

[1] (60点)

 a, b を実数とし, $f(z) = z^2 + az + b$ とする. a, b が

$$|a| \leq 1, |b| \leq 1$$

を満たしながら動くとき, $f(z) = 0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ.

<解答>

$f(z) = z^2 + az + b = 0$ の解を $z = x + yi$ とする. ただし, x, y は実数

$$f(z) = f(x + yi) = (x + yi)^2 + a(x + yi) + b = (x^2 - y^2 + ax + b) + (2xy + ay)i = 0$$

したがって,

$$x^2 - y^2 + ax + b = 0 \quad ①$$

$$2xy + ay = 0 \quad ②$$

$$②より, y = 0 \text{ または } x = -\frac{a}{2}$$

i) $y = 0$ の場合

$$①より, x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0 \quad ③$$

$y = x^2 + ax + b$ のグラフと $y = 0$ との交点の x 座標が③の実数解である.

$$\text{すなわち, } x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad a^2 \geq 4b, \text{ したがって } b \leq \frac{a^2}{4}, \quad \therefore -1 \leq b \leq \frac{1}{4} \quad ④$$

$$x_1 = f_1(a, b) = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad x_2 = f_2(a, b) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{ とおく. 明らかに } x_1 \leq x_2$$

④の b において, 明らかに $f_1(a, b)$ は単調増加関数, $f_2(a, b)$ は単調減少関数

$$\text{したがって, 最小値 } (x_1)_{\min} = (f_1(a, b))_{\min} \leq f_1(a, -1) = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad ⑤$$

$$\text{したがって, 最大値 } (x_2)_{\max} = (f_2(a, b))_{\max} \geq f_2(a, -1) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad ⑥$$

$|a| \leq 1$ において, a に関して⑤は単調減少関数, ⑥は単調減少関数

$$\text{したがって, } (x_1)_{\min} = (f_1(a, b))_{\min} = f_1(1, -1) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{したがって, } (x_2)_{\max} = (f_2(a, b))_{\max} = f_2(-1, -1) = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 + 4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{以上をまとめると, } \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = f_1(1, -1) \leq x_1 \leq f_1\left(-1, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \quad ⑦$$

$$\frac{-1}{2} = f_2\left(1, \frac{1}{4}\right) \leq x_2 \leq f_2(-1, -1) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad ⑧$$

⑦, ⑧ から, $y = 0$ で ④ を満たす実数 x は, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ⑨

ii) $x = -\frac{a}{2}$ の場合

$a = -2x$, $|a| \leq 1$ より, $|2x| \leq 1$, $\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ⑩

① より, $x^2 - y^2 + ax + b = x^2 - y^2 - 2x^2 + b = -x^2 - y^2 + b = 0$,

$\therefore b = x^2 + y^2$, $|b| \leq 1$ より, $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ ⑪

i), ii) をまとめて, $f(z) = 0$ を満たす複素数 $z = x + yi$ がとりうる値の範囲を図 1 の打点部と太線部に示す。境界線と端点を含む。

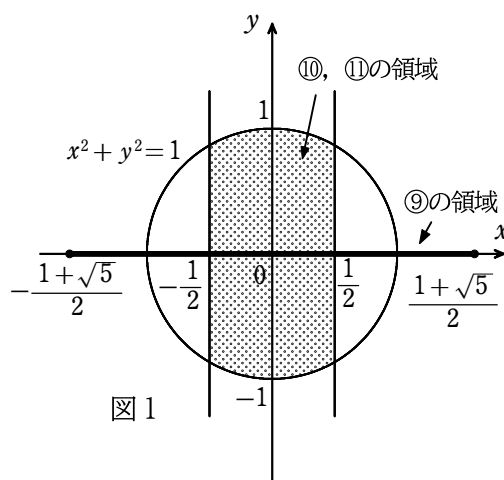


図 1

<解説>

容易そうで手強い問題である。 z が実数の場合も検討対象に含むことを忘れてはならない。

$z = x + yi$ において, (x, y) の存在範囲を考察する。すると, 実数解の場合とそうでない場合とを分けて考える必要のあることがわかる。

実数解の場合, 2 次方程式 $f(x) = x^2 + ax + b = 0$ ③ の実数解の範囲を求める。図 2 に示すように, $y = f(x)$ と $y = 0$ の交点 (黒点で示す) の x 座標が実数解である。 $|a| \leq 1$, $-1 \leq b \leq \frac{1}{4}$ において, この点の動く範囲が実数解 x の範囲ということになる。

