令和４年度（2022年度）共通テスト　数学Ⅰ・数学A　解説

数学　①　[数学Ⅰ　数学Ⅰ・数学A]　（いずれか選択　100点，70分）

数学Ⅰ・数学A　（注）この科目には，選択問題があります。（35ページ参照）

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

［１］

(1) アイ -6　ウエ 38

(2) オカ -2　キク 18　ケ 2

［２］

コ 0　サシス 072　セ 2

［３］

(1) ソ 2　タ 3　チツ 10　テ 3

(2) ト 4　ナ 6　ニヌ -1　ネ 3　ノ 7　ハ 3　ヒ 4

＜解説＞

［１］

実数 a，b，c が

$a+b+c=1$　①

および

$a^2+b^2+c^2=13$　②

を満たしているとする。

(1)

$(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$

したがって，$ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}(1-13)=-6=\boxed{アイ}$

よって，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

$=26+12=38=\boxed{ウエ}$

(2)

$a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。

$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，$x+y=b-a=-(a-b)=-2\sqrt{5}=\boxed{オカ}\sqrt{5}$

また，(1)の計算から

$x^2+y^2=(b-c)^2+(c-a)^2=38-(a-b)^2=38-(-2\sqrt{5})^2=18=\boxed{キク}$

これらより

$(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)xy=(a-b)\cdot\dfrac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}$

$$= 2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}\{(-2\sqrt{5})^2-18\} = 2\sqrt{5} = \boxed{ケ}\sqrt{5}$$

［2］

問題図１上のＡ点とＣ点の長さを x，山頂ＢとＣ点の長さをyとする。

AC，BC を実際の距離，$\frac{1}{m}$，$\frac{1}{n}$ は縮尺とすれば，$x=\frac{1}{m}AC$，$y=\frac{1}{n}BC$

水平，垂直方向ともに同じ縮尺すなわち，$m=n$ とすれば，Ａ点からＢ点を見上げる∠BAC は

$\tan\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{ny}{mx} = \frac{y}{x} = \tan\theta = \tan 16°$，となって∠BAC = 16° と推定される。

三角比の表から $\tan 16° = 0.2867$

しかし実際には m と n は異なり，$m = 100000$，$n = 25000$,

$$\tan\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{ny}{mx} = \frac{25000y}{100000x} = \frac{y}{4x} = \frac{1}{4}\cdot 0.2867 = 0.072 = \boxed{コ}\ .\ \boxed{サシス}$$

三角比の表から，$\tan 4° = 0.0699 < \tan\angle BAC = 0.072 < \tan 5° = 0.0875$，したがって，∠BACの大きさは 4°より大きく，5°より小さい（$\boxed{セ}$ ②）。

［3］

外接円の半径が3である△ABC を考える。点A から直線BC に引いいた垂線と直線BC との交点をDとする。

(1)

AB=5，AC=4 とする。このとき，△ABC の外接円の半径をRとすれば，

正弦定理により，$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2R$，$\sin\angle ABC=\frac{AC}{2R}=\frac{4}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}=\boxed{\frac{ソ}{タ}}$

$AD = AB\sin\angle ABC = 5\cdot\frac{2}{3} = \frac{10}{3} = \boxed{\frac{チツ}{テ}}$

(2)

２辺AB，AC の長さの間に 2AB+AC = 14 の関係があるとする。

AC=14−2AB，また AB，AC ≦ 6（＝外接円の直径）だから14−2AB ≦ 6，∴ 4 ≦ AB

したがって，このとき，ABの長さの取り得る値の範囲は，$\boxed{ト} = 4 \leqq AB \leqq 6 = \boxed{ナ}$

$$AD=AB\sin\angle ABC = AB\cdot\frac{AC}{6}=\frac{1}{6}AB(14-2AB) = \frac{-1}{3}AB^2+\frac{7}{3}AB$$

$$=\boxed{\frac{ニヌ}{ネ}}AB^2+\boxed{\frac{ノ}{ハ}}AB$$

$AB = x$ とおけば，$AD = \frac{-1}{3}x^2+\frac{7}{3}x = \frac{-1}{3}(x^2-7x) = \frac{-1}{3}\left\{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right\}$

$4 \leqq x \leqq 6$ だから，$x = 4$ のとき，AD は最大値 $4 = \boxed{ヒ}$

コメント：

［１］は数学Ⅰの整式の展開に関わる問題。(2)ではオカ，キクを計算して，ケを求める。したがって，ケの計算にオカ，キクを上手に活用する。

［２］は数学Ⅰの図形と計量における三角比の応用に関する問題。地図を見ながら，キャンプ場のA点から山頂のB点を眺める角度（仰角）を求めようと，太郎さんと花子さんが会話している。地図アプリ

