2022（R4)年度　京都大学　前期　入学試験　数学解説

数学（理系）　教育学部（理系）、医学部（人間健康科）
総合人間学部（理系）、経済学部（理系）
理学部、工学部、薬学部、医学部（医学科）、農学部
数学（文系）　総合人間学部（文系）、文学部、教育学部（文系）、法学部、経済学部（文系）

数学（理系）

200点満点，150分

$\boxed{1}$ (30点)

$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$ であることを示せ．ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

＜解答＞

$$\log_4 2022 = \frac{\log_{10} 2022}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10}(2\times 1011)}{2\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} = \frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 1011}{2\log_{10} 2}$$

$1000 < 1011 < 1024 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 < \log_{10} 1011 < \log_{10} 1024$

$$\therefore \frac{\log_{10} 1000}{2\log_{10} 2} < \frac{\log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} < \frac{\log_{10} 1024}{2\log_{10} 2} \Leftrightarrow \frac{3}{2\log_{10} 2} < \frac{\log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} < \frac{10\log_{10} 2}{2\log_{10} 2} = 5$$

$$\Leftrightarrow 4.98 < \frac{3}{2\times 0.3011} < \frac{\log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} < 5$$

したがって，$5.4 < 0.5+4.98 < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\log_{10} 1011}{2\log_{10} 2} < 0.5+5 = 5.5$

したがって，$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$

＜解説＞

題意は明瞭。$1000 < 1011 < 1024$，すなわち $10^3 < 1011 < 2^{10}$ に注目して利用する。

$\boxed{2}$ (35点)

箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある．ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする．この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X，Y，Z とする．このとき，$Y - X \geqq 2$ かつ $Z - Y \geqq 2$ となる確率を求めよ．

＜解答＞

$Y - X \geqq 2 \Leftrightarrow 3 \leqq 2 + X \leqq Y$，　$Z - Y \geqq 2 \Leftrightarrow Y \leqq Z - 2 \leqq n - 2$

したがって，Y の値に応じて，X，Z の値が定まり，場合の数が求まる。

$Y = 3 \to X = 1$，　$Z = 5, 6, \ldots, n \Longrightarrow$ 場合の数は，$1\times(n-4)$ 通り

$Y = 4 \to X = 1, 2$，　$Z = 6, 7, \ldots, n \Longrightarrow 2\times(n-5)$ 通り

$Y=5 \to X=1,2,3,\quad Z=7,8,\dots,n \implies 3\times(n-6)$ 通り

.....

$Y=k \to X=1,2,3,\dots,k-2,\ Z=k+2,k+3,\dots,n \implies (k-2)\times(n-k-1)$ 通り

.....

$Y=n-2 \to X=1,2,3,\dots,n-4,\quad Z=n \implies (n-4)\times 1$ 通り

したがって，$Y-X \geqq 2$ かつ $Z-Y \geqq 2$ を満たす場合の数 N は，$j=k-2$ として

$$N=\sum_{j=1}^{n-4} j(n-j-3)=\sum_{j=1}^{n-4} j(n-3)-\sum_{j=1}^{n-4} j^2$$

$$=\frac{(n-3)^2(n-4)}{2}-\frac{(n-3)(n-4)(2n-7)}{6}=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$$

n 枚の札から 3 枚の札を取る場合の数は ${}_nC_3$ だから，

$Y-X \geqq 2$ かつ $Z-Y \geqq 2$ を満たす確率 P は

$$P=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}\times\frac{1}{{}_nC_3}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$$ （答）

＜解説＞

解答方針の着想が必要である。Y が決まれば，X，Z の範囲が決まることは明らかである。Y に対する場合の数を求めることに気づけば，解答方針を得る。

計算では，公式 $\sum_{j=1}^{n} j^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ を知っていなければならない。

別解を紹介する。

$Y-X \geqq 2 \Leftrightarrow 3 \leqq 2+X \leqq Y$，$Z-Y \geqq 2 \Leftrightarrow Y \leqq Z-2 \leqq n-2$

$y=(Y-1)$ または Y または $(Y+1)$ とすれば，$1 \leqq X < y < Z \leqq n$　①

すると，①を満たす $(X,\ y,\ Z)$ の組の数は，相異なる数字の $(n-2)$ 枚の札から 3 枚の札を取り出す組合わせの数 ${}_{n-2}C_3$

このような組が得られる確率は $\frac{{}_{n-2}C_3}{{}_nC_3}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$ （答）