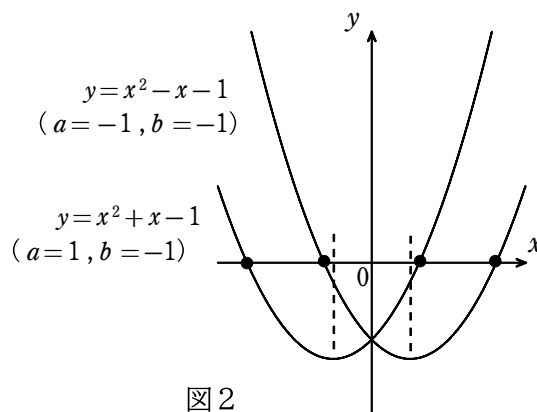


図 2

④において、 b に関して $f_1(a, b)$ は単調増加関数、 $f_2(a, b)$ は単調減少関数を確認しよう。

$$\frac{df_1(a, b)}{db} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}} > 0, \therefore b \text{ に関して } f_1(a, b) \text{ は単調増加関数}$$

$$\frac{df_2(a, b)}{db} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - 4b}} < 0, \therefore b \text{ に関して } f_2(a, b) \text{ は単調減少関数}$$

同様に、 $|a| \leq 1$ において、 a に関して ⑤ は単調減少関数、⑥ は単調減少関数を確認しよう。

$$\frac{df_1(a, -1)}{da} = -\frac{1}{2} - \frac{a}{2\sqrt{a^2 + 4}} < 0, \therefore a \text{ に関して ⑤ は単調減少関数}$$

$$\frac{df_2(a, -1)}{da} = -\frac{1}{2} + \frac{a}{2\sqrt{a^2 + 4}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1 + 4/a^2}} < 0, \therefore a \text{ に関して ⑥ は単調減少関数}$$

2 (60点)

3つの正の整数 a, b, c の最大公約数が1であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a + b + c, bc + ca + ab, abc$ の最大公約数は1であることを示せ。
- (2) $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^3 + b^3 + c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ。

<解答>

(1)

$a + b + c, bc + ca + ab, abc$ の公約数が素数 p で、 $p \geq 2$ と仮定する。

$a + b + c = k_1 p, bc + ca + ab = k_2 p, abc = k_3 p$ とおける。 k_1, k_2, k_3 は自然数。

$abc = k_3 p$ より、素数 p は整数 a, b, c のいずれかの約数となる。 a, b, c いずれの約数としても、以下の考察は同じなので、ここでは a の約数と仮定して扱う。

$$a = a' p \text{ とおき, } bc = k_2 p - (b + c)a = k_2 p - (b + c)a' p = \{k_2 - (b + c)a'\} p$$

したがって p は整数 b, c のいずれかの約数となる。いずれの約数としても以下の考察は同じなので、ここでは b の約数と仮定して扱う。

$$b = b' p \text{ とおき, } c = k_1 p - a - b = k_1 p - a' p - b' p = \{k_1 - a' - b'\} p$$

したがって p は c の約数である。 $p \geq 2$ が a, b, c の公約数となるが、これらの最大公約数が1であるとの前提に矛盾する。

背理法により、 $a + b + c, bc + ca + ab, abc$ の最大公約数は1である。

(2)

$$2(a^3 + b^3 + c^3) = 3(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - (a + b + c)^3 + 6abc \quad ①$$