が示したAとBを含む断面図（問題図１）から図上の距離ACとBCの比を調べ，$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}$から仰角を求めたところ16°となった。ところが，断面図の縮尺は水平方向$\dfrac{1}{100000}$，鉛直方向$\dfrac{1}{25000}$と異なっており，断面図の距離比をそのまま使って求めることは正しい結果を与えない。

問題文を読み込んで，まずは，このことに気づく必要がある。実際の距離は，図上の距離AC$=x$，BC$=y$を用いて，水平方向について$100000x$，垂直方向について$25000y$であることは容易にわかる。すると，A地点から山頂Bを見上げる実際の角度∠BACについて，

$$\tan\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{25000y}{100000x}=\frac{y}{4x}$$

この問題でもしかしたら，受験生に混乱を与えたかも知れないことを記載しておこう。∠BACは実際に地点Aから山頂 Bを見上げる角だが，図上に記載されているので，図上の∠BACと混同してしまう可能性がある。問題文中にもAC，BC などの記載があり，これは図上の距離を示していて，実際の距離AC，BCとは異なることを暗黙の了解としている。図上の点をP_A，P_B，P_Cなどと記載してあれば，混乱が少なかったであろう。このことを含めて，的確な理解と表現を求めている問題である。

この問題は，共通テストがめざす出題の方向性を示すもので，地図の縮尺の意味や実際の地形を地図と三角比から考えさせることにより，生活環境における数学的な思考力，判断力，表現力を問うために適切だと思う。ただ，上記に指摘したように，地図上の記号と実際の地点指示記号が同じため，短時間での処理に混乱した受験生がいたのではと懸念する。

［３］は数学Ⅰの図形と計量における三角形への応用に関する問題。紛れの少ない問題だから，正弦定理の活用に気づき，問題の流れに乗って，スムーズに解きたい。

第２問（必答問題）（配点 30）

＜解答＞

［１］

(1) ア 3　イ 2　　(2) ウ 5　エ 9　　(3) オ 6　カ 1　キ 3　ク 1

［２］

(1) ケ 2　コ 2　サ 0　シ 0　ス 3　セ 2　　(2) ソ 0　タチ 63　ツ 3

＜解説＞

［１］

p，qを実数とする。

花子さんと太郎さんは，次の２つの 2次方程式について考えている。

$x^2+px+q=0$　①

$x^2+qx+p=0$　②

① または② を満たす実数 x の個数を n とおく。

(1)

$p=4$，$q=-4$ のとき，① は$x^2+4x-4=0$，∴ $x=-2\pm2\sqrt{2}$

② は $x^2-4x+4=0$，∴ $x=2$，以上によって，$n=3=\boxed{ア}$

$p=1$，$q=-2$ のとき，① は $x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0$，∴ $x=1$，2

② は $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$，$\therefore\ x=1$，以上によって，$n=2=\boxed{\text{イ}}$

(2)

$p=-6$ のとき，$n=3$ になる場合を考える。

① は $x^2-6x+q=0$　①’

② は $x^2+qx-6=0$　②’

①’，②’をともに満たす実数xがあるとき，それをaとすれば，

①’から$a^2-6a+q=0$，②’から$a^2+qa-6=0$，a^2を消去して計算すると，$a=1$，$\therefore\ q=5$

$q=5$のとき，

①’は$x^2-6x+5=(x-5)(x-1)=0$，$x=5$，②’ は$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)=0$，となり確かに$n=3$

他に $n=3$ となるのは，①’，②’ のいずれかが実数の重解，他方がその重解とは異なる２つの実数解をもつ場合である。

2 次方程式が実数の重解をもつ場合，定数項は 0 以上の実数である。この条件を②’は満たさない。

①’の解の判別式 $D=0$ から $q=9$ で，①’ は$x^2-6x+9=(x-3)^2=0$となり，重解をもつ。

$q=9$ のとき，②’ は$x^2+9x-6=0$，解の判別式 $D=81+24=105>0$，ゆえに２つの実数解をもつ。加えて 3 は解ではない。

以上から $n=3$ となるのは，$q=5$，$9=\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ である。ただし$\boxed{\text{ウ}}<\boxed{\text{エ}}$とする。

(3)

