

2022 (R4) 年度 新潟大学 前期 入学試験 数学解説

<理, 医, 歯, 工学部>

(全5問で120分, 4問の場合90分)

□ 座標平面の原点を O とし, 2点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{3}{4}\right)$ をとり, 単位円周上に点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$

をとる。ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 $OAPB$ の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{15}$ のとき, S の最大値と最小値を求めよ。

<解答>

(1)

三角関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(2)

$$\text{図1から, } S = \triangle OAP + \triangle OBP = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cos \theta = \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{3}{8} \cos \theta \quad (\text{答})$$

(3)

S を $S(\theta)$ とすれば,

$$S'(\theta) = \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{4} \cos \theta - \frac{3}{8} \sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{8} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \cos \theta - \frac{3}{\sqrt{13}} \sin \theta \right) = -\frac{\sqrt{13}}{8} \sin(\theta - \alpha)$$

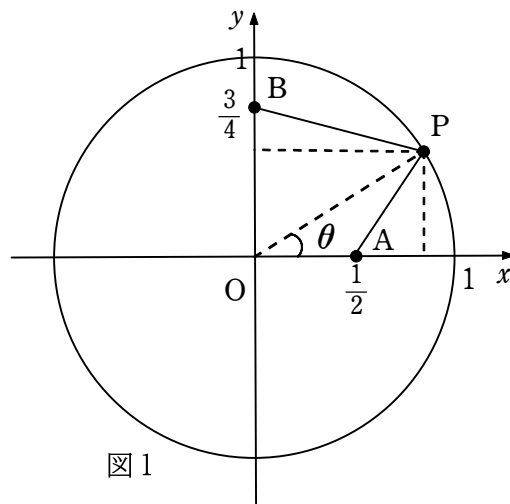


図1

ただし, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\therefore \tan \alpha = \frac{2}{3}$

$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{4}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}$, $\tan \frac{5\pi}{12} = \frac{4}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}$,

したがって $\tan \frac{\pi}{12} < \tan \alpha < \tan \frac{5\pi}{12}$, したがって $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{5\pi}{12}$

S は図 2 のような変化をする。

θ	$\frac{\pi}{12}$		α		$\frac{5\pi}{12}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$					

図 2

$S\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{12} + \frac{3}{8} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{16} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{3}{32} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \frac{1}{32} (5\sqrt{6} + \sqrt{2})$

$S(\alpha) = \frac{1}{4} \sin \alpha + \frac{3}{8} \cos \alpha = \frac{2}{4\sqrt{13}} + \frac{9}{8\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{8}$

$S\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi}{12} + \frac{3}{8} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{16} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \frac{3}{32} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \frac{1}{32} (5\sqrt{6} - \sqrt{2})$

以上の結果, S の最大値は $\frac{\sqrt{13}}{8}$, 最小値は $\frac{1}{32} (5\sqrt{6} - \sqrt{2})$ (答)

<解説>

(1)

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ のように, 目的の角度を関数値が知られた角度の和差に変換して, 三角関数の加法定理を活用する。

(2)

図 1 のような図を描いて, $S = \triangle OAP + \triangle OBP$ と考えれば速い。

(3)

$\tan \alpha$ は α の単調増加関数であることに注意。

2 座標空間の原点を O とし, 3点 $A(2, 2, -2)$, $B(2, -2, 2)$, $C(-2, 2, 2)$ をとる。線分 AB を 3:1 に内分する点を D , 線分 AC を 3:1 に外分する点を E とするとき, 次の問いに答よ。

(1) 2点 D , E の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 F を直線 DE 上の点とし, $\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角 θ が $\cos \theta = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ を満たすとき, 点 F の座標を求めよ。

<解答>

(1)

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{4} \overrightarrow{OB} = \frac{1}{4} (2, 2, -2) + \frac{3}{4} (2, -2, 2) = (2, -1, 1) \quad (\text{答})$$

$$\overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2} (2, 2, -2) + \frac{3}{2} (-2, 2, 2) = (-4, 2, 4) \quad (\text{答})$$

(2)

$$\overrightarrow{BC} = (-4, 4, 0)$$

$$\overrightarrow{OF} = t \overrightarrow{OD} + (1-t) \overrightarrow{OE} = t(2, -1, 1) + (1-t)(-4, 2, 4) = (6t-4, 2-3t, 4-3t)$$

$$\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{BC} = -36t + 24$$

$$|\overrightarrow{OF}| = \sqrt{6(9t^2 - 14t + 6)}, \quad |\overrightarrow{BC}| = 4\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OF}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-9t + 6}{2\sqrt{3(9t^2 - 14t + 6)}} = \frac{3\sqrt{7}}{14} \quad \textcircled{1}$$

$$-9t + 6 \geq 0, \quad t \leq \frac{2}{3} \text{ を考慮し, } \textcircled{1} \text{ を計算して } t = \frac{1}{3}$$