$(a + b + c), (a^2 + b^2 + c^2), (a^3 + b^3 + c^3)$ の公約数が素数 $q \geq 2$ とすれば、

$$a + b + c = k_4 q, a^2 + b^2 + c^2 = k_5 q, a^3 + b^3 + c^3 = k_6 q \text{ とおける。}$$

k_4, k_5, k_6 は自然数

$$① \text{ より, } 2k_6 q = 3k_5 q k_4 q - (k_4 q)^3 + 6abc \quad ②$$

② より、 q は $6abc$ の約数であり、6の約数(かつ/または) abc の約数である。

i) q が6の約数のとき

$q = 2, 3, 6$ が最大公約数となりえる。

ii) q が abc の約数のとき

素数 q は整数 a, b, c のいずれかの約数となる。(1)と同様に, $a = k_7 q$ として考察する。

$$a + b + c = k_7 q + b + c = k_4 q, \quad b + c = (k_4 - k_7) q$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (k_7 q)^2 + b^2 + c^2 = k_5 q, \quad b^2 + c^2 = (k_5 - k_7^2 q) q$$

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = (k_5 - k_7^2 q) q + 2bc = (k_4 - k_7)^2 q^2$$

$$\therefore 2bc = (k_4 - k_7)^2 q^2 - (k_5 - k_7^2 q) q$$

したがって q は $2bc$ の約数であり, 2 の約数 {かつ/または} bc の約数である。 q が bc の約数のとき, q は b または c の約数となる。 q が $a + b + c$ の約数であることから, q は a, b, c の約数となる。これは a, b, c の最大公約数が 1 であることに反する。

したがって, abc の約数として許されるのは $q = 2$ のみであるが, このことを検証する。

2 は a, b, c のいずれかの約数であるが, (1)と同様に 2 が a の約数として $a = 2a'$ とおく。

$$a + b + c = 2a' + b + c = 2k_4, \quad b + c = 2(k_4 - a')$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2a')^2 + b^2 + c^2 = 2k_5, \quad b^2 + c^2 = 2(k_5 - 2a'^2)$$

$$(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 2(k_5 - 2a'^2) + 2bc = 4(k_4 - a')^2$$

$$(k_5 - 2a'^2) + bc = 2(k_4 - a')^2 \quad \textcircled{3}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (2a')^3 + b^3 + c^3 = 2k_6, \quad b^3 + c^3 = 2k_6 - (2a')^3$$

$$(b + c)^3 = b^3 + 3bc(b + c) + c^3 = 2k_6 - (2a')^3 + 6bc(k_4 - a') = 8(k_4 - a')^3 \quad \textcircled{4}$$

③, ④より, b, c は 2 の倍数とは限らないから, $q = 2$ は abc の約数として許される。

以上の結果, $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^3 + b^3 + c^3$ の最大公約数となるような正の整数は
1, 2, 3, 6 (答)

<解説>

整数の問題。解答方針を着想し, 思考展開の筋道をつけることが必要なので, 難しい問題だと思う。

(1) では背理法を用いることは容易に着想できよう。 $a + b + c, bc + ca + ab, abc$ の最大公約数が 1 でないとしたとき, 矛盾を導けば良い。

(2) は, 率直のところ, どのように解答への登り口を見つけるか, 困惑するであろう。ここでは, $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^3 + b^3 + c^3$ の 3 項を含む関係式を表現し, その公約数に必要とされる条件を求めることを着想した。その条件から許容される公約数, 最大公約数を求めるものである。

□ (60点)

α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。 $\angle A = \alpha$ および $\angle P = \frac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が,

次の 2 つの条件 (a), (b) を満たしながら, 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = \frac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする。

(a) 時刻 t での点 A, B の座標は, それぞれ $A(\sin t, 0), B(0, \cos t)$ である。

(b) 点 P は第一象限内にある。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P はある直線上を動くことを示し、その直線の方程式を α を用いて表せ。
- (2) 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = \frac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ。
- (3) xy 平面内において、連立不等式

$$x^2 - x + y^2 < 0, \quad x^2 + y^2 - y < 0$$

により定まる領域を D とする。このとき、点 P は領域 D には入らないことを示せ。

<解答>

(1)

点 P (x_P, y_P) とおく。題意から図 1 を描くことができる。

$\angle AOB = \angle APB = \angle R$ だから、4 点 O, A, P, B は同一円周上にある。

同一円弧 BP に立つ円周角は等しいことから、 $\angle BOP = \angle BAP = \alpha$

したがって、直線 OP は y 軸と角 α をなす。すなわち、 $y_P = \frac{x_P}{\tan \alpha}$

したがって、点 P は直線 $y = \frac{x}{\tan \alpha}$ 上を動く。 (答)

(2)