$p=-6$ に固定したまま，q の値だけを変化させる。

$y=x^2-6x+q$　③

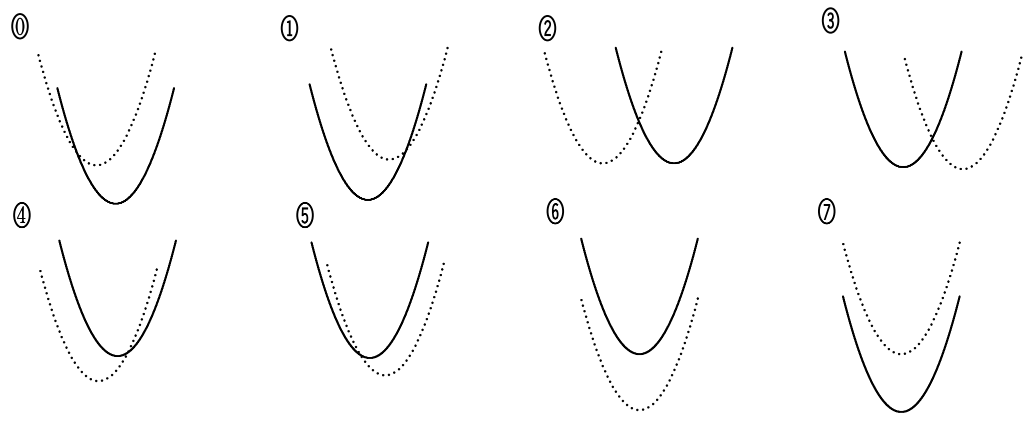
$y=x^2+qx-6$　④

③，④のグラフについて，$q=1$のときのグラフを点線で表し，q の値を1から増加させたときのグラフを実線で表す。

このとき，③のグラフはy 軸方向へ $(q-1)$ 移動していくから，その移動の様子は$\boxed{\text{オ}}$ ⑥ となる。

また④を変形すると，$y=x^2+qx-6=\left(x+\dfrac{q}{2}\right)^2-\dfrac{q^2}{4}-6$，$x$ 軸方向へ$-\dfrac{q-1}{2}$，y 軸方向へ

$\dfrac{1-q^2}{4}$ 移動するから，その移動の様子は$\boxed{\text{カ}}$ ① となる。



(4)

$\boxed{\text{ウ}}=5<q<9=\boxed{\text{エ}}$とする。全体集合$U$を実数全体の集合とし，$U$の部分集合$A$，$B$を

$A=\{x \mid x^2-6x+q<0\}$

$B=\{x \mid x^2+qx-6<0\}$

とする。U の部分集合 X に対し，X の補集合を $\overline{X}$ で表す。このとき，次のことが成り立つ。

・$x \in A$ は，$x \in B$ であるための $\boxed{キ}$ ③。

・$x \in B$ は，$x \in \overline{A}$ であるための $\boxed{ク}$ ①。

$A = \{\, x \mid 3-\sqrt{9-q} < x < 3+\sqrt{9-q} \,\}$，$q=5$ のとき，$\{\, x \mid 1 < x < 5 \,\}$

$B = \left\{\, x \mid \dfrac{-q-\sqrt{q^2+24}}{2} < x < \dfrac{-q+\sqrt{q^2+24}}{2} \,\right\}$，$q=5$ のとき，$\{\, x \mid -6 < x < 1 \,\}$

$q=5$ のとき，$A \cap B = \phi$

q が5から増大するにつれ，A の下限は増大し，B の上限は減少する。

したがって，$5<q<9$ において，$A \cap B = \phi$

したがって，$x \in A$ であることは $x \in B$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

また，$x \in B$ であれば $x \in \overline{A}$ である。しかし，$x \in \overline{A}$ であっても，$x \in B$ とは限らない

したがって，$x \in B$ は，$x \in \overline{A}$ であるための十分条件だが，必要条件ではない。

これらは，図１からも理解できる。$q=5$ で２つのグラフは $(1, 0)$ で交わり，集合 A と B は $x=1$ で分かれる。q の増加とともに，グラフは → のように移動するので，A と B は離れていく。