$\boxed{3}$ (35点)

n を自然数とする．3 つの整数 n^2+2，n^4+2，n^6+2 の最大公約数 A_n を求めよ．

＜解答＞

$(n^4+2)=(n^2-2)(n^2+2)+6$

したがって，(n^2+2)，(n^4+2)，6 は公約数をもつ。それらは 1, 2, 3, 6 に含まれる。

$(n^6+2)=n^2(n^4+2)-2(n^2+2)+6$

したがって，(n^2+2)，(n^4+2)，(n^6+2)，6 は公約数をもつ。それらは 1, 2, 3, 6 に含まれる。

$k=0, 1, 2, \ldots$として

$n=6k+1$ のとき， すなわち $n \equiv 1 \pmod 6$

$(n^2+2)=\{(6k+1)^2+2\} \equiv (1+2) \pmod 6 \equiv 3 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 3$

$(n^4+2)=\{(6k+1)^4+2\} \equiv (1+2) \pmod 6 \equiv 3 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 3$

$(n^6+2)=\{(6k+1)^6+2\} \equiv (1+2) \pmod 6 \equiv 3 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 3$

したがって，$(n^2+2) \pmod 6 \equiv (n^4+2) \pmod 6 \equiv (n^6+2) \pmod 6 \equiv 3 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 3$

最大公約数は 3

$n=6k+2$ のとき，すなわち $n \equiv 2 \pmod 6$

$(n^2+2)=\{(6k+2)^2+2\} \equiv (4+2) \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$

$(n^4+2)=\{(6k+2)^4+2\} \equiv (16+2) \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$

$(n^6+2)=\{(3k+2)^6+2\} \equiv (64+2) \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$

したがって，$(n^2+2) \pmod 6 \equiv (n^4+2) \pmod 6 \equiv (n^6+2) \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$

最大公約数は 6

$n=6k+3$ のとき，すなわち $n \equiv 3 \pmod 6$

$(n^2+2)=\{(6k+3)^2+2\} \equiv (9+2) \pmod 6 \equiv 5 \pmod 6 \equiv 1 \pmod 2$

$(n^4+2)=\{(6k+3)^4+2\} \equiv (81+2) \pmod 6 \equiv 5 \pmod 6 \equiv 1 \pmod 2$

$(n^6+2)=\{(6k+3)^6+2\} \equiv (729+2) \pmod 6 \equiv 5 \pmod 6 \equiv 1 \pmod 2$

したがって，$(n^2+2) \pmod 6 \equiv (n^4+2) \pmod 6 \equiv (n^6+2) \pmod 6 \equiv 5 \pmod 6 \equiv 1 \pmod 2$

最大公約数は 1

$n=6k+4$ のとき，すなわち $n \equiv 4 \pmod 6$

$(n^2+2)=\{(6k+4)^2+2\} \equiv (4+2) \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$

$(n^4+2)=\{(6k+4)^4+2\} \equiv (16+2) \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$

$(n^6+2)=\{(6k+4)^6+2\} \equiv (64+2) \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$

したがって，$(n^2+2) \pmod 6 \equiv (n^4+2) \pmod 6 \equiv (n^6+2) \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$

最大公約数は 6

$n=6k+5$ のとき，すなわち $n \equiv 5 \pmod 6$

$(n^2+2)=\{(6k+5)^2+2\} \equiv (1+2) \pmod 6 \equiv 3 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 3$

$(n^4+2)=\{(6k+5)^4+2\} \equiv (1+2) \pmod 6 \equiv 3 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 3$

$(n^6+2)=\{(6k+5)^6+2\} \equiv (1+2) \pmod 6 \equiv 3 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 3$

したがって，$(n^2+2) \pmod 6 \equiv (n^4+2) \pmod 6 \equiv (n^6+2) \pmod 6 \equiv 3 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 3$

最大公約数は 3

$n=6(k+1)$ のとき，すなわち $n \equiv 0 \pmod 6$

$(n^2+2)=\{(6k+6)^2+2\} \equiv 2 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 2$

$(n^4+2)=\{(6k+6)^4+2\} \equiv 2 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 2$

$(n^6+2)=\{(6k+6)^6+2\} \equiv 2 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 2$

したがって，$(n^2+2) \pmod 6 \equiv (n^4+2) \pmod 6 \equiv (n^6+2) \pmod 6 \equiv 2 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 2$

