$，$f(1)$，$f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

<解答>

(1)

$f(0) = c = \alpha$　（答）

$f(1) = a + b + c = a + b + \alpha = \beta$，$\therefore a + b = \beta - \alpha$　①

$f(i) = -a + bi + c = -a + bi + \alpha = \gamma$，$\therefore -a + bi = \gamma - \alpha$　②

①，② から，$b = \dfrac{1}{2}(\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i)$，$a = \dfrac{1}{2}\{(\beta - \gamma) + (\beta + \gamma - 2\alpha)\,i\}$　（答）

(2)

$$\begin{aligned} f(2) &= 4a + 2b + c = 2\{(\beta-\gamma) + (\beta + \gamma - 2\alpha)\,i\} + (\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i) + \alpha \\ &= 2(\beta - \gamma) + (\beta + \gamma - 2\alpha) + \alpha + \{2(\beta + \gamma - 2\alpha) - (\beta + \gamma - 2\alpha)\}i \\ &= (3\beta - \gamma - \alpha) + (\beta + \gamma - 2\alpha)i = x + yi \end{aligned}$$

したがって，$x = -\alpha + 3\beta - \gamma$　③，$y = -2\alpha + \beta + \gamma$　④

③，④ から α を消去して，$2x - y = 5\beta - 3\gamma$，

$1 \leqq \alpha$，β，$\gamma \leqq 2$ を考慮すると $-1 \leqq 5\beta - 3\gamma \leqq 7$，

$\therefore\ -1 \leqq 2x - y \leqq 7$，$\therefore 2x - 7 \leqq y \leqq 2x + 1$　⑤

③，④ から β を消去して $x - 3y = 5\alpha - 4\gamma$，

同様に $-3 \leqq x - 3y \leqq 6$，$\therefore \dfrac{x}{3} - 2 \leqq y \leqq \dfrac{x}{3} + 1$　⑥

③，④ から γ を消去して $x + y = -3\alpha + 4\beta$，

同様に $-2 \leqq x + y \leqq 5$，$\therefore\ -x - 2 \leqq y \leqq -x + 5$　⑦

⑤，⑥，⑦ をグラフ表示すると図１のようになる。

黒太線で囲まれた領域が $f(2)$ のとり得る複素数平面上の領域で，境界を含む。

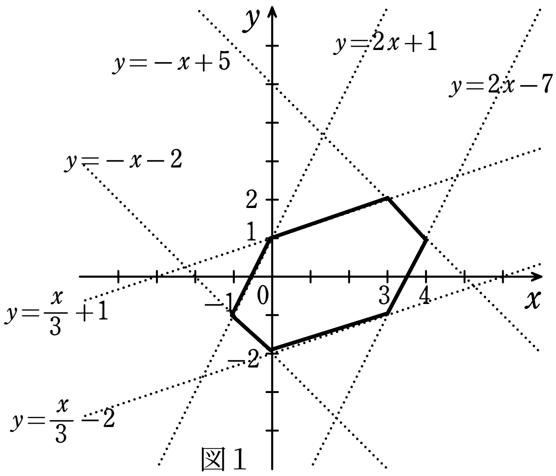

図１

＜解説＞

(2)の $f(2)=(3\beta-\gamma-\alpha)+(\beta+\gamma-2\alpha)i=x+yi$ の導出まではスムーズに進めたい。③，④から，複素数 $f(2)$ の実数部 x，虚数部y が α，β，γ の一次結合であることがわかる。$1 \leqq \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqq 2$ という制約があるのだから，その制約を満たす (x, y) でなければならない。

したがって，$\alpha(x, y)$，$\beta(x, y)$，$\gamma(x, y)$ を求め，$1 \leqq \alpha(x, y),\ \beta(x, y),\ \gamma(x, y) \leqq 2$ を満たす (x, y) の領域を求める問題に帰着する。ところが，③，④の２つの式 のみからでは，α，β，γ をx，y によって表すことはできない。何か工夫が必要になる。ここでは α，β，γ が独立な変数だから，３つの変数の組み合せから (x, y) の領域を決めることは容易ではない。

そこで，③，④から $g_1(x, y, \beta, \gamma)=0$，$g_2(x, y, \gamma, \alpha)=0$，$g_2(x, y, \alpha, \beta)=0$ などの表式を求め，制約条件 $1 \leqq \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqq 2$ を入れて考察することにする。2 変数の組み合せであれば，その範囲を求めることは容易である。例えば，$1 \leqq \beta,\ \gamma \leqq 2$ を考慮すると $(5\times1-3\times2) \leqq 5\beta-3\gamma \leqq (5\times2-3\times1)$ $\to -1 \leqq 5\beta-3\gamma \leqq 7$ と容易に導ける。

別解を考えてみる。

複素数 $f(2)=z=x+yi=(x, y)=\alpha z_1+\beta z_2+\gamma z_3$

$=\alpha(-1, -2)+\beta(3, 1)+\gamma(-1, 1)$

$=(-\alpha+3\beta-\gamma,\ -2\alpha+\beta+\gamma)$，$1 \leqq \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqq 2$