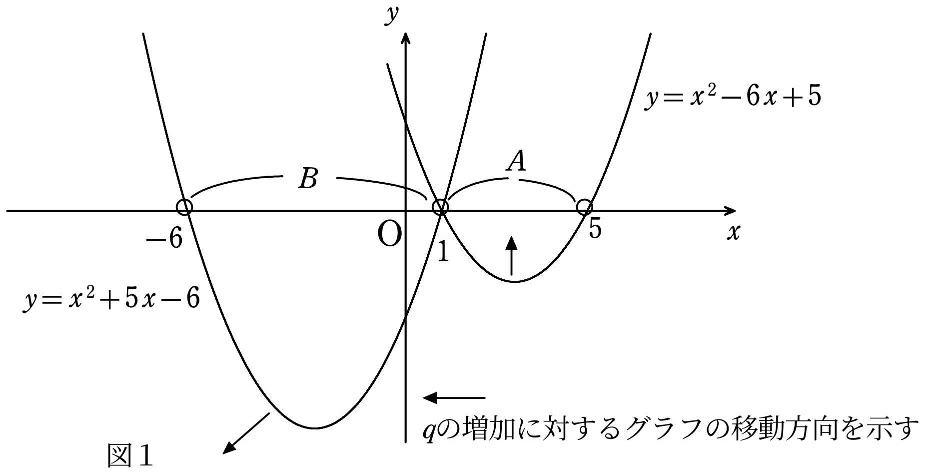


図１

$\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない

①　十分条件であるが，必要条件ではない

②　必要十分条件である

③　必要条件でも十分条件でもない

コメント：

共通テスト 数学ＩＡでの出題の方向性を示す問題である。太郎さんと花子さんの会話から，思考の流れを理解し，解答方針を案出していく。問題文が解答方針を示唆していることから，共通テストの問題としては，やや難しくなっているように思う。２つの2 次方程式の実数解が３個になる条件を速やかに考え出し，実行することはやや難しいと思う。

また，命題の論証の問題も2次関数の正負の領域に関わるもので，やや難しいものとなった。

[2] (1)

・2009年度と2018年度の中央値が含まれる階級の階級値を比較すると，$\boxed{ケ}$ ②

データ数29か国の中央値は下から15番目だから，両者とも階級値 30〜44の階級に含まれる。

・2009年度と2018年度の第１四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，$\boxed{コ}$ ②

第１四分位数は下から8番目だから，両者とも階級値15〜29の階級に含まれる。

・2009年度と2018年度の第３四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，$\boxed{サ}$ ⓪

第３四分位数は下から22番目だから，2009年度は階級値60〜74の階級，2018年度は45〜59の階級に含まれる。

・2009年度と2018年度の範囲を比較すると，$\boxed{シ}$ ⓪

2009年度の範囲は15〜179，2018年度の範囲は0〜134

・2009年度と2018年度の四分位範囲を比較すると，$\boxed{ス}$ ③

それぞれの第１四分位，第３四分位の値がわからないと四分位範囲はわからない。

$\boxed{ケ}$〜$\boxed{ス}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　2018年度の方が小さい

①　2018年度の方が大きい

②　両者は等しい

③　これら二つのヒストグラムからだけでは両者の大小を判断できない

(2)

2009年度について，「教育機関１機関あたりの学習者数」（横軸）と「教員１人あたりの学習者数」（縦軸）の散布図は$\boxed{セ}$ ②である。

散布図の〇印の数を縦軸に投影したものが，問題図４のヒストグラム，横軸に投影したものが問題図３の箱ひげ図に対応しているとして考察する。

横軸の最大値が約480なのに，①だけは420で不適切。第１四分位数は約85だが，③は50〜100にデータが5個しかなく，不適切（本来は8個以上）。縦軸は15以上30未満にデータ11個だが，⓪は10個で不適切。

(3)

S とT の相関係数は

（S とT の共分散）／（S の標準偏差×T の標準偏差）

$$=\frac{735.3}{39.3\times 29.9}=0.626 \fallingdotseq 0.63=\boxed{ソ}.\boxed{タチ}$$

(4)

表１と(3)で求めた相関係数を参考にすると，(3)で算出した2009年度のS（横軸）とT（縦軸）の散布図は$\boxed{ツ}$ ③である。

T の平均値は72.9 だが，⓪，①のグラフの示すTの平均値はもっと大きい。ゆえに⓪，①は不適切。②のS と T の相関は弱いので，相関係数が 0.63 に近いのは③。

コメント：

数学Ⅰのデータの分析に関する問題は，例年のように精細にグラフを理解しなければならない。細かくグラフをチェックしなければならないので，短時間の共通テストに適切な問題か，疑問を感じる。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点 20）

＜解答＞

(1) ア 1　イ 1　ウ 2　エ 2　オ 1　カ 3　キク 65　ケコ 81　　(2) サ 8　シ 6　スセ 15　ソ 3　タ 8

(3) チツ 11　テト 30　　(4) ナニ 44　ヌネ 53

＜解説＞

複数人がそれぞれプレゼントを一つずつ持ち寄り，交換会を開く。ただし，プレゼントはすべて異なるとする。プレゼントの交換は次の手順で行う。

手順：

外見が同じ袋を人数分用意し，各袋にプレゼントを一つずつ入れたうえで，各参加者に袋を一 つずつでたらめに配る。各参加者は配られた袋の中のプレゼントを受け取る。

交換の結果，1人でも自分の持参したプレゼントを受け取った場合は，交換をやり直す。そして，全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったところで交換会を終了する。