最大公約数は 2

以上をまとめると，

$n \equiv 0 \pmod 6$ のとき，最大公約数 $A_n = 2$

$n \equiv 1 \pmod 6$ ，$n \equiv 5 \pmod 6$ のとき，$A_n = 3$

$n \equiv 2 \pmod 6$ ，$n \equiv 4 \pmod 6$ のとき，$A_n = 6$

$n \equiv 3 \pmod 6$ のとき，$A_n = 1$ （答）

＜解説＞

解答方針を着想する必要がある。最大公約数に関する問題だから，ユークリッドの互除法的な表式を考察することは無理のない出発点だろう。すると，6 およびその約数が最大公約数となる可能性のあることがわかる。

そこで，n を 6 を法とした表式により区分し，約数について考察する。解答では，$n = 6k + j$ ($j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) について丁寧に計算しているが，このように記載しなくても，暗算で結果を出せるので，もっと簡便な記載で結果を出すことができる。

もっとスマートな方法があるのかも知れないが，着想に必然性がなくてはならないので，このような解答とした。

$\boxed{4}$ (30点)

四面体 OABC が

$$\mathrm{OA} = 4,\ \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 3,\ \mathrm{OC} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．P を辺 BC 上の点とし，△OAP の重心を G とする．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ．

＜解答＞

(1)

△ABCと△OBC において，$\mathrm{AB} = \mathrm{OB} = 3$，$\mathrm{AC} = \mathrm{OC} = 2\sqrt{3}$ ，BC は共通，

$\therefore$ △ABC ≡ △OBC，したがって∠ABP = ∠OBP だから △ABP ≡ △OBP，$\therefore$ AP = OP

したがって △OAP は 2 等辺三角形，OA の中点をMとすれば PM ⊥ OA，重心 G は PM 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{PG}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{PM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$

P が BC を $t : 1-t$ に内分するとすれば，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1-t)\,\vec{b} + t\,\vec{c}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \left|(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\right|^2 = (1-t)^2\left|\vec{b}\right|^2 + 2t(1-t)\,\vec{b}\,\vec{c} + t^2\left|\vec{c}\right|^2 = 9(1-t)^2 + 12t(1-t) + 12t^2$

$= 9t^2 - 6t + 9 = (\mathrm{OP})^2$

$\angle OMP = \angle R$だから，$(PM)^2 = (OP)^2 - (OM)^2 = 9t^2 - 6t + 9 - 4 = 9t^2 - 6t + 5$

$PG = \dfrac{2}{3}PM$，$\therefore\ (PG)^2 = \dfrac{4}{9}(PM)^2 = 4t^2 - \dfrac{8}{3}t + \dfrac{20}{9} = 4\left(t - \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{16}{9} \geqq \dfrac{16}{9}$

したがって，PGは $t = \dfrac{1}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{4}{3}$ （答）

＜解説＞

図１のような図を描いて考察する。すると，△OABは２等辺三角形であり，△OAPも２等辺三角形であるから，$PM \perp OA$は直ぐに理解できる。

(2) では，三角形 OBC に着目して，図２のように，$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OC} + (1-t)\overrightarrow{OB} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$ と表現することが常套的方法である。

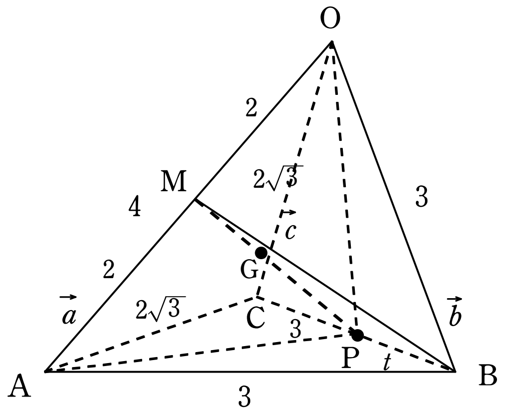

図１

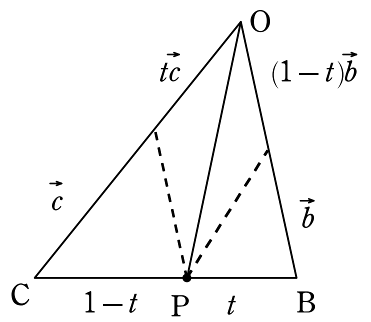

図２

$\boxed{5}$ (35点)

曲線 C ： $y = \cos^3 x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする．

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $Q(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O，および $P(t,\ 0)$，$R(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) S を求めよ．

(2) $f(t)$ は最大値をただ１つの t でとることを示せ．そのときの t を α とすると，

$f(\alpha) = \dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$ であることを示せ．

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S} < \dfrac{9}{16}$ を示せ．

＜解答＞

(1)

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,(1 - \sin^2 x)\,dx = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{（答）}$$

(2)