したがって, $F(-2, 1, 3)$ (答)

<解説>

(1)

空間ベクトルにより取り扱う。

直線の内分, 外分の公式によれば,

$$D\left(\frac{3 \cdot 2 + 1 \cdot 2}{3+1}, \frac{3(-2) + 1 \cdot 2}{3+1}, \frac{3 \cdot 2 + 1(-2)}{3+1}\right) = D(2, -1, 1)$$

$$E\left(\frac{-2 + 3(-2)}{3-1}, \frac{-2 + 3 \cdot 2}{3-1}, \frac{2 + 3 \cdot 2}{3-1}\right) = E(-4, 2, 4)$$

しかし, この公式は忘れやすいので, ベクトルによって扱う方が良いだろう。

(2)

ベクトルのなす角の公式 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OF}| |\overrightarrow{BC}|}$ は理解しておくこと。

[3] 式 A, B, C を次のように定める。

$$A = y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5$$

$$B = y^2 + x^2y - 5xy + 4y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5$$

$$C = y + x - 1$$

次の問いに答よ。

(1) 式 A, B, C を y の整式とみて, A, B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。

(2) 不等式 $\log A > \log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。

<解答>

(1)

$$\begin{aligned}\frac{A}{C} &= \frac{y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5}{y + x - 1} \\ &= \frac{(y + x - 1)\{y - (3x^2 - 10x - 5)\}}{y + x - 1} = y - (3x^2 - 10x - 5) \quad (\text{答}) \\ \frac{B}{C} &= \frac{y^2 + x^2y - 5xy + 4y + x^3 - 7x^2 + 11x - 5}{y + x - 1} = \\ &= \frac{y^2 + (x^2 - 5x + 4)y + (x - 1)(x^2 - 6x + 5)}{y + x - 1} = \frac{\{y + (x - 1)\}\{y + (x^2 - 6x + 5)\}}{y + x - 1} \\ &= y + (x^2 - 6x + 5) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2)

対数関数の真数の条件より, $A > 0, B < 0$

対数関数 $\log x$ は $x > 0$ で単調増加関数だから,

$$\log A > \log(-B) \Leftrightarrow \{A > -B, A > 0, B < 0\} \Leftrightarrow \{A + B > 0, A > 0, B < 0\}$$

したがって,

$$A + B = \{y + (x - 1)\}\{2y - (2x^2 - 4x - 10)\} > 0 \quad \textcircled{1}$$

$$A = \{y + (x - 1)\}\{y - (3x^2 - 10x - 5)\} > 0 \quad \textcircled{2}$$

$$B = \{y + (x - 1)\}\{y + (x^2 - 6x + 5)\} < 0 \quad \textcircled{3}$$

i) $y + x - 1 > 0$ のとき

$$\textcircled{1} \text{ より, } y > x^2 - 2x - 5$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } y > 3x^2 - 10x - 5$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } y < -x^2 + 6x - 5$$

ii) $y + x - 1 < 0$ のとき

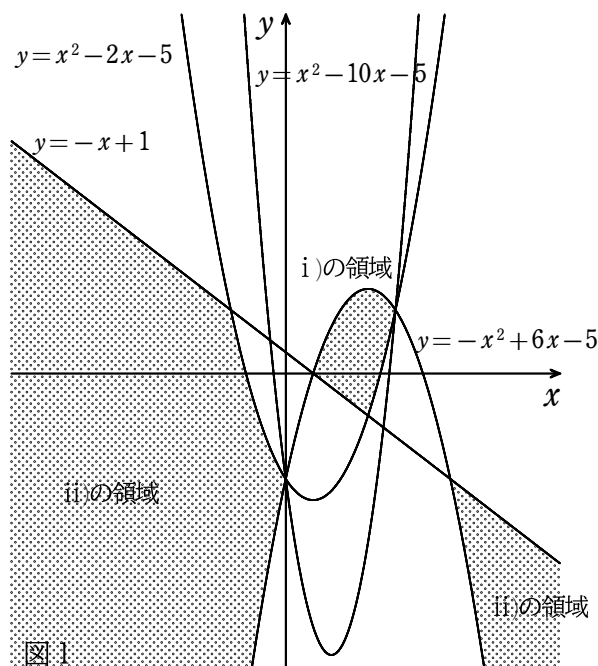
$$\textcircled{1} \text{ より, } y < x^2 - 2x - 5$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } y < 3x^2 - 10x - 5$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } y > -x^2 + 6x - 5$$