(1)

2 人または 3 人で交換会を開く場合を考える。

（i） 2 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は，互いのプレゼントを交換するだけだから，$\boxed{\text{ア}}$ 1 通りある。

互いのプレゼンントを交換する場合と自分のプレゼントを受け取る場合の 2 通りあるから，

1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\boxed{\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}} = \dfrac{1}{2}$

（ii） 3 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は，1 人が他の 2 人のプレゼントのいずれかを取る場合で2 通りある。したがって，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は $\boxed{\text{エ}}$2 通りである。

3人でプレゼントを交換するとき，自分のプレゼントを受け取る場合も含めて，受け取り方の場合の数は 3!である。

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\boxed{\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}} = \dfrac{2}{3!} = \dfrac{1}{3}$

（iii） 3 人で交換会を開く場合，4 回以下の交換で交換会が終了する確率は $\boxed{\dfrac{\text{キク}}{\text{ケコ}}} = \dfrac{65}{81}$ である。

1 回の交換で交換が終わる確率は $\dfrac{1}{3}$，やり直す確率は $\dfrac{2}{3}$ だから，n 回めの交換で終わる確率は

$p_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\dfrac{1}{3}$，したがって4 回以下の交換で交換会が終了する確率

$$P_{3,4}=\sum_{n=1}^{4} p_n=\sum_{n=1}^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^4}{1-\frac{2}{3}}=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$$

(2)

4 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率を次の構想に基づいて求めてみよう。

構想：
1 回目の交換で交換会が終了しないプレゼントの受け取り方の総数を求める。そのために，自分の持参したプレゼントを受け取る人数によって場合分けをする。

1 回目の交換で，4 人のうち，ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合は $\boxed{サ}=2\times4=8$ 通りある。これは，自分のプレゼントを受け取る1人を除いた3人で交換会を行う場合と同じだから，3 人が別々のプレゼントを受け取る場合の数（2 通り）を自分のプレゼントを受け取る人を選ぶ場合の数（4 通り）倍した 8 通りとなる。

ちょうど 2 人が自分のプレゼントを受け取る場合は $\boxed{シ}=1\times6=6$ 通りある。これは，残る 2 人が交換会を行う場合と同じだから，2 人が別々のプレゼントを受け取る場合の数（1通り）を同じプレゼントを受け取る2 人を選ぶ場合の数 （${}_4C_2=6$ 通り）倍したものである。

このように考えていくと，1 回目のプレゼントの受け取り方のうち，1 回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は $\boxed{スセ}=15$ 通りである。自分のプレゼントを受け取る場合も含めて，プレゼントを交換して受け取る場合の数は $4!=24$ 通り。3人が自分のプレゼントを受け取る場合の数は1 通りだから，1回目の交換会で自分のプレゼントを受け取り，交換会が終了しない受け取り方の総数は$8+6+1=15$ 通り。

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する場合の数は $24-15=9$ 通りで，

その確率は $\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$ である。

(3)

5 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テト}}=\dfrac{11}{30}$ である。

5人で交換をする場合の数は $5!=120$ 通り。1 回で交換が終了しない場合の数を求める。
ちょうど1 人が自分のプレゼントを受け取り，残る4 人で交換が成立する場合の数 ${}_5C_1\times9=45$ 通り
ちょうど2 人が自分のプレゼントを受け取り，残る3 人で交換が成立する場合の数 ${}_5C_2\times2=20$通り
ちょうど3 人が自分のプレゼントを受け取り，残る2人で交換が成立する場合の数 ${}_5C_3\times1=10$通り
ちょうど4 人が自分のプレゼントを受け取る場合の数 1 通り
したがって，1 回で交換が終了しない場合はこれらの和事象であり，かつこれらは排反事象だから，合算して76 通り。

したがって，1 回で交換が終了する場合の数 $120-76=44$ 通り，その確率は $P_{5,1}=\dfrac{44}{120}=\dfrac{11}{30}$

(4)

A，B，C，D，E の 5 人が交換会を開く。1 回目の交換でA，B，C，D がそれぞれ自分以外

の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，その回で交換会が終了する条件付き確率は $\boxed{\dfrac{ナニ}{ヌネ}}$

A，B，C，D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る場合は以下の a) と b)

a) E が自分のプレゼントを受け取る場合（場合の数は1通り）

A，B，C，D が自分以外のプレゼントを受け取る場合の数は9通りだから，1×9 通り

したがって，その確率は $\dfrac{9}{120}=\dfrac{3}{40}$

b) E が自分のプレゼントを受け取らない場合

1 回の交換で交換会が終了する場合だから，その確率は (4) で求めた $P_{5,1}=\dfrac{11}{30}$

A，B，C，D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る場合は，a) とb) の和事象で，両者は排反事象だから，