α=1 or 2，β = 1 or 2，γ = 1 or 2 の組合せによって $(-\alpha+3\beta-\gamma,\ -2\alpha+\beta+\gamma)$は 8 個の点を表す。8個の $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ に対応する (x, y) は，

$(1, 1, 1) \to (1, 0)$，$(2, 1, 1) \to (0, -2)$，$(1, 2, 1) \to (4, 1)$，$(1, 1, 2) \to (0, 1)$，

$(2, 2, 1) \to (3, -1)$，$(1, 2, 2) \to (3, 2)$，$(2, 1, 2) \to (-1, -1)$，$(2, 2, 2) \to (2, 0)$

求める領域はこの 8 個の点が囲む領域となる。

ベクトルの考え方を用いる解法もある。求める領域 (x, y) は，
ベクトル成分 $(x, y)=\alpha(-1, -2)+\beta(3, 1)+\gamma(-1, 1)$ において，$1 \leqq \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqq 2$ の範囲で，α，β，γ を変化させたときの３つのベクトル成分の和と考えることができる。

まず，$(x_1, y_1) = \alpha(-1, -2) + \gamma(-1, 1)$ を考える。$1 \leqq \alpha,\ \gamma \leqq 2$ だから，
(x_1, y_1) は，$\alpha = 1, 2$，$\gamma = 1, 2$ によって決まる下記の 4 点を頂点とする四角形に含まれる。

$1\times(-1, -2) + 1\times(-1, 1) = (-2, -1)$

$1\times(-1, -2) + 2\times(-1, 1) = (-3, 0)$

$2\times(-1, -2) + 1\times(-1, 1) = (-3, -3)$

$2\times(-1, -2) + 2\times(-1, 1) = (-4, -2)$

次に，$(x, y) = (x_1, y_1) + \beta(3, 1)$，$1 \leqq \beta \leqq 2$ だから，
上記の 4 点は $\beta = 1$，2 によって，下記の 8 点に移る。

$(-2, -1) + 1\times(3, 1) = (1, 0)$　　$(-2, -1) + 2(3, 1) = (4, 1)$

$(-3, 0) + 1\times(3, 1) = (0, 1)$　　$(-3, -0) + 2(3, 1) = (3, 2)$

$(-3, -3) + 1\times(3, 1) = (0, -2)$　　$(-3, -3) + 2(3, 1) = (3, -1)$

$(-4, -2) + 1\times(3, 1) = (-1, -1)$　　$(-4, -2) + 2(3, 1) = (2, 0)$

したがって，求める領域 (x, y) は図 2 の太線に囲まれた領域である。

図 2 において，破線の四角形で囲まれた領域が (x_1, y_1) の領域である。その四角形の頂点のベクトル成分にベクトル成分 $\beta(3, 1)$ が加わって，→ で示すような移動をして，太線で示す領域 (x, y) となる。

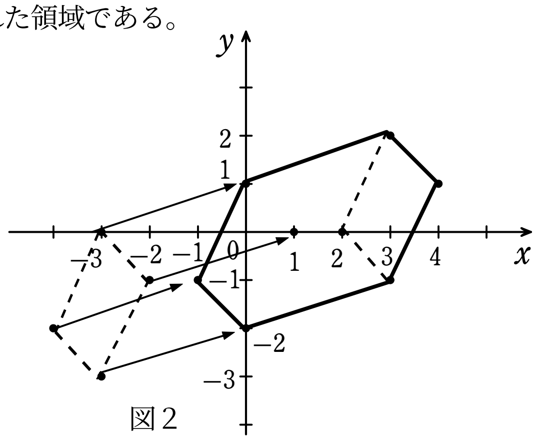

図 2

第　3　問

関数 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

に対して，$y = f(x)$ のグラフを C とする。点 A $(1, f(1))$ における C の接線を $l : y = g(x)$ とする。

(1) C と l の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ。

(2) (1)で求めた共有点の x 座標を α とする。定積分 $\displaystyle\int_\alpha^1 \{f(x) - g(x)\}^2 dx$ を計算せよ。

<解答>

(1)

$$f'(x) = \frac{3 - x^2}{(x^2+3)^2},\ f'(1) = \frac{1}{8},\ f(1) = \frac{1}{4}$$

点 A $(1, f(1))$ における C の接線は $y - f(1) = y - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}(x-1)$，$\therefore\ l : y = g(x) = \dfrac{1}{8}(x+1)$

$f(x) = g(x)$ とおいて $\dfrac{x}{x^2+3} = \dfrac{1}{8}(x+1)$，$\therefore\ x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3) = 0$

したがって，C と l の共有点は点 A 以外にただ一つあり，その点の x 座標は -3　（答）

(2)

$$\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx=\int_{-3}^{1}\{f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)\}dx$$

$$\int f^2(x)dx=\int\frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx$$

$x=\sqrt{3}\tan\theta$とおく。$dx=\sqrt{3}(1+\tan^2\theta)d\theta$，$x=1\to\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$x=-3\to\theta=-\dfrac{\pi}{3}$

$$\int\frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)}{(\tan^2\theta+1)^2}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+Const.$$