図1に i), ii)により定まる領域を示す。

ただし, 境界線は含まない。



<解説>

(1)

まずは整式 A の因数分解を試みる。

$$\begin{aligned}A &= y^2 - 3x^2y + 11xy + 4y - 3x^3 + 13x^2 - 5x - 5 \\ &= y^2 - (3x^2 - 11x - 4)y - (x - 1)(3x^2 - 10x - 5)\end{aligned}$$

$$= \{y + (x-1)\} \{y - (3x^2 - 10x - 5)\}$$

同様に、Bについても因数分解できる。

(2)

真数の条件を忘れないこと。対数関数が単調増加関数であることを使うこと。

〔4〕 曲線 C を $y = x^2 e^x$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) $\int x e^x dx$, $\int x^2 e^x dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) 点 $(t, 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど 2 本存在するような t の値をすべて求めよ。

(4) (3) で求めた t のうち $-1 < t < 0$ を満たすものを T とする。点 $(T, 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

<解答>

(1)

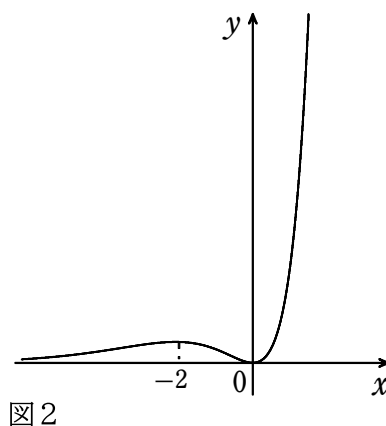
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 e^x) = \infty$$

$$y' = 2x e^x + x^2 e^x = x e^x (x + 2)$$

y は図 1 のような変化をするので、図 2 のような概形となる。

図 1

x		-2		0	
y'	+	0	-	0	
y		$\frac{4}{e^2}$		0	



(2)

$$(x e^x)' = e^x + x e^x, \text{ したがって, } \int x e^x dx = \int \{(x e^x)' - e^x\} dx = (x-1) e^x + C_1 \quad (\text{答})$$

$$(x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x, \text{ したがって,}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \int \{(x^2 e^x)' - 2x e^x\} dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x + C_2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

ただし、 C_1 , C_2 は積分定数

(3)

接点を $(p, p^2 e^p)$ とすれば、接線の傾きは $p(2+p) e^p$ だから、接線の方程式は

$$y = p(2+p) e^p (x - p) + p^2 e^p \quad \text{①}$$

$$\text{点 } (t, 0) \text{ を通るから, } p\{p^2 + p(1-t) - 2t\} = 0 \quad \text{②}$$

$$\text{したがって, } p=0, \quad p^2 + p(1-t) - 2t = 0 \quad \text{③}$$

$p=0$ は t の値に関わらず ② の実数解の 1 つ。

$t=0$ のとき、③ は $p=0, -1$ となって、接点は 2 つで接線は 2 本。

$t \neq 0$ のとき、 $p=0$ は 1 つの実数解だから、③ の実数解が 1 つ、すなわち重解をもつ。

$$\text{解の判別式 } D = (1-t)^2 + 8t = t^2 + 6t + 1 = (t+3)^2 - 8 = 0$$

$$\therefore t = -3 - 2\sqrt{2} \text{ または } -3 + 2\sqrt{2}$$

以上により、点 $(t, 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど 2 本存在するような t の値は

$$t = -3 \pm 2\sqrt{2}, 0 \quad (\text{答})$$

(4)

$$(3) \text{ で求めた } t \text{ で } -1 < t < 0 \text{ を満たすものは } T = -3 + 2\sqrt{2}$$

接線の 1 つは $p = 0$ だから、 $y = 0$

$$t = -3 + 2\sqrt{2} \text{ のとき、②は } \{p + (2 - \sqrt{2})\}^2 = 0$$

$$\therefore p = \sqrt{2} - 2$$

$$\text{したがって接線は } y = p(2+p)e^p(x-T) = \sqrt{2}(\sqrt{2}-2)e^{\sqrt{2}-2}(x+3-2\sqrt{2})$$