$f(t) = t\cos^3 t$ ， $f'(t) = \cos^3 t - 3t\cos^2 t\sin t = \cos^2 t\,(\cos t - 3t\sin t)$ ①

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において， $f'(t) = 0$ となるのは， $\cos t - 3t\sin t = 0$ のとき

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t - 3t\sin t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\cos t}{3\sin t} = \dfrac{1}{3\tan t}$ ②

② において， $g_1(t) = t$ ， $g_2(t) = \dfrac{1}{3\tan t}$ とおく。

$g_1(t) = t$ は単調増加で， $g_1(0) = 0$ ， $g_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

$g_2(t) = \dfrac{1}{3\tan t}$ は単調減少で， $\lim\limits_{t\to 0} g_2(t) = \infty$， $\lim\limits_{t\to\pi/2} g_2(t) = 0$

したがって，グラフ $g_1(t)$ と $g_2(t)$ は１点で交わる。その点を $\left(\alpha,\ \dfrac{1}{3\tan\alpha}\right)$ とする。

$f(t)$ は図１のように変化するから， $f(t)$ は最大値をただ１つの t ，すなわち $t = \alpha$ でとる。

$f(\alpha) = \alpha\cos^3\alpha$，しかるに ② より $\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{3\sin\alpha}$ だから， $f(\alpha) = \dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

図１

(3)

① において $t = \dfrac{\pi}{6}$ のとき， $\cos t - 3t\sin t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{4} > 0$， $\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) > 0$， $\therefore \dfrac{\pi}{6} < \alpha$

したがって， $\cos\alpha < \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\sin\alpha > \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\frac{f(\alpha)}{S} = \frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha} \times \frac{3}{2} = \frac{\cos^4\alpha}{2\sin\alpha} < \frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}{2\times 1/2} = \frac{9}{16}$$

＜解説＞

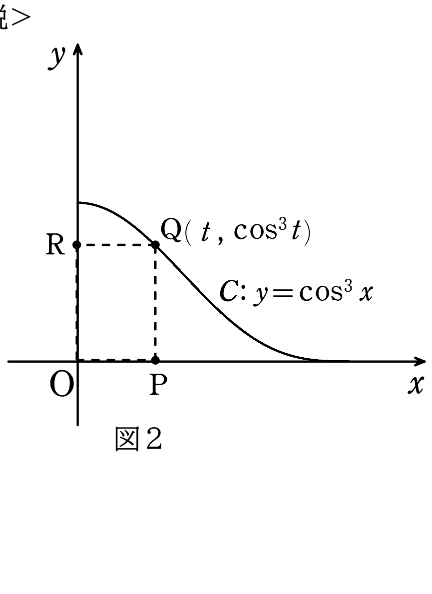

図２

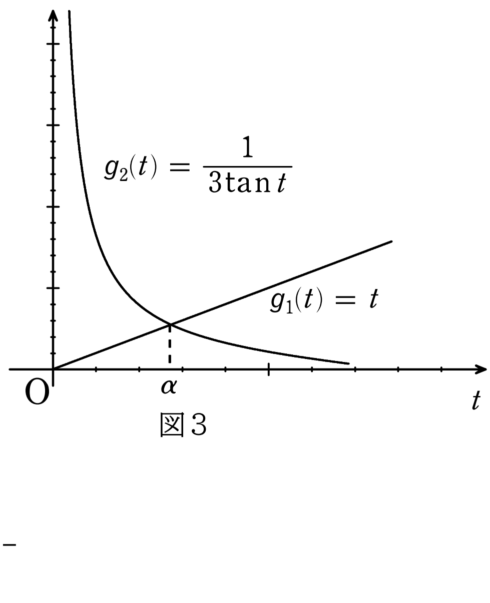

図３

図２のような図を描いて題意を確認する。図３のような図を描いて

$f(t) = \cos^2 t(\cos t\ - 3\ t \sin t) = 3\sin t\ \cos^2 t\left(\dfrac{\cos t}{3\sin t} - t\right) = 3\sin t\ \cos^2 t\left(\dfrac{1}{3\tan t} - t\right)$ がただ１点

において極値をもつことを確認する。

$\boxed{6}$ (35 点)

数列$\{ x_n \}$，$\{ y_n \}$を次の式

$$x_1 = 0,\quad x_{n+1} = x_n + n + 2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$y_{3m+1} = 3m,\quad y_{3m+2} = 3m+2,\quad y_{3m+3} = 3m+4 \qquad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