したがって，

$$\int_{-3}^{1}\frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{6}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}$$

$$2f(x)g(x)=\frac{1}{4}\frac{x(x+1)}{x^2+3}$$

$$\int\frac{x(x+1)}{x^2+3}dx=\int\left(1+\frac{x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}\right)dx=x+\int\frac{x}{x^2+3}dx-\int\frac{3}{x^2+3}dx$$

$$\int\frac{x}{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\log|x^2+3|+Const.$$

$x=\sqrt{3}\tan\theta$として，$\displaystyle\int\frac{3}{x^2+3}dx=3\int\frac{1}{x^2+3}dx=\sqrt{3}\int d\theta=\theta+Const.$

したがって，

$$\int_{-3}^{1}2f(x)g(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-3}^{1}\frac{x(x+1)}{x^2+3}dx=\frac{1}{4}\left[x+\frac{1}{2}\log|x^2+3|\right]_{-3}^{1}-\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\log 2+3-\log 2-\frac{1}{2}\log 3\right)-\frac{\sqrt{3}\pi}{8}=1-\frac{\log 3}{8}-\frac{\sqrt{3}\pi}{8}$$

$$\int_{-3}^{1}g^2(x)dx=\frac{1}{64}\int_{-3}^{1}(x+1)^2dx=\frac{1}{64}\frac{1}{3}\left[(x+1)^3\right]_{-3}^{1}=\frac{1}{12}$$

以上によって，

$$\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx=\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\frac{1}{4}-1+\frac{\log 3}{8}+\frac{\sqrt{3}\pi}{8}+\frac{1}{12}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{\log 3}{8}-\frac{7}{6}$$ （答）

<解説>

(1)

曲線とその接線とは少なくも接点を共有する。したがって，曲線の方程式と接線の方程式を連立させてできる方程式は接点の座標を重解としてもつ。

(2)

分子分母がxの多項式となる被積分関数の定積分の計算が必要となる。数学IIIの教科書の定積分の章節には，三角関数を利用した置換積分法の例が記載されているので，その活用に速やかに気づきたい。

$x=a\sin\theta$，$x=a\tan\theta$などの変数変換である。このようにすると，被積分関数が三角関数の単純な表式となり，原始関数を求めることが容易になる場合がある。

第　4　問

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 K，L と正の整数 A，B が $KA=LB$ を満たしているとする。K を4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りはB を 4 で 割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 a，b が$a>b$ を満たしているとする。このとき，$A={}_{4a+1}C_{4b+1}$，$B={}_{a}C_{b}$ に対して $KA=LB$ となるような正の奇数 K，Lが存在することを示せ。

(3) a，b は (2) の通りとし，さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは${}_{a}C_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

＜解答＞

(1)

$KA=LB$ だから $KA\equiv LB\pmod 4$

K，Lが正の奇数で，K を4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば

$K\equiv L\pmod 4\fallingdotseq 0\,,2$ だから，$LKA\equiv KLB\pmod 4$，$\therefore LKA\equiv LKB\pmod 4$

したがって $KA\equiv KB\pmod 4$，$\therefore A\equiv B\pmod 4$

よって，題意は示された。

(2)

$${}_{4a+1}C_{4b+1}=\frac{(4a+1)(4a)(4a-1)(4a-2)\cdots(4a-4b+1)}{(4b+1)(4b)(4b-1)(4b-2)\times\cdots\times2\times1}$$

において分子，分母が 4 の倍数となる項を分離しまとめて表現すると，

$${}_{4a+1}C_{4b+1}=\frac{4a}{4b}\times\frac{4(a-1)}{4(b-1)}\times\frac{4(a-2)}{4(b-2)}\times\cdots\times\frac{4(a-b+2)}{4\times2}\times\frac{4(a-b+1)}{4\times1}$$

$$\times\frac{4a+1}{4b+1}\times\frac{4a-1}{4b-1}\times\frac{4a-2}{4b-2}\times\frac{4a-3}{4b-3}\times\frac{4a-5}{4b-5}\times\frac{4a-6}{4b-6}\times\cdots\times\frac{4a-4b+2}{2}\times\frac{4a-4b+1}{1}$$

$$={}_{a}C_{b}\times\frac{4a+1}{4b+1}\times\frac{4a-1}{4b-1}\times\frac{2a-1}{2b-1}\times\frac{4a-3}{4b-3}\times\frac{4a-5}{4b-5}\times\frac{2a-3}{2b-3}\times\cdots\times\frac{2a-2b+1}{1}\times\frac{4a-4b+1}{1}$$

ここで，上式の分子，分母をそれぞれまとめて，

$L=(4a+1)(4a-1)(2a-1)(4a-3)(4a-5)(2a-3)\times\cdots\times(4a-4b+3)(2a-2b+1)(4a-4b+1)$