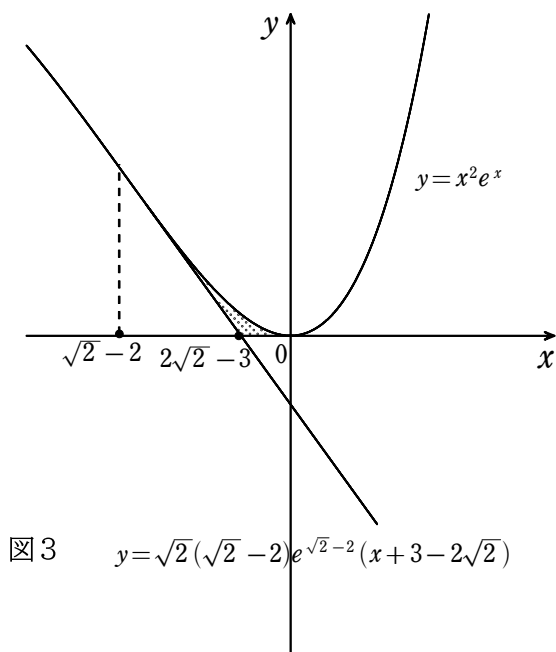
$$\text{求める面積は図3の打点部で、} S = \int_p^T \{x^2 e^x - p(2+p)e^p(x-T)\} dx + \int_T^0 x^2 e^x dx$$

$$S = \left[e^x(x^2 - 2x + 2) \right]_p^T - \frac{1}{2} p(2+p)e^p \left[(x-T)^2 \right]_p^T + \left[e^x(x^2 - 2x + 2) \right]_T^0$$

$$= -e^p(p^2 - 2p + 2) + \frac{1}{2} p(2+p)e^p(p-T)^2 + 2$$

$$= \{(\sqrt{2}-3)^2 + 1 + (1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-2+3-2\sqrt{2})^2\} e^{\sqrt{2}-2} + 2$$

$$= 2 - (5-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-2} \quad (\text{答})$$



<解説>

(3)

$y = 0$ が接線の 1 つであることに注意する。

(4)

非常に微小な領域の求積である。(2)を正答することが必要である。

5 複素数 z に対して、その共役複素数を $\bar{z}$ とし、 i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}$$

ただし、 α は複素数とする。

(2) 以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\bar{z} + (1-i+\bar{\beta})z + (1+i+\beta)\bar{z} = \beta$$

(3) $|\beta| \leq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき、 $|z|$ の最大値を求めよ。また、そのときの β , z を求めよ。

$$z\bar{z} + (1-i+\bar{\beta})z + (1+i+\beta)\bar{z} = \beta$$

<解答>

(1)

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} = z(\bar{z} + \bar{\alpha}) + \alpha(\bar{z} + \bar{\alpha}) = (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) \quad (\text{答})$$

(2)

$z = a+bi$, $\beta = a_\beta + b_\beta i$, とおいて考える。ただし a, b, a_β, b_β は実数

$$z\bar{z} + (1-i+\bar{\beta})z + (1+i+\beta)\bar{z} = z\bar{z} + (1-i)z + (1+i)\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z}$$

$$= z\bar{z} + (1-i)z + \overline{(1-i)z} + \bar{\beta}z + \overline{\bar{\beta}z} = a^2 + b^2 + 2(a+b) + 2(aa_\beta + bb_\beta) = \beta = a_\beta + b_\beta i$$
したがって、 $b_\beta = 0$ となり、 β は $\beta = a_\beta$ の実数。

$$a_\beta = a^2 + b^2 + 2(a+b) + 2(aa_\beta + bb_\beta) = a^2 + b^2 + 2(a+b) + 2aa_\beta$$

$$a^2 + 2(1+a_\beta)a + b^2 + 2b - a_\beta = 0 \quad \text{①}$$

a, b が実数値をもつためには、①を a の2次方程式として実数解をもつこと。

$$\text{解の判別式 } D = (1+a_\beta)^2 - (b^2 + 2b - a_\beta) \geq 0, \quad \therefore (a_\beta + 1)(a_\beta + 2) \geq (b+1)^2 \quad \text{②}$$

②において実数 b が存在するためには、 $(a_\beta + 1)(a_\beta + 2) \geq 0$,

$$\therefore \beta = a_\beta \leq -2, \beta = a_\beta \geq -1 \quad \text{③}$$

したがって複素数 β は x 軸の $x \leq -2, x \geq -1$ の範囲で、図1の太線。

(3)

$$|z| = \sqrt{|z|^2} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\beta| \leq 2 \text{ より } -2 \leq \beta \leq 2, \text{ ③より } -1 \leq \beta \leq 2 \quad \text{④}$$

$$\text{①より, } a^2 + 2a + b^2 + 2b = (1-2a)a_\beta = (1-2a)\beta$$

$$a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき, ④より } -(1-2a) \leq (1-2a)\beta \leq 2(1-2a),$$