A，B，C，D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る確率 P_E は

$$P_E=\frac{3}{40}+\frac{11}{30}=\frac{53}{120}$$

したがって，

A，B，C，D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，

1 回目で交換会が終了する条件付き確率 $=\dfrac{P_{5,1}}{P_E}=\dfrac{11}{30}\div\dfrac{53}{120}=\dfrac{44}{53}=\boxed{\dfrac{ナニ}{ヌネ}}$

コメント：

場合の数と確率の問題を，プレゼント交換という身近な事象について，提示された過程や構想にしたがって，解いていく。問題は誘導的に構成されているので，前問を的確に解答しつつ，それをヒントとして後問を解いていく。

(1) (ⅰ) (ⅱ) は容易だから，速やかに解きたい。(ⅲ)では，毎回のプレゼント交換は同じことだから，各回で終了する確率，やり直す確率は同じであることに注意する。

(2)では確率を求める構想が提示され，それに沿って，(1)の解答も利用しながら，4人，5人の場合と解いていく。

(4) は条件付き確率の問題で，A，B，C，D の 4 人がそれぞれ別のプレゼントを受け取ったとした場合，Eを含む全員が別々のプレゼントを受け取る確率を求める問題である。この条件付き確率の意味の理解と解答方針の着想がなかなか難しいように感じた。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) ア 1　イウ 39　エオ 17　カキク 664　(2) ケ 8　コ 5　(3) サシス 125　セソタチツ 12207

(4) テト 19　ナニヌネノ 95624

＜解説＞

(1)

$5^4=625$ を2^4で割ったときの余りは 1 に等しい。このことを用いると，

不定方程式

$$5^4x-2^4y=1 \quad ①$$

の整数解のうち，xが正の整数で最小になるのは $x=\boxed{ア}=1$，$y=\boxed{イウ}=39$

なぜなら，

$5^4=2^4\cdot39+1$，$\therefore 5^4\cdot1-2^4\cdot39=1$　①'，したがって$x=1=\boxed{ア}$，$y=39=\boxed{イウ}$ は① の整数解の 1 つで，$x=1$ は最小の正の整数である。

①−①'から，$5^4(x-1)-2^4(y-39)=0$，$\therefore 5^4(x-1)=2^4(y-39)$，

5^4と2^4は互いに素だから，整数kにより，$x-1=2^4k$，$y-39=5^4k$ とおくことができる。

$x=16k+1$，したがって①の整数解のうち，xが2 桁の正の整数で最小になるのは，$k=1$のときで，

$$x=\boxed{エオ}=17,\ y=5^4+39=\boxed{カキク}=664$$

(2)

次に，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りについて考えてみよう。

まず，$625^2=(5^4)^2=5^8=5^{ケ}$ であり，また，$m=\boxed{イウ}=39$ とすると

$625^2=(2^4\cdot39+1)^2=2^8(39)^2+2\cdot2^4\cdot39+1=2^8(39)^2+2^5\cdot39+1=2^{ケ}m^2+2^{コ}m+1$

これらより，625^2 を5^5 で割ったときの余りが0と，2^5 で割ったときの余りが1とわかる。

(3)

(2)の考察は，不定方程式

$$5^5x-2^5y=1 \quad ②$$

の整数解を調べるために利用できる。x，yを② の整数解とする。5^5x は5^5 の倍数であり，2^5 で割ったときの余りは1 となる。よって，(2) により5^5x-625^2 は5^5 でも2^5 でも割り切れる。5^5 と2^5 は互いに素なので，5^5x-625^2 は $5^5\cdot2^5$ の倍数である。

したがって，k を整数として，$5^5x-625^2=5^5\cdot2^5k$ とおけるから，

$5^5x-5^8=5^5\cdot2^5k$，$x=2^5k+5^3=32k+125$

したがって②の整数解のうち，x が 3 桁の正の整数で最小になるのは，$k=0$，$x=125=\boxed{サシス}$

このとき，②から$2^5y=5^8-1=2^8(39)^2+2^5\cdot39$，

$\therefore y=2^3(39)^2+39=12207=\boxed{セソタチツ}$

(4)

11^4 を2^4 で割ったときの余りは1 に等しい。すなわち，$11^4=2^4\cdot915+1$　③

不定方程式

$$11^5x-2^5y=1 \quad ④$$

の整数解について考える。

④を変形して，$11^4\cdot11x-2^4\cdot2y=1$　④'