図 1 において、 $\overrightarrow{AB} = (-\sin t, \cos t)$, $\overrightarrow{AP} = (x_P - \sin t, y_P)$, $\overrightarrow{BP} = (x_P, y_P - \cos t)$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (x_P - \sin t, y_P) \cdot (x_P, y_P - \cos t) = x_P(x_P - \sin t) + y_P(y_P - \cos t) = 0$$

$$\therefore x_P^2 + y_P^2 = x_P \sin t + y_P \cos t \quad \text{①}$$

$$y_P = \frac{x_P}{\tan \alpha} \text{ を ① に代入して、 } x_P = \sin \alpha \cos(\alpha - t), \quad y_P = \cos \alpha \cos(\alpha - t) \quad \text{②}$$

$L(t)$ を点 P の時刻 t までの道のりとすれば、

$$\begin{aligned} \Delta L &= |L(t + \Delta t) - L(t)| = \sqrt{\{x_P(t + \Delta t) - x_P(t)\}^2 + \{y_P(t + \Delta t) - y_P(t)\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha} |x_P(t + \Delta t) - x_P(t)| = \frac{1}{\sin \alpha} |x_P(t + \Delta t) - x_P(t)| \end{aligned}$$

$$\Delta x_P = |x_P(t + \Delta t) - x_P(t)| = |\sin \alpha \{ \cos(\alpha - t - \Delta t) - \cos(\alpha - t) \}| = \sin \alpha | \Delta t \sin(\alpha - t) |$$

したがって、 $\Delta L = |\sin(\alpha - t)| \Delta t$,

$$\begin{aligned} \therefore L(t) &= \int_0^t |\sin(\alpha - t)| dt = \int_0^\alpha \sin(\alpha - t) dt + \int_\alpha^t \sin(t - \alpha) dt \\ &= \left[\cos(\alpha - t) \right]_0^\alpha + \left[-\cos(t - \alpha) \right]_\alpha^t = 1 - \cos \alpha - \cos(t - \alpha) + 1 \end{aligned}$$

$$L\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \sin \alpha - \cos \alpha \quad (\text{答})$$

(3)

領域 D は下記 ③, ④ を同時に満たす図 2 の打点部 (ただし境界線は含まない) である。

$$x^2 - x + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{③}$$

$$x^2 + y^2 - y = x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad ④$$

$$\textcircled{1}\text{より}, \left(x_P - \frac{\sin t}{2}\right)^2 + \left(y_P - \frac{\cos t}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

点 $P(x_P, y_P)$ は $\left(\frac{\sin t}{2}, \frac{\cos t}{2}\right)$ を中心とした半径 $\frac{1}{2}$ の円周上の点である。

$$x_C = \frac{\sin t}{2}, \quad y_C = \frac{\cos t}{2} \text{ とすれば, } x_C^2 + y_C^2 = \left(\frac{\sin t}{2}\right)^2 + \left(\frac{\cos t}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

したがって、点 P は原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上の点から半径 $\frac{1}{2}$ の円周上に存在する。

しかるに、図2の $x^2 + y^2 = (1/2)^2$ の円周上（太線）の点から $1/2$ 以上の距離にある点を領域 D は含まない。具体的に見ると、太線上の点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ および $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ からが領域 D 内への点の距離が最も長くなるが、どの点との距離も $\frac{1}{2}$ を超えることはないのは明かである（ D の境界上の点との距離が $\frac{1}{2}$ になるが、境界線は D には含まれていない）。