$$\text{したがって } -(1-2a) \leq a^2 + 2a + b^2 + 2b \leq 2(1-2a), \therefore (a+3)^2 + (b+1)^2 \leq 12 \quad \text{⑤}$$

$$a > \frac{1}{2} \text{ のとき, ④より } -(1-2a) \geq (1-2a)\beta \geq 2(1-2a),$$

$$\text{したがって } -(1-2a) \geq a^2 + 2a + b^2 + 2b \geq 2(1-2a)$$

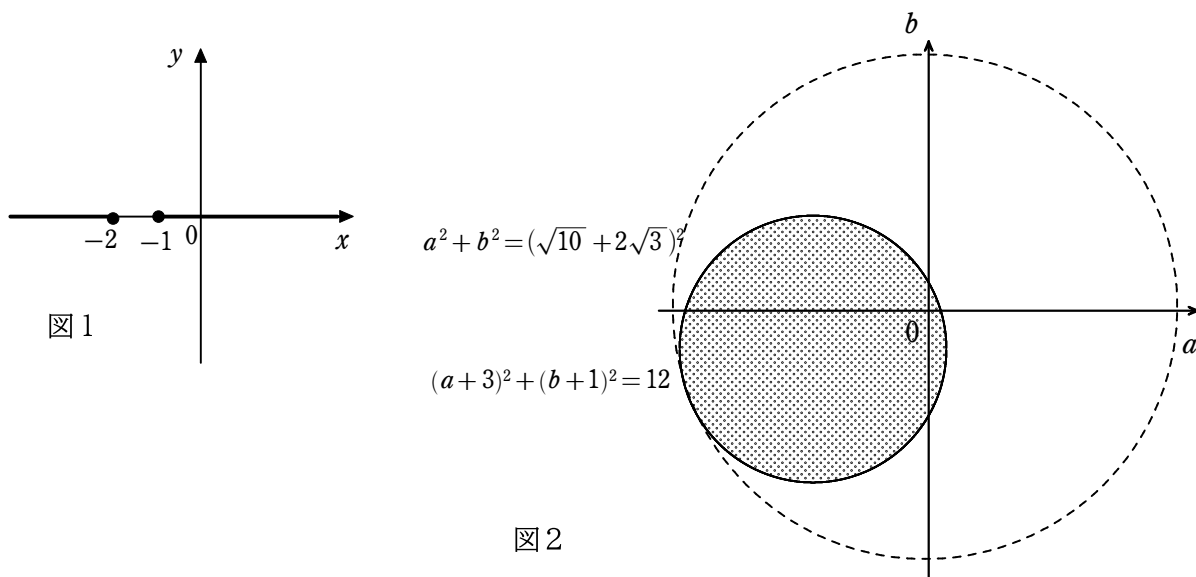
$$\therefore 0 \geq a^2 + b^2 + 2b + 1 = a^2 + (b+1)^2, \therefore a = 0, b = -1 \text{ となって, } a > \frac{1}{2} \text{ に反する。}$$

⑤を満たす (a, b) を図2の打点部に示す。境界線を含む。

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ の最大値は、半径 $r^2 = a^2 + b^2$ の円が⑤の円と図2のように接するときの半径 r である。 $a^2 + b^2 = (\sqrt{10} + 2\sqrt{3})^2$ だから、最大値は $\sqrt{10} + 2\sqrt{3}$ (答)

このとき、 $a = -3\left(1 + \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$, $b = -\left(1 + \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$, $\therefore z = -\left(1 + \sqrt{\frac{6}{5}}\right)(3 + i)$ (答)

これらは⑤で等号が成立するときだから、 $\beta = 2$ (答)



<解説>

(2)

与式の左辺は共役複素数の積と和からなることが、少し見れば、わかる。ただちに、 β の虚部は0であることを認識しよう。

他にも解法があろうが、 $z = a + bi$, $\beta = a_\beta + b_\beta i$, とおき、実数 a, b が存在するための、 a_β, b_β の条件を考えることが容易のように思う。

(3)

$$(a+3)^2 + (b+1)^2 = 12 \quad \text{⑥}$$

$$a^2 + b^2 = r^2 \quad \text{⑦}$$

2つの円の中心 $(-3, -2)$ と $(0, 0)$ を結ぶ直線 $b = 3a$ ⑧ 上に両円の接点がある。

$$\text{⑥, ⑦, ⑧ から, } r = \sqrt{10} + 2\sqrt{3}$$

〔6〕 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。関数 $f(x) = x^2$ とし、 $a_1 = 10$ とする。曲線 $y = f(x)$ の点 $(a_n, f(a_n))$ における法線と曲線 $y = f(x)$ との2つの交点を $(a_n, f(a_n))$, $(-a_{n+1}, f(-a_{n+1}))$ とする。次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) すべての $n \geq 1$ に対して

$$|a_n - \sqrt{n+99}| \leq 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

<解答>

(1)

$$f'(x) = 2x, \text{ したがって, } (a_n, f(a_n)) \text{ を通る法線の方程式は } y = \frac{-1}{2a_n} (x - a_n) + a_n^2 \quad \textcircled{1}$$