$K=(4b+1)(4b-1)(2b-1)(4b-3)(4b-5)(2b-3)\times\cdots\times3\times1\times1$

とおけば，K，L は正の奇数であり，${}_{4a+1}C_{4b+1}={}_{a}C_{b}\times\dfrac{L}{K}$

すなわち，$KA=LB$となり，正の奇数 K，L が存在する。

(3)

任意の整数 m に対して，$4a-m\equiv 4b-m \pmod 4$

また，$a-b$ が 2 で割り切れると，

$a-b\equiv 0 \pmod 2$，$\therefore 2(a-b)\equiv 0 \pmod 4$，$\therefore 2a\equiv 2b \pmod 4$

したがって，任意の整数 n に対して，$2a-n\equiv 2b-n \pmod 4$

(2) のL，K の表式において，$(4a-m)$ と $(4b-m)$，$(2a-n)$ と $(2b-n)$をそれぞれ対応付けることができるから，$L\equiv K \pmod 4$

したがって (1) によって，$A\equiv B \pmod 4$

したがって，${}_{4a+1}C_{4b+1}$を 4 で割った余りは ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しい。

(4)

$2021=4\times 505+1$，$37=4\times 9+1$，(3)より ${}_{2021}C_{37}\equiv {}_{505}C_9 \pmod 4$

$505=4\times 126+1$，$9=4\times 2+1$，(3)より ${}_{505}C_9\equiv {}_{126}C_2 \pmod 4$

$${}_{126}C_2=\frac{126\cdot 125}{2!}=\frac{1}{2}\times 126\times 125=(4\times 15+3)\times(4\times 31+1)\equiv 3\times 1=3$$

よって，求める余りは 3　（答）

<解説>

(1)

合同式についての下の定理を活用する。

$a\equiv c \pmod m$，$b\equiv d \pmod m\rightarrow ab\equiv cd \pmod m$

合同式の扱いについて習熟していない場合，以下のように考える方が速いかも知れない。

$K \pmod 4=r$，$L \pmod 4=s$ とおく。K，L は正の奇数だから，r，s は 1 または 3 である。

k，l を 0 または自然数として，$K=4k+r$，$L=4l+s$ とおける。

$A \pmod 4=p$，$B \pmod 4=q$ とすれば，$A=4m+p$，$B=4n+q$ とおける。

m，n は 0 または自然数，p，q は 0，1，2，3 のいずれかである。

ただし，$m=0$ かつ $p=0$，$n=0$ かつ $q=0$ となることはないものとする。

$KA=(4k+r)(4m+p)=4(4km+kp+mr)+pr$

$LB=(4l+s)(4n+q)=4(4ln+lq+ns)+qs$

$KA=LB$ だから，$pr\equiv qs \pmod 4$，ここで $r=s\,(\neq 0)$ とすれば $p\equiv q \pmod 4$，$\therefore p=q$

すなわち，K を4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りはB を 4 で 割った余りと等しい。

(2)

組合せ ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ の定義式を記載し，凝視すると，${}_aC_b$ を内包する表式であることに気づく。

(3)

(2) の L，K の表式を凝視すると，同じ形式の項の積になっていることに気づく。

その上で，$a\equiv c \pmod m$，$b\equiv d \pmod m\rightarrow ab\equiv cd \pmod m$　を活用する。

第 5 問

α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha, -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta, \cos\theta)$ 間の距離 AP の2乗として定める。

(1) $0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる θ がただ１つ存在することを示せ。

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$は，区間 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

＜解答＞

(1)

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= (\theta+\sin\theta+\alpha)^2 + (\cos\theta+3)^2 \\
&= \sin^2\theta + 2(\alpha+\theta)\sin\theta + (\alpha+\theta)^2 + \cos^2\theta + 6\cos\theta + 9 \\
&= (\alpha+\theta)^2 + 2(\alpha+\theta)\sin\theta + 6\cos\theta + 10
\end{aligned}
$$

$f'(\theta) = 2(\alpha+\theta) + 2\sin\theta + 2(\alpha+\theta)\cos\theta - 6\sin\theta = 2(\alpha+\theta)(1+\cos\theta) - 4\sin\theta$

$f''(\theta) = 2\{1-\cos\theta-(\alpha+\theta)\sin\theta\}$，$f'''(\theta) = 2\{\sin\theta-\sin\theta-(\alpha+\theta)\cos\theta\} = -2(\alpha+\theta)\cos\theta$

ここで $0 < \theta < \pi$，$\alpha > 0$より $\alpha+\theta > 0$ だから，図１のように$f''(\theta)$は変化する。

図１

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f''(\theta)$	0	$\searrow$	<0	$\nearrow$	4

図１より，$f''(\theta)$ は $\dfrac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ なる ただ１つの γ において $f''(\gamma) = 0$となる。