また ③ から，$11^4\cdot1-2^4\cdot915=1$　⑤

④'−⑤から，$11^4(11x-1)-2^4(2y-915)=0$，$\therefore 11^4(11x-1)=2^4(2y-915)$

11^4 と 2^4 は互いに素だから，j を整数として $11x-1=2^4j=16j$，$2y-915=11^4j$

$\therefore\ 11x-16j=1$　⑥，$2y=11^4j+915$　⑦

⑦から j は奇数，⑥を満たす最小の奇数 j を求める。

暗算により，$x=3$，$j=2$ は⑥ の整数解の１つ。すると，$11\cdot3-16\cdot2=1$　⑧

⑥－⑧から，$11(x-3)=16(j-2)$，11と16 は互いに素だから，n を整数として，

$x-3=16n$，$j-2=11n$，$n=1$のとき$j=13$と奇数で，$x=19=$ $\boxed{テト}$ が正の整数で最小である。

⑦から，$y=\dfrac{1}{2}(11^4\cdot13+915)=95624=$ $\boxed{ナニヌネノ}$

コメント：

不定方程式の問題である。不定方程式は整数分野のテーマの１つで，数学的着眼着想，思考力，応用力などが問われるので，頻出の試験問題である。

(1)では「$5^4=625$ を2^4 で割ったときの余りは１に等しい」から，「$5^4=2^4\cdot39+1$」と表現し，「$x=1$，$y=39$」が「不定方程式 $5^4x-2^4y=1$　①」の解の１つであることに気づきたい。

(4)でも同様に，「11^4 を2^4 で割ったときの余りは1 に等しい」から，「$11^4=2^4\cdot915+1$」と表現し，「$11^5x-2^5y=1$　④」を「$11^4\cdot11x-2^4\cdot2y=1$」と表現し，$11x$と$2y$ が「不定方程式 $11^4X-2^4Y=1$」の解の１つであることに気づきたい。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第５問（選択問題）（配点　20）

<解答>

(1) ア１　イ２　ウ２　エ１　オ３　カ２　キ２　ク３　ケ４

(2) コ３　サ２　シス13　セ６　ソタ13　チ４　ツテ44　トナ15　ニ１　ヌ３

<解説>

△ABC の重心をG とし，線分AG 上で点Aとは異なる位置に点Dをとる。直線AG と辺 BCの交点をEとする。また，直線BC 上で辺 BC上にはない位置に点 Fをとる。直線 DFと辺AB の交点をP，直線DFと辺 ACの交点をQ とする。

(1)

点Dは線分AGの中点であるとする。図１を参照して考える。

Gは△ABC の重心だからAG=2GE，$\therefore$ AD=DG=GE，$\therefore\ \dfrac{AD}{DE}=\dfrac{ア}{イ}=\dfrac{1}{2}$

また，点Fの位置に関係なく，△ABEを直線DFが切ったとして，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{BP}{AP}\cdot\frac{AD}{ED}\cdot\frac{EF}{BF}=\frac{BP}{AP}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{EF}{BF}=1,\quad\therefore\ \frac{BP}{AP}=2\times\frac{BF}{EF}=\boxed{ウ}\times\boxed{\frac{エ}{オ}}=2\times\frac{①}{③}$$

△ACEを直線QFが切ったとして，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AD}{ED}\cdot\frac{EF}{CF}=\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{EF}{CF}=1,\quad\therefore\ \frac{CQ}{AQ}=2\times\frac{CF}{EF}=\boxed{カ}\times\boxed{\frac{キ}{ク}}=2\times\frac{②}{③}$$

となるので，つねに

$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=2\times\frac{BF+CF}{EF}=2\times\frac{BF+BF+BC}{BF+BE}=2\times\frac{2\cdot BF+2\cdot BE}{BF+BE}=4=\boxed{ケ}$　となる。

$\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$, $\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ BC　① BF　② CF　③ EF　④ FP　⑤ FQ　⑥ PQ

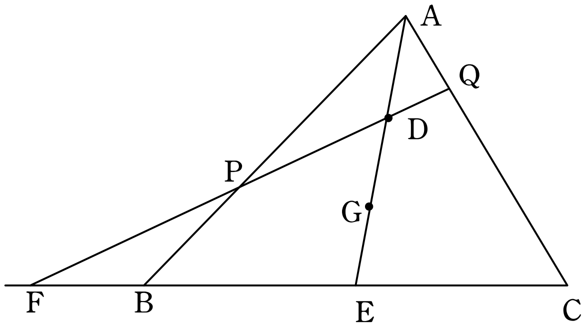


図1

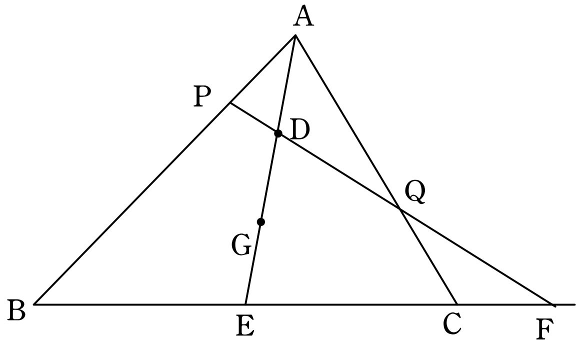


図2

(2)