法線 ① と $y = x^2$ ② の交点は,

$$x = -a_{n+1} = \frac{-1}{2a_n} - a_n, \text{ したがって } a_{n+1} = \left(a_n + \frac{1}{2a_n}\right) \quad (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} |a_n - \sqrt{n+99}| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq a_n - \sqrt{n+99} \leq 1 \Leftrightarrow a_n - 1 \leq \sqrt{n+99} \leq a_n + 1 \\ &\Leftrightarrow (a_n - 1)^2 \leq n+99 \leq (a_n + 1)^2 \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

① がすべての $n \geq 1$ に対して成り立つことを数学的帰納法によって説明する。

① おいて $n=1$ とすれば, $(a_1 - 1)^2 = 9^2 \leq 1+99 \leq (a_1 + 1)^2 = 11^2$ となって ① は成立する。

$n=k$ において ① が成立するとして, $(a_k - 1)^2 \leq k+99 \leq (a_k + 1)^2 \quad \textcircled{2}$

$n=k+1$ において ① の成立を検討する。

$$\begin{aligned} (a_{k+1} - 1)^2 &= \left\{ \left(a_k + \frac{1}{2a_k} \right) - 1 \right\}^2 = \left(a_k + \frac{1}{2a_k} \right)^2 - 2 \left(a_k + \frac{1}{2a_k} \right) + 1 \\ &= a_k^2 + 1 + \frac{1}{4a_k^2} - 2a_k - \frac{1}{a_k} + 1 = a_k^2 - 2a_k + 1 - \frac{1}{a_k} + \frac{1}{4a_k^2} + 1 = (a_k - 1)^2 - \frac{1}{a_k} + \frac{1}{4a_k^2} + 1 \\ (a_k - 1)^2 &= (a_{k+1} - 1)^2 + \frac{1}{a_k} - \frac{1}{4a_k^2} - 1 \quad \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{k+1} + 1)^2 &= \left\{ \left(a_k + \frac{1}{2a_k} \right) + 1 \right\}^2 = \left(a_k + \frac{1}{2a_k} \right)^2 + 2 \left(a_k + \frac{1}{2a_k} \right) + 1 \\ &= a_k^2 + 1 + \frac{1}{4a_k^2} + 2a_k + \frac{1}{a_k} + 1 = a_k^2 + 2a_k + 1 + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{4a_k^2} + 1 = (a_k + 1)^2 + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{4a_k^2} + 1 \\ (a_k + 1)^2 &= (a_{k+1} + 1)^2 - \frac{1}{a_k} - \frac{1}{4a_k^2} - 1 \quad \textcircled{4} \end{aligned}$$

③, ④ を ② に代入すると,

$$(a_{k+1} - 1)^2 + \frac{1}{a_k} - \frac{1}{4a_k^2} - 1 \leq k+99 \leq (a_{k+1} + 1)^2 - \frac{1}{a_k} - \frac{1}{4a_k^2} - 1$$

$$(a_{k+1} - 1)^2 - 1 \leq (a_{k+1} - 1)^2 + \frac{1}{a_k} - \frac{1}{4a_k^2} - 1 \text{ ならびに}$$

$$(a_{k+1} + 1)^2 - \frac{1}{a_k} - \frac{1}{4a_k^2} - 1 \leq (a_{k+1} + 1)^2 - 1 \text{ だから}$$

$$(a_{k+1} - 1)^2 - 1 \leq k+99 \leq (a_{k+1} + 1)^2 - 1, \therefore (a_{k+1} - 1)^2 \leq (k+1) + 99 \leq (a_{k+1} + 1)^2$$

したがって, $n=k+1$ でも ① が成立する。

以上のように、 $n = 1$ で①が成立し、 $n = k$ で①が成立するとすれば、 $n = k + 1$ でも成立するから、数学的帰納法により、すべての n で①が成立する。

したがって、すべての $n \geq 1$ に対して $|a_n - \sqrt{n+99}| \leq 1$ が成立する。

(3)

$$|a_n - \sqrt{n+99}| \leq 1 \text{ により, } \sqrt{n+99} - 1 \leq a_n \leq \sqrt{n+99} + 1$$

$$\frac{\sqrt{n+99} - 1}{\sqrt{n}} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n+99} + 1}{\sqrt{n}}, \therefore \sqrt{1 + \frac{99}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{99}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{99}{n}} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1 \text{ だから, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1 \quad (\text{答})$$