すると，図２のように$f'(\theta)$は変化する。$0 < \theta_0 < \gamma < \pi$ なるただ１つの θ_0 において，$f'(\theta_0) = 0$ になる。すなわち，$0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる θ がただ１つ存在する。

図２

θ	0		γ		π
$f''(\theta)$	0	$-$	0	$+$	
$f'(\theta)$	4α	$\searrow$	<0	$\nearrow$	0

(2)

$f(\theta)$は図３のように変化し，$\theta = \theta_0$で最大値をとる。

$f'(\theta_0) = 2(\alpha+\theta_0)(1+\cos\theta_0) - 4\sin\theta_0 = 0$，$\therefore\ \alpha = \dfrac{2\sin\theta_0}{\cos\theta_0+1} - \theta_0$

θ_0 に対する α の変化は $\dfrac{d\alpha}{d\theta_0} = \dfrac{2+2\cos\theta_0}{(\cos\theta_0+1)^2} - 1 = \dfrac{1-\cos\theta_0}{1+\cos\theta_0}$

α は θ_0 に対して図４のような変化をする。α は $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ において単調に増加するから，

$0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ であるとき，$0 < \alpha < 2 - \dfrac{\pi}{2}$　（答）

図３

θ	0		θ_0		π
$f'(\theta)$	4α	$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗		↘	0

図４

θ_0	0		$\frac{\pi}{2}$
$d\alpha/d\theta_0$	0	$+$	1
α	0	↗	$2-\frac{\pi}{2}$

＜解説＞

導関数を用いた関数の変化を考察する問題。特段に難解なものではないが，３次導関数まで考慮するので，錯綜しないようにしたい。

別解を紹介する。

(1)

$$f'(\theta)=2(\alpha+\theta)+2\sin\theta+2(\alpha+\theta)\cos\theta-6\sin\theta=2(\alpha+\theta)\cos\theta-4\sin\theta+2(\alpha+\theta)$$
$$=2(\cos\theta+1)\left\{(\alpha+\theta)-\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}\right\}$$

$0<\theta<\pi$ において $(\cos\theta+1)>0$ だから，$f'(\theta)=0 \Leftrightarrow \alpha+\theta=\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}$ ①

$g(\theta)=\alpha+\theta$，$h(\theta)=\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}$ とおく。$s(\theta)=g(\theta)-h(\theta)$として

$$s(0)=\alpha>0,\ \lim_{\theta\to\pi}s(\theta)=\lim_{\theta\to\pi}\{g(\theta)-h(\theta)\}=\alpha+\pi-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}$$

$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}=\infty$ ②，したがって $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}s(\theta)=-\infty$

$$s'(\theta)=\{g(\theta)-h(\theta)\}'=1-\frac{2\cos\theta(\cos\theta+1)+2\sin^2\theta}{(\cos\theta+1)^2}=1-\frac{2+2\cos\theta}{(\cos\theta+1)^2}=\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+1}<0$$

以上から，$s(\theta)=g(\theta)-h(\theta)$ は単調減少関数で，$s(0)=\alpha>0$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}s(\theta)=-\infty$ だから，

$s(\theta)=g(\theta)-h(\theta)=(\alpha+\theta)-\dfrac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}$ は $0<\theta<\pi$ において１回だけ $s(\theta)=0$ となる。

すなわち ① が成立する θ がただ１つ存在する。

(2)

$$f'(\theta)=2(\cos\theta+1)\left\{(\alpha+\theta)-\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}\right\}=2(\cos\theta+1)s(\theta)$$

$\theta=\gamma$ において $s(\gamma)=0$ とする。すると，図４のように $f(\theta)$ は変化する。したがって $\theta=\gamma$ において $f(\theta)$ は最大値をとる。

$$\alpha+\gamma=\frac{2\sin\gamma}{\cos\gamma+1},\ \alpha=\frac{2\sin\gamma}{\cos\gamma+1}-\gamma,\ \frac{d\alpha}{d\gamma}=\frac{2+2\cos\gamma}{(\cos\gamma+1)^2}-1=\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}$$

すなわち α は $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ において図５のように単調増加する。このとき，$0<\alpha<2-\dfrac{\pi}{2}$ （答）

θ	0		γ		π
$s(\theta)$	α	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f'(\theta)$	4α	$+$		$-$	0
$f(\theta)$	>0	$\nearrow$		$\searrow$	>0

図4

γ	0		$\dfrac{\pi}{2}$
$d\alpha/d\gamma$	0	$+$	1
α	0	$\nearrow$	$2-\dfrac{\pi}{2}$

図5

ここで示した別解の良さは３次導関数まで考えなくても，$0<\theta<\pi$ の範囲に $f'(\theta)=0$ となる θ がただ１つ存在することを示すことができる点にある。