により定める．このとき，数列$\{ x_n - y_n \}$の一般項を求めよ．

＜解答＞

$n \geqq 2$ のとき

$$x_n - x_{n-1} = 2\cos\left(\frac{2\pi x_{n-1}}{3}\right) + (n-1)$$

$$\sum_{j=2}^{n}(x_j - x_{j-1}) = x_n - x_1 = 2\sum_{j=2}^{n}\cos\left(\frac{2\pi x_{j-1}}{3}\right) + \sum_{j=2}^{n}(j-1) = 2\sum_{j=2}^{n}\cos\left(\frac{2\pi x_{j-1}}{3}\right) + \frac{n(n-1)}{2}$$

したがって，$x_n = 2\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\cos\left(\frac{2\pi x_{j-1}}{3}\right) + \frac{n(n-1)}{2}$ ①

$x_1 = 0 \equiv 0 \pmod 3$

$x_2 = x_1 + 1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi x_1}{3}\right) = 0+1+2 = 3 \equiv 0 \pmod 3$

$x_3 = x_2 + 2 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi x_2}{3}\right) = 3+2+2 = 7 \equiv 1 \pmod 3$

$x_4 = x_3 + 3 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi x_3}{3}\right) = 7+3-1 = 9 \equiv 0 \pmod 3$

$x_5 = x_4 + 4 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi x_4}{3}\right) = 9+4+2 = 15 \equiv 0 \pmod 3$

$x_6 = x_5 + 5 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi x_5}{3}\right) = 15+5+2 = 22 \equiv 1 \pmod 3$

$x_7 = x_6 + 6 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi x_6}{3}\right) = 22+6-1 = 27 \equiv 0 \pmod 3$

以上から，$x_{3m+1} \equiv 0 \pmod 3$，$x_{3m+2} \equiv 0 \pmod 3$，$x_{3m+3} \equiv 1 \pmod 3$ ② が推定される。

② を数学的帰納法によって証明する。

$m = 0$ のとき，② は上記により成立している。

$m = k$ のとき，② は成立しているとする。すなわち

$x_{3k+1} \equiv 0 \pmod 3$，$x_{3k+2} \equiv 0 \pmod 3$，$x_{3k+3} \equiv 1 \pmod 3$ ③

$m = k+1$ のとき，

$x_{3(k+1)+1} = x_{3k+3} + 3(k+1) + 2\cos(2\pi(k+1)) = x_{3k+3} + 3k+3 + 2$

$\therefore$ ($x_{3(k+1)+1}$) (mod 3) $\equiv$ (x_{3k+3}) (mod 3) + (3 k +5) (mod 3) $\equiv$ (1+2) (mod 3) $\equiv$ 0 (mod 3)

$$x_{3(k+1)+2} = x_{3(k+1)+1} + (3k+3+1) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}(3k+3+1)\right)$$

$$= x_{3(k+1)+1} + (3k+3+1) - 1 = x_{3(k+1)+1} + (3k+3)$$

$\therefore$ ($x_{3(k+1)+2}$) (mod 3) $\equiv$ ($x_{3(k+1)+1}$) (mod 3)+ ($3k+3$) (mod 3) $\equiv$ 0 + 0 $\equiv$ 0 (mod 3)

$$x_{3(k+1)+3} = x_{3(k+1)+2} + (3k+3+2) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}(3k+3+2)\right)$$

$$= x_{3(k+1)+2} + (3k+3+2) - 1 = x_{3(k+1)+2} + (3k+3+1)$$

$\therefore$ ($x_{3(k+1)+3}$) (mod 3) $\equiv$ ($x_{3(k+1)+2}$) (mod 3)+ ($3k+4$) (mod 3) $\equiv$ 0 + 1 $\equiv$ 1 (mod 3)

② は m =0 において成立し， $m = k$ のとき ② は成立しているとすれば， $m = k+1$ のときにも成立する。したがって，数学的帰納法により，② は任意の 正の整数 m において成立する。

① は $n = 3m + 1$ のとき，

$$x_{3m+1} = 2\sum_{j=2}^{3m+1}\cos\left(\frac{2\pi x_{j-1}}{3}\right) + \frac{3m(3m+1)}{2}$$

$$= \frac{3m(3m+1)}{2} + 2\left\{\cos\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{2\pi x_{3m}}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{3m(3m+1)}{2} + 2\left\{1+1-\frac{1}{2}+\ldots1+1-\frac{1}{2}\right\} = \frac{3m(3m+1)}{2} + 2\times\frac{3m}{2}$$

$$= \frac{9m(m+1)}{2},\quad m = \frac{n-1}{3} \text{ として，}\quad x_n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