AB＝9，BC＝8，AC＝6とし，(1)と同様に，点Dは 線分AGの中点とする。ここで，4 点B，C，Q，P が同一円周上にあるように点F をとる。

ほうべきの定理により AP・AB＝AQ・AC，∴ $AQ=\frac{AB}{AC}\cdot AP=\frac{9}{6}AP=\frac{3}{2}AP=\boxed{\frac{コ}{サ}}AP$

$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=\frac{AB-AP}{AP}+\frac{AC-AQ}{AQ}=\frac{9}{AP}-1+\frac{6}{AQ}-1$

$=\frac{9}{AP}+\frac{4}{AP}-2=\frac{13}{AP}-2=4$,

∴ $AP=\frac{13}{6}=\boxed{\frac{シス}{セ}}$，$AQ=\frac{3}{2}AP=\frac{13}{4}=\boxed{\frac{ソタ}{チ}}$

$BP=AB-AP=9-\frac{13}{6}=\frac{41}{6}$

図１において，(1)の結果を用いて，

$\frac{BP}{AP}=2\times\frac{BF}{EF}=2\times\frac{BF}{BE+BF}=2\times\frac{BF}{4+BF}=(41/6)/(13/6)=\frac{41}{13}$，∴ $BF=-\frac{164}{15}$

BF＜0ということは，図２のようにFがC側にあることだから，

$CF=|BF|-BC=\frac{164}{15}-8=\frac{44}{15}=\boxed{\frac{ツテ}{トナ}}$

図２において，EF＝EC＋CF＝4＋CF，BF＝BC＋CF＝8＋CFだから，

$\frac{41}{13}=2\times\frac{8+CF}{4+CF}$，∴ 15CF＝44，$CF=\frac{44}{15}=\boxed{\frac{ツテ}{トナ}}$

同じ値が得られる。本問の図としては，図２の方が結果として適切であることがわかった。

(3)

△ABCの形状や点Fの位置に関係なく，つねに $\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=10$となるのは，(1)の考察から，

$\frac{BP}{AP}=\frac{ED}{AD}\cdot\frac{BF}{EF}$，$\frac{CQ}{AQ}=\frac{ED}{AD}\cdot\frac{CF}{EF}$

$$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=\frac{ED}{AD}\cdot\frac{BF+CF}{EF}=\frac{ED}{AD}\cdot 2=10,\ \therefore \frac{ED}{AD}=5$$

すると，AE = AD+ED = AD+5AD = 6AD = 3EG,

$$\therefore \mathrm{EG}=2\mathrm{AD},\ \mathrm{AD}+\mathrm{DG}=2\mathrm{EG}=4\mathrm{AD},\ \therefore \mathrm{DG}=3\mathrm{AD},\ \therefore \frac{AD}{DG}=\frac{1}{3}=\boxed{\frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}}$$

コメント：

数学Aの「図形の性質」分野の問題。メネラウスの定理，ほうべきの定理などを活用する。重心に関する性質も理解していなければならない。

<総評>

センター試験から大学入学共通テストへ変更となった２年目である。知識，技能の修得に加え，思考力，判断力，表現力を高める高校教育をめざすということで，共通テストもそのような学力を問うものへと変わることは予め周知されている。今年の数学1Aの共通テストではそのような傾向がさらに強まったように思う。

このような傾向を示す第１問 [2] の地図は，三角比の問題の素材としては恰好であろう。地図アプリは非常に有用になっているから，いろいろな問題のバリエーションがありそうだ。

２次関数・２次方程式に関する第２問［１］は，太郎さんと花子さんの会話によって解法の一つを提示しておきながら，この解法とは直接関係のない別の解法を着想させ，別の解を求めさせるという手のこんだ問題となっていてる。

第３，第４，第５の選択問題も解答方針の着眼・着想が必要であるうえ，思考過程や計算にも時間を要する問題のように思う。

以上のことから，全体として70分という時間制限では，なかなか難しい問題であるように感じた。

220226