② の $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}=\infty$ となることを説明する。

$\pi-\theta=\delta>0$ とおくと

$$\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\sin\theta}{\cos\theta+1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{2\sin(\pi-\delta)}{\cos(\pi-\delta)+1}=\lim_{\delta\to 0}\frac{2\sin\delta}{1-\cos\delta}$$

$$\sin\delta=2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2},\quad \cos\delta=1-2\sin^2\frac{\delta}{2},\quad \therefore 1-\cos\delta=2\sin^2\frac{\delta}{2}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{2\sin\delta}{1-\cos\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{4\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{2\sin^2\frac{\delta}{2}}=\lim_{\delta\to 0}\frac{2\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}=\infty$$

第　6　問

定数 b，c，p，q，r に対し，

$$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p\fallingdotseq 0$ であるとき，q，r を p，b で表せ。

(2) $p\fallingdotseq 0$ とする。b，c が定数 a を用いて

$$b=(a^2+1)(a+2),\quad c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$$

を満たすものを１組求めよ。

(3) a を整数とする。x の４次式

$$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

が有理数を係数とする２次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。

＜解答＞

(1)

$$(x^2+px+q)(x^2-px+r)=x^4+(r+q-p^2)x^2+(pr-pq)x+qr=x^4+bx+c$$

$r+q-p^2=0$, $\therefore r+q=p^2$ ①

$pr-pq=b$, $\therefore r-q=\dfrac{b}{p}$ ②

①＋② から，$r=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{b}{p}\right)$，①－② から，$q=\dfrac{1}{2}\left(p^2-\dfrac{b}{p}\right)$ （答）

(2)

(1)より，$c=qr=\dfrac{1}{4}\left(p^4-\dfrac{b^2}{p^2}\right)$，したがって $p^6-4cp^2-b^2=0$

$b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$ だから，

$p^6+4\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$

因数分解して，$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$

したがって，$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}=0$ を満たすt の整式 $f(t)$ と $g(t)$ の１組は

$f(t)=t^2+1$，$g(t)=(t^2+1)(t+2)^2$ （答）

(3)

（i）$p=0$ のとき

$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)=(x^2+q)(x^2+r)=x^4+(q+r)x^2+qr$

$b=q+r=0$，$c=qr$

したがって，$b=(a^2+1)(a+2)=0$，$\therefore a=-2$，

$qr=-q^2=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)=\dfrac{25}{4}$，したがって実数 q，r は存在しない。

したがって，$a=-2$ のとき，有理数を係数とする2次式の積に分解できない。

（ii）$p\neq 0$ のとき

$$x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$$
$$=\left\{x^2+px+\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)\right\}\left\{x^2-px+\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)\right\}$$

と2 次式の積に因数分解できる。

b は有理数だから，2 次式の係数が有理数 $\Leftrightarrow$ p が有理数

(2)より，$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$

$p\neq 0$ より，$\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}>0$

したがって，$p^2-(a^2+1)=0$

p が有理数として，$p=\dfrac{m}{n}$ とおける。ただしm は整数，n は自然数，m とn は互いに素

$p^2=\left(\dfrac{m}{n}\right)^2=a^2+1$，$(a^2+1)$は正の整数だから，$\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$も正の整数。

しかるに，m とn は互いに素であり，共通の素因数をもたないので，

$\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$が整数であるためには $n=1$，したがって $m^2=p^2=(a^2+1)$，$\therefore (p+a)(p-a)=1$

$\therefore (p+a,\ p-a)=(1,1)$または$(-1,-1)$，したがって $a=0$（答）

このとき，

$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)=x^4+2x-\dfrac{3}{4}=\left(x^2+x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\dfrac{3}{2}\right)$

となって，有理数を係数とする 2 次式の積に分解できる。

＜解説＞

(1)，(2)は問題なかろう。(3)は$p=0$と$p\neq 0$ に場合分けして考えることが必要である。

(3)では，2 次式の係数が有理数 $\Leftrightarrow$ p が有理数 に着眼して，p を有理数とするような条件としてaの値を求めることがポイントである。(2)で得たp の 6 次式方程式の解が有理数であることから，aの値を求める。

＜総評＞

例年通り，手強い問題が揃った。率直のところ，筆者もかなり手こずった。着眼が良く，着想力がないと，時間内に完答できそうにない。しかし，問題は誘導的に設問から構成されているので，前の設問から着実に解答し，高点を得たい。

第１問

2 次方程式の解の範囲を与える条件に関する問題。(1) はスムーズに解答できるだろう。(2) は，一見容易そうだが，手こずる問題と思う。難易度はA－。

第２問

複素数とその平面に関する問題。複素数の範囲を決める表式の導出までは容易だから，着実に解答したい。３つの変数によって決まる範囲を求めるために一工夫必要で，数学的な着想が問われる。日ごろの勉強の成果を発揮したい。難易度A－。

第３問

微分と積分に関する問題。曲線と接する直線の方程式が囲む領域の 2 乗の積分を求める。単に領域の面積を求める問題は少なくない。2 乗ということで原始関数を求めるために，やや技巧が必要なのだが，教科書に掲載されている範囲の技巧だから、スムーズに解答したい。難易度はB＋。