一方，$y_n = (n-1) + (n-1)$ (mod 3)　とおけるから，

$y_n = (n-1) + (n-1)$ (mod 3) $= n-1$，$\therefore \{ x_n - y_n \} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$n = 3m + 2$ のとき，

$$x_{3m+2} = 2\sum_{j=2}^{3m+2}\cos\left(\frac{2\pi x_{j-1}}{3}\right) + \frac{(3m+1)(3m+2)}{2}$$

$$= \frac{(3m+1)(3m+2)}{2} + 2\left\{1+1-\frac{1}{2}+\ldots1+1-\frac{1}{2}+1\right\} = \frac{(3m+1)(3m+2)}{2} + 2\times\frac{3m}{2} + 2$$

$$= \frac{9m^2+15m}{2} + 3,\quad m = \frac{n-2}{3} \text{ として，}\quad x_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$y_n = (n-1) + (n-1)$ (mod 3) $= n-1+1 = n$，$\therefore \{ x_n - y_n \} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$n = 3m + 3$ のとき，

$$x_{3m+3} = 2\sum_{j=2}^{3m+3}\cos\left(\frac{2\pi x_{j-1}}{3}\right) + \frac{(3m+2)(3m+3)}{2}$$

$$= \frac{(3m+2)(3m+3)}{2} + 2\left\{1+1-\frac{1}{2}+\ldots1+1-\frac{1}{2}+1+1\right\} = \frac{(3m+2)(3m+3)}{2} + 2\times\frac{3m}{2} + 4$$

$$= \frac{9m^2+21m}{2} + 7,\quad m = \frac{n-3}{3} \text{ として，}\quad x_n = \frac{n^2+n+2}{2}$$

$y_n = (n-1) + (n-1)$ (mod 3) $= n-1+2 = n+1$，$\therefore \{ x_n - y_n \} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

以上をまとめると，$\{x_n - y_n\} = \dfrac{n(n-1)}{2}$　（答）

＜解説＞

x_n は漸化式によって与えられるので，一般項を求めるのは容易そうに見える。しかし，$\cos\left(\dfrac{2\pi x_n}{3}\right)$ の項が難しくしている。

x_n が整数ならば，$x_n \pmod 3 \equiv 0, 1, 2$ に応じて，$2\cos\left(\dfrac{2\pi x_n}{3}\right)$ は 1，-1，-1 の値しかとらない。$x_1=0$ だから x_2 は整数であり，以下，順次 x_n は整数であることがわかる。すると x_n には何か規則的な表式があるのではないかという感じがしてくる。 そこで解答に記載したように具体的に x_n を求めてみる。 $\cos\left(\dfrac{2\pi x_n}{3}\right)$ が $x_n \pmod 3$ によって決まるので， $x_n \pmod 3$ を調べてみる。

すると，$x_n \pmod 3 \equiv 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots.$ と $\{0, 0, 1\}$ の繰り返しであることがわかる。

一方， $y_{3m+1} = 3m$， $y_{3m+2} = 3m+2$， $y_{3m+3} = 3m+4$　（$m = 0, 1, 2, \ldots$），において $3m+1 \to 3m$（変化は-1），$3m+2 \to 3m+2$（変化は0），$3m+3 \to 3m+4$（変化は1）　であるから

$y_n = (n-1) + (n-1) \pmod 3$　として一般項がわかる。

＜理系総評＞

前年に比べると，易化した印象である。前年は難易度Ａ，Ａ－が 3 問に対し，今年は 2 問である。合同式演算を利用する問題が 2 問出題された。

$\boxed{1}$

対数の問題だが，$1000 < 1011 < 1024$，すなわち $10^3 < 1011 < 2^{10}$ に着眼することは容易だろう。難易度Ｂ－。

$\boxed{2}$

確率の問題。解答方針の着眼着想を必要とするが，場合の数の計算は容易である。難易度Ｂ＋。

$\boxed{3}$

整数の約数の問題。解答方針に着想が必要なため，きっかけとなる考察が重要である。合同式の理解と計算が必要である。難易度はＡ。

$\boxed{4}$

京大数学としては容易な立体図形と空間ベクトルに関わる問題。題意は明解だし，結論に至る過程も輻輳するところがない。難易度Ｂ－。

$\boxed{5}$

図形と方程式，微分と積分に関わる問題。題意は煩瑣なところがないので，スムーズに解きたい。難易度はＢ。

$\boxed{6}$

数列の問題だが，推定により表式を仮定しなければならないところに難しさがある。推定にあたっては合同式を扱うので，さらに難しい。難易度Ａ。

数学（文系）

150点満点　120分

$\boxed{1}$

(30点)