<解説>

(2)

$a_{n+1} = \left(a_n + \frac{1}{2a_n} \right)$ から、 a_n の表式を求めることは困難である。”すべての $n \geq 1$ に対して”という表現からも、数学的帰納法に着眼する。

<総評>

いたずらに難しい問題はなく、難易バランスよく問題が構成され、受験生の数学力を計る適切な問題となっている。。

①

三角関数と応用に関する問題。題意は明快なので、スムーズに解答したい。難易度はB。

②

空間ベクトルの取り扱いに関する問題。内分、外分とベクトルによる表示とを的確に扱うこと。難易度はB-。

③

多項式の因数分解と値が決める範囲の問題。難易度はB。

④

指数関数を含む関数の微積分に関する問題。難易度はB+。

⑤

複素数とその処理に関わる問題。複素数の存在のためには、その実部と虚部の実数が存在することを示す。難易度はB+。

⑥

数列とその値域に関する問題。数学的帰納法による解答方針を速やかに考えることがポイント。難易度はB+。

1 座標平面の原点を O とし，2 点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ， $B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとり，単位円周上に

点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ をとる。ただし， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin \frac{\pi}{12}$ ， $\cos \frac{\pi}{12}$ ， $\sin \frac{5\pi}{12}$ ， $\cos \frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 $OAPB$ の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき， S の最大値と最小値を求めよ。

<解答>，<解説>

理系の 1 において， $B\left(0, \frac{3}{4}\right)$ が $B\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に変わり，(4) で $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12}$ から $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ に変わっただけで，ほぼ同じ問題なので理系の 1 を参照のこと。

(1) 理系の (1) に同じ。

(2) 図 1 から， $S = \triangle OAP + \triangle OBP = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{1}{4} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta$ (答)

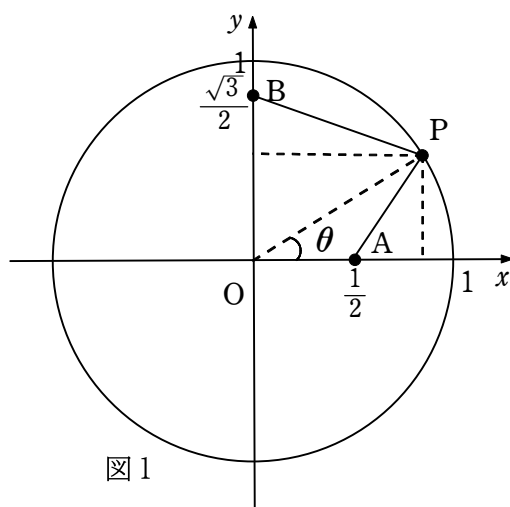


図 1

(3)

S を $S(\theta)$ とすれば，

$$S'(\theta) = \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{4} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) = -\frac{1}{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$$

$S(\theta)$ は図 2 のような変化をする。

θ	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$S'(\theta)$		+	0
$S(\theta)$		↗	↘

図 2

$$S\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{16} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}}{16} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \frac{1}{8} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$S\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8} = \frac{1}{8} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

以上の結果, S の最大値は $\frac{1}{2}$, 最小値は $\frac{1}{8} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$ (答)

□ 理系の問題□に同じなので, その解答と解説を参照のこと。

□ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3n}{n+1} a_n - 10 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = n a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答よ。

(1) a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 の値をそれぞれ求めよ。

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) c_{n+1} を c_n を用いて表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

<解答>

(1)

$$a_2 = \frac{3}{1+1} a_1 - 10 = \frac{9}{2} - 10 = -\frac{11}{2}, \quad a_3 = \frac{3 \times 2}{2+1} a_2 - 10 = -11 - 10 = -21 \quad (\text{答})$$

$$b_1 = 1 \times a_1 = 3, \quad b_2 = 2 \times a_2 = -11, \quad b_3 = 3 \times a_3 = -63 \quad (\text{答})$$

$$c_1 = b_2 - b_1 = -14, \quad c_2 = b_3 - b_2 = -52 \quad (\text{答})$$

(2)

$$b_{n+1} = (n+1)a_{n+1} = 3na_n - 10(n+1) = 3b_n - 10(n+1) \quad (\text{答})$$

(3)