第４問

整数の問題で，合同式の取り扱いに関する問題。合同式は数学Aの整数の章では発展の課題であるため，習熟していない受験生が少なくないかも知れない。合同式は難しい思考を要するものではないが，スムーズに解答することが困難であろう。また，丁寧に式を記載して気づくことも必要なので，難易度はA。

第５問

導関数によって，関数の変化を考察する問題。難易度はB。

第６問

多項式の変形と整数に関する問題。因数分解等によって変形する。やや解り難い表現があるので注意する。(2)，(3)は前設問を利用する。難易度はA－。

数学（文科）（配点80点）100分

第　1　問

aを正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径1の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

<解答>

(1)

$C : y = ax^3 - 2x$　①

原点を中心とする半径1の円：$x^2 + y^2 = 1$　②

① と② を連立させてできる方程式は，$1 - x^2 = (ax^3 - 2x)^2$　③

① より，1 つの x の値に対し 1 つの y の値が定まるから，

① と② が座標平面上で 6 個の共有点をもつ $\Leftrightarrow$ ③ が 6 個の実数解をもつ

$t = x^2$ とおいて ③ を整理すると，

$f(t) = a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1 = 0$　④

x が 6 個の実数解をもつためには，t が 3 個の正の実数解をもつ ことが必要である。

④の t が 3 個の正の実数解をもつ条件を求める。

$f(0) = -1 < 0$ だから，

t が 3 個の正の実数解をもつ $\Leftrightarrow$ $f(t)$ が正の極値と負の極値となる t の正の実数値が２つ

$f'(t) = 3a^2t^2 - 8at + 5 = 0$ を解くと，極値を与える t は，$t = \dfrac{1}{a}$，$\dfrac{5}{3a}$

図１

t	0		$\frac{1}{a}$		$\frac{5}{3a}$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	-1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(t)$ は図１のように変化するから，④ が 3 個の正の実数解をもつためには，

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = a^2\left(\frac{1}{a}\right)^3 - 4a\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{a}\right) - 1 > 0,\ \therefore a < 2$$

$$f\left(\frac{5}{3a}\right) = a^2\left(\frac{5}{3a}\right)^3 - 4a\left(\frac{5}{3a}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{3a}\right) - 1 < 0,\ \therefore a > \frac{50}{27}$$

以上によって，$\dfrac{50}{27} < a < 2$　（答）

<解説>

6 次方程式が 6 個の実数解をもつ条件に帰着するのだが，3 次方程式が 3 個の正の実数解をもつことに帰着させることがポイントである。

第　2　問

N を 5 以上の整数とする。1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ。ただし 1 は必ず選ぶこととする。選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える。

条件１：S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない。

条件２：S は連続する $N-2$個 の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む。

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l, l+1, \cdots, l+k-1\}$ と表される集合を指す。例えば $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1, 2, 3\}$，$\{7, 8, 9\}$，$\{8, 9, 10\}$ を含む。

(1) 条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか。

(2) 条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか。

＜解答＞

(1)

条件 1 を満たすためには，大きさの順に整数を $(1, 2)$，$(3, 4)$，$(5, 6)$，$\cdots$，$(2N-1, 2N)$ のように，2 個ずつのペアに区切ったとき，図 1 (a) の $*$ のように，2 個のうち1 個を整数が連続しないように選ぶ必要がある。

図 1 (b) のように，1 の次に 4 と大きい整数を選んだ場合には，その後は大きい整数を選ばなければならない。

すなわち ペアの 2 個の整数のうち，初めに小さい整数 1 を選ぶのだから，以後小さい整数を選んだとき，途中で大きい整数を 1 度選ぶことができる。これには $(N-1)$ 通りある。

したがって，2 個の整数のうち小さい整数をすべて選ぶ方法を加えて条件 1 を満たす選び方は

$(N-1)+1 = N$ 通り　（答）

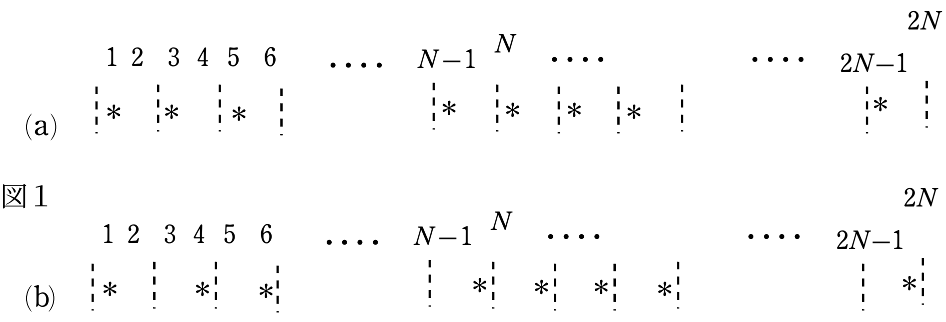

図１

(2)