　5.4 ＜ $\log_4 2022$ ＜ 5.5 であることを示せ．ただし，0.301 ＜ $\log_{10} 2$ ＜ 0.3011 であることは用いてよい．

＜解答＞，＜解説＞

理系 $\boxed{1}$ と同一問題なので，理系を参照のこと。

$\boxed{2}$

(30点)

　下図の三角柱ABC－DEFにおいて，Aを始点として，辺に沿って頂点を n 回移動する．
すなわち，この移動経路

$\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_1 \to \mathrm{P}_2 \to \cdots \to \mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{P}_n$　　　（ただし $\mathrm{P}_0 = \mathrm{A}$）

において，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\cdots$，$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ はすべて辺であるとする．また，同じ頂点を何度通ってもよいものとする．このような移動経路で，終点 P_n が A，B，C のいずれかとなるものの総数 a_n を求めよ．

＜解答＞

　$n-1$回の移動で，P_{n-1} が D，E，F のいずれかとなるものの総数 b_{n-1}

各回において，次の移動先の点は 3 点あるので， $n-1$回の移動で経路の数は 3^{n-1}

したがって， $a_{n-1} + b_{n-1} = 3^{n-1}$，$\therefore b_{n-1} = 3^{n-1} - a_{n-1}$

P_{n-1} が A，B，C にある場合，P_n が A，B，C のいずれかとなる経路はそれぞれ 2 本存在

P_{n-1} が D，E，F にある場合，P_n が A，B，C のいずれかとなる経路はそれぞれ 1 本存在

したがって， $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} + 3^{n-1}$

$$\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} 3^{k-1} = \frac{3(3^{n-1}-1)}{2},$$

$$\therefore a_n = \frac{3(3^{n-1}-1)}{2} + a_1 = \frac{3(3^{n-1}-1)}{2} + 2 = \frac{3^n+1}{2}$$　（答）

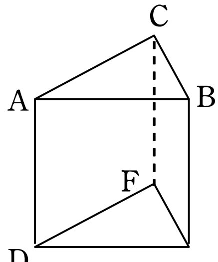

図 1

＜解説＞

　n 回目の移動による経路数 a_n と $n-1$ 回目の移動による経路数 a_{n-1} との関係を考察し，明らかにするとの解答方針を着想したい。

$\boxed{3}$ (30点)

xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 は直交し，交点の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ である．また， L_1，L_2 はともに曲線 C： $y=\dfrac{x^2}{4}$ に接している．このとき， L_1，L_2 および C で囲まれる図形の面積を求めよ．

<解答>

L_1 ： $y=ax+b$， L_2 ： $y=\dfrac{-1}{a}x+c$ とおく。

C ： $y=\dfrac{x^2}{4}$ と L_1 ： $y=ax+b$ を連立させると， $\dfrac{x^2}{4}-ax-b=0$ ①

C と L_1 が接するので， ① が重解をもつ。 したがって ① の解の判別式 $D=a^2+b=0$ ②

C ： $y=\dfrac{x^2}{4}$ と L_2 ： $y=\dfrac{-1}{a}x+c$ を連立させると， $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{a}-c=0$ ③

同様に，② が重解をもつ。 したがって ② の解の判別式 $D=\dfrac{1}{a^2}+c=0$ ④

L_1 と L_2 は $x=\dfrac{3}{2}$ で交わるから， $\dfrac{3}{2}a+b=\dfrac{-3}{2a}+c$， $\therefore c=\dfrac{3}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+b$ ⑤

②，④，⑤ から $a=2$ または $-\dfrac{1}{2}$， これより 2 つの接線は

$y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$ ⑥， $y=2x-4$ ⑦

⑥ と C の接点の x 座標は -1，⑦ と C の接点の x 座標は 4

したがって， L_1，L_2 および C で囲まれる図形の面積は

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{x^2}{4}-\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{4}\left\{\frac{x^2}{4}-(2x-4)\right\}dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(x+1)^2dx+\frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}}^{4}(x-4)^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_{\frac{3}{2}}^{4}=\frac{125}{48}$$ （答）