(2)を活用して,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+2} - b_{n+1} = \{3b_{n+1} - 10(n+2)\} - \{3b_n - 10(n+1)\} \\ &= 3(b_{n+1} - b_n) - 10 = 3c_n - 10 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4)

(3)より, $c_n = 3c_{n-1} - 10$ だから

$$c_n - 5 = 3(c_{n-1} - 5) = 3^2(c_{n-2} - 5) = \dots = 3^{n-1}(c_1 - 5) = -19 \cdot 3^{n-1},$$

したがって, 数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n = -19 \cdot 3^{n-1} + 5$ (答)

$$(2) \text{ より, } c_n = b_{n+1} - b_n = 2b_n - 10(n+1)$$

$$\therefore b_n = \frac{1}{2} \{ c_n + 10(n+1) \} = \frac{1}{2} \{ -19 \cdot 3^{n-1} + 10n + 15 \} \quad (\text{答})$$

$$b_n = na_n \text{ より, } a_n = \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2n} \{ -19 \cdot 3^{n-1} + 10n + 15 \} \quad (\text{答})$$

□4 次の問いに答よ。

(1) 次の不等式を表す領域を図示せよ。

$$0 < -(y+x-1)(y+x^2-6x+5) < (y+x-1)(y-3x^2+10x+5)$$

(2) (1)で図示した領域のうち $1 \leq x \leq 4$ を満たす部分の面積を求めよ。

<解答>

(1)

i) $y+x-1 \leq 0$ のとき,

$$\text{与式より, } 0 > -(y+x^2-6x+5) > y-3x^2+10x+5$$

$$0 < y+x^2-6x+5 \text{ より, } y > -x^2+6x-5 \quad \text{①}$$

$$y+x^2-6x+5 < -y+3x^2-10x-5 \text{ より, } y < x^2-2x-5 \quad \text{②}$$

①, ②によって定まる領域を図1の打点部に示す。

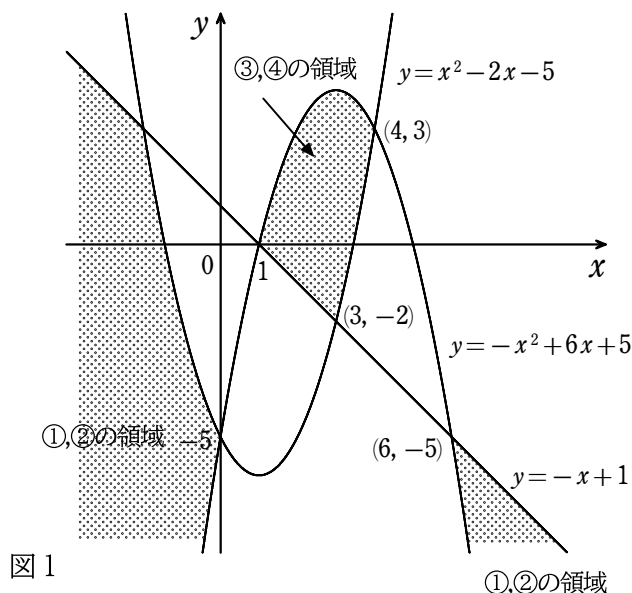


図1

ii) $y+x-1 \geq 0$ のとき,

$$\text{与式より, } 0 < -(y+x^2-6x+5) < y-3x^2+10x+5$$

$$0 > y+x^2-6x+5 \text{ より, } y < -x^2+6x-5 \quad \text{③}$$

$$-(y+x^2-6x+5) < y-3x^2+10x+5 \text{ より, } y > x^2-2x-5 \quad \text{④}$$

③, ④によって定まる領域を図1の打点部として示す。

(2)

(1)の領域で $1 \leq x \leq 4$ を満たす部分は図1の③, ④の領域

$$\begin{aligned}
\text{求める面積} &= \int_1^3 \{(-x^2 + 6x - 5) - (-x + 1)\} dx + \int_3^4 \{(-x^2 + 6x - 5) - (x^2 - 2x - 5)\} dx \\
&= \int_1^3 (-x^2 + 7x - 6) dx + \int_3^4 (-2x^2 + 8x) dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 - 6x \right]_1^3 + 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_3^4 = \frac{32}{3} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

<解説>

$(y + x - 1)$ の正負によって、不等式の向きが変わることに注意する。

<総評>

全体として、標準レベルの問題が揃っており、文系受験生にも相応の数学力を求めている。

[1] は理系の問題をやや容易化したもので、難易度はB。[2] は理系の問題と同じ。難易度はB+。
 [3] は数列の問題で、やや煩瑣だが標準レベルの難易度でB。[4] は標準レベルの問題だが、計算がやや煩瑣である。難易度はB+。

251026