条件 2 を満たす選び方として，

(ｉ) 連続する N 個の整数からなる集合のみを含む場合：1 通り　①

(ii) 連続する $N-1$ 個の整数からなる集合を含む場合

この場合，連続しない 1 個の整数を含む。

$\{k,\ k+1,\ k+2\ ,\ \ldots\ ,\ N+k-2\}$と連続する$N-1$個の整数からなる集合を含むとすれば，

$k=1$，2 のとき，1 は必ず選ぶので，選ばれる整数の集合は同じで，j を正の整数として

$\{1,\ 2,\ \ldots,\ N-2,\ N-1,\ j\}$, $N+1 \leqq j \leqq 2N$ だから，N 通り。

$3 \leqq k \leqq N+2$ のとき，選ばれる整数の集合は

$\{1,\ k,\ k+1,\ \ldots,\ N+k-2\}$，$k$ に対して 1 通り → 合計 N 通り

したがって，$N+N=2N$ 通り　②

(iii) 連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を含む場合

連続する $N-2$ 個の整数が 1 から始まるとき

整数の集合は，$\{1,\ 2,\ \ldots,\ N-3,\ N-2,\ i,\ j\}$，$i$，$j$ は正の整数で，$N \leqq i < j \leqq 2N$

$N+1$ 個から i，j の 2 個を選ぶから，${}_{N+1}C_2 = \dfrac{(N+1)N}{2}$ 通り

1 から始まらないとき，$N-2$ 個の整数からなる集合 $\{k,\ k+1,\ \ldots,\ N+k-4,\ N+k-3\}$，

$3 \leqq k \leqq N+3$，これに連続しない 2 個の整数を含む場合の整数の集合は

$k=3$ のとき，$\{1,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ N-1,\ N,\ j\}$，$N+2 \leqq j \leqq 2N$，$j$ として $N-1$ 通り

$4 \leqq k \leqq N+2$ のとき，

整数の集合は $\{1,\ j,\ k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots,\ N+k-3\}$，$2 \leqq j \leqq k-2$

または $\{1,\ k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots,\ N+k-3,\ j\}$，$N+k-1 \leqq j \leqq 2N$

j として $N-1$ 個から 1 個を選ぶから，${}_{N-1}C_1 = N-1$ 通り

すなわち，$3 \leqq k \leqq N+2$ のとき

k として N 個から 1 個を選ぶから，合計 $(N-1)\times N = N^2-N$ 通り

$k=N+3$ のとき，$\{1,\ j,\ N+3,\ N+4,\ \ldots,\ 2N\}$，$2 \leqq j \leqq N+1$

j は N 個から 1 個を選ぶから，${}_{N}C_1 = N$ 通り

したがって，連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を含む場合，

$\dfrac{(N+1)N}{2} + N^2 - N + N = \dfrac{N+3N^2}{2}$ 通り　③

条件 2 を満たすような選び方は，(ｉ)，(ii)，(iii)の場合の数 ①，②，③を足して，

$$1+2N+\frac{N+3N^2}{2} = \frac{3N^2+5N+2}{2} = \frac{(3N+2)(N+1)}{2}$$　（答）

＜解説＞

やや錯綜しそうな問題である。ていねいに場合分けして考えていこう。

(1)では，整数を順に $(k,\ k+1)$ のペアに区切ったとき，$k+1$ と大きい整数を選んだ場合，その後の選択は必ず大きい整数を選ばなければならない，という事実に着眼する。

(2)では，N 個の整数を選択したとき，（連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む）場合には，連続する N 個，連続する $N-1$ 個，連続する $N-2$ 個の整数を選ぶという 3 つの場合があることに注意する。

第　3　問

a，b を実数とする。座標平面上の放物線

$C: y = x^2 + ax + b$

は放物線 $y=-x^2$ と２つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1) 点 (a , b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

<解答>，<解説>

理系の第１問と同じ問題なので，そちらを参照する。

第　4　問

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 K，L と正の整数 A，B が $KA = LB$ を満たしているとする。K を4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りはB を 4 で 割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 a，b が$a > b$ を満たしているとする。このとき，$A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$，$B = {}_{a}C_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K，Lが存在することを示せ。

(3) a，b は (2) の通りとし，さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは${}_{a}C_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

<解答>，<解説>

理系の第４問と同じ問題なので，そちらを参照する。

<総評>

今年は第３，４問が理科の問題と同じであった。文科系にしては，手強い問題が揃っている。

第１問

円と 3 次関数が 6 個の共有点をもつ条件に関する問題。共有点の x 座標の 2 乗を変数とする 3 次方程式が３つの解をもつ条件に帰着する。すなわち 3 次方程式が正の極大値，負の極小値をも条件を求めるよくある問題となる。難易度はＢ。

第２問

連続する整数列の場合の数の問題。錯綜しやすいので，丁寧に場合分けする必要がある。(1)は着想が必要である。制限された時間内で扱うには，文科の受験者には難しいということで，難易度はＡ。

第３問，第４問

理科の受験者にとって難しいのだから，文科の受験者にとって相当難しく感じるのではないか。難易度は前者がＡ，後者がＡ＋。

230610