<解説>

題意は簡明で，解答方針に迷うことはないだろう。

まずは，大雑把に図 1 のような C ： $y=\dfrac{x^2}{4}$ と接線を描いて題意を把握する。

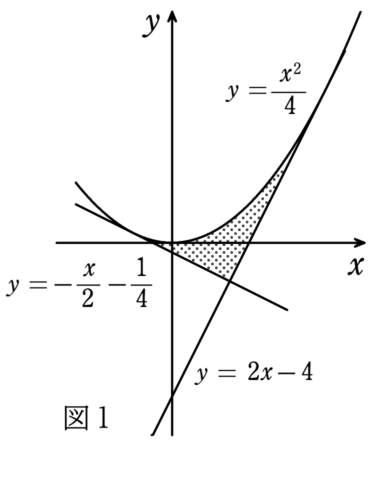

図 1

積分計算にあたっては,

$$\frac{x^2}{4}-\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(x+1)^2$$

$$\frac{x^2}{4}-(2x-4)=\frac{1}{4}(x-4)^2$$

であることを忘れないこと。原始関数の導出が容易かつ計算が簡便になる。

$\boxed{4}$ （30 点）

a，b を正の実数とする．直線 L： $ax+by=1$ と曲線 $y=-\dfrac{1}{x}$ との 2 つの交点のうち， y 座標が正のものを P，負のものを Q とする．また L と x 軸との交点を R とし， L と y 軸との交点を S とする。 a，b が条件

$$\frac{PQ}{RS}=\sqrt{2}$$

を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点の軌跡を求めよ．

＜解答＞

$ax+by=1$ において， $y=-\dfrac{1}{x}$ とすれば，$x^2-\dfrac{x}{a}-\dfrac{b}{a}=0$ ①

２次方程式 ① の解を α，β とすれば,

$$(\mathrm{PQ})^2=(\alpha-\beta)^2+\left(\frac{-1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\right)^2=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\left(1+\frac{1}{(\alpha\beta)^2}\right)$$

解と係数の関係により，$\alpha+\beta=\dfrac{1}{a}$，$\alpha\beta=-\dfrac{b}{a}$ を代入して，

$$\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(1+4ab)}}{ab}\text{，また RQ}=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

したがって，$\dfrac{PQ}{RS}=\sqrt{1+4ab}=\sqrt{2}$， $\therefore\ ab=\dfrac{1}{4}$ ②

線分 PQ の中点 M(x_M, y_M) は,

$$x_M=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2a}>0,\quad y_M=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\alpha}+\frac{-1}{\beta}\right)=-\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{1}{2b}>0$$

②より， $x_M\,y_M=1$，したがって

線分 PQ の中点の軌跡は $y=\dfrac{1}{x}$， ただし $x>0$ の部分 （答）

＜解説＞

図 1 のような図を描いて，題意を把握する。線分PQの長さが2次方程式①の係数によって簡明に表現されることに注意する。

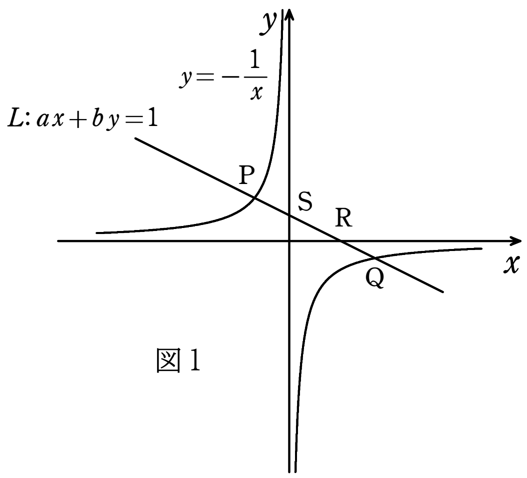

図 1

$\boxed{5}$ (30点)

四面体 OABC が

$$\mathrm{OA} = 4,\ \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 3,\ \mathrm{OC} = \mathrm{AC} = 2\sqrt{3}$$

を満たしているとする．P を辺 BC 上の点とし，△OAP の重心を G とする．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ．

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ．

<解答>，<解説>

理系 $\boxed{4}$ と同一問題なので，理系を参照のこと。

<文系総評>

例年通り，文系の問題としても歯ごたえのある問題が揃っている。

$\boxed{1}$

対数の計算に関する実際的な問題で理系と同一。文系でもこの程度は容易にこなしたい。難易度はＢ－。

$\boxed{2}$

移動経路の数に関する問題で，n 回目移動の経路数を $(n-1)$回目の移動の経路数との関係から求める問題。解答方針の着想が必要なだけに，文系には難しいと思われる。難易度はＡ－。

$\boxed{3}$

微分積分に関する問題で，接線や面積を求める。題意は簡明で計算も煩瑣ではないので，確実にこなしたい。難易度はＢ。

$\boxed{4}$

関数と図形に関わる問題で，2次方程式の解と係数の関係を上手に使う。難易度はＢ。

$\boxed{5}$

空間図形とベクトルに関わる問題で理系と同一問題。文系の問題としては難易度Ｂ＋。

250825