すなわち、点 P は領域 D には入らないことが示された。

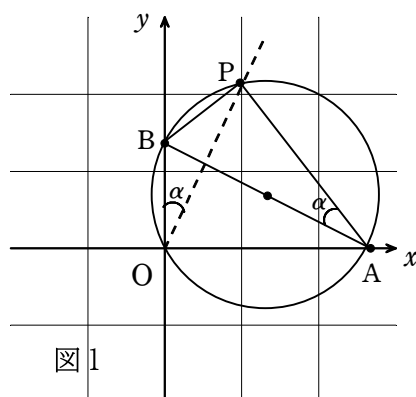


図1

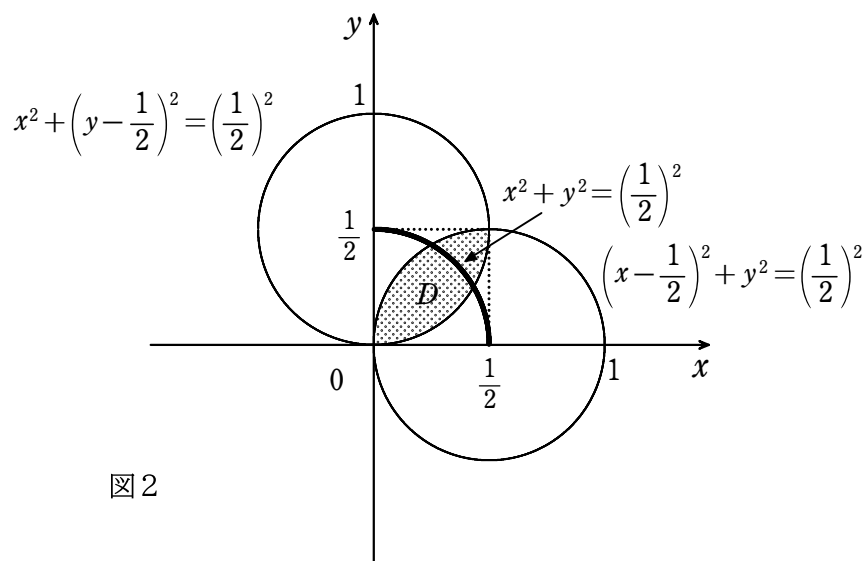


図2

<解説>

まずは図1のような図を描いて、題意を的確に把握する。

(1)

図1を見つめると、点 $P(x_P, y_P)$ がある直線上を移動することが自ずと見えてくる。 x_P, y_P を計算して、 x_P, y_P の関係式を求める、という方針で臨むと、面倒なことになる。

(2)

(1)より、 x_P, y_P を α, t によって表現できるので、点 P がどのように動くか把握できる。「点 P が動く道のり」という表現に戸惑うかも知れない。ここで「道のり」とは「動いた距離」をさす。点 P が動いた始点と終点の距離ではないことに注意する。

(3)

ここでも、図2のような図を描いて、領域 D を明確にし、点 P が D に入らないことを明らかにすると良い。問題文は「示せ」とあって「証明せよ」ではないので、このような図による説明で十分と判断する。

4 (60点)

a は正の実数とする。複素数 z が $|z-1|=a$ かつ $z \neq \frac{1}{2}$ を満たしながら動くとき、複素数

平面上の点 $w = \frac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする。このとき、次の問いに答よ。

- (1) K が円となるための a の条件を求めよ。また、そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を、それぞれ a を用いて表せ。
- (2) a が (1) の条件を満たしながら動くとき、虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ。

<解答>

(1)

$$w = \frac{z-3}{1-2z}, \quad z \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow z(1+2w) = w+3, \quad w \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{3+w}{1+2w}$$

$$|z-1| = \left| \frac{3+w}{1+2w} - 1 \right| = \left| \frac{2-w}{1+2w} \right| = a \Leftrightarrow |w-2| = a|2w+1| = 2a \left| w + \frac{1}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow (w-2)(\overline{w-2}) = a^2(2w+1)(\overline{2w+1}) \Leftrightarrow w\overline{w} - 2(w+\overline{w}) + 4 = a^2\{4w\overline{w} + 2(w+\overline{w}) + 1\}$$

$$\Leftrightarrow (4a^2-1)w\overline{w} + 2(a^2+1)(w+\overline{w}) + (a^2-4) = 0 \quad \text{①}$$

$4a^2-1=0$ のとき、①の w が描く図形 K は円にならないから、 $4a^2-1 \neq 0$ すなわち $a \neq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(w + \frac{2a^2+2}{4a^2-1} \right) \left(\overline{w} + \frac{2a^2+2}{4a^2-1} \right) = \left(\frac{5a}{4a^2-1} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(w + \frac{2a^2+2}{4a^2-1} \right) \left(\overline{w + \frac{2a^2+2}{4a^2-1}} \right) = \left(\frac{5a}{4a^2-1} \right)^2 \Leftrightarrow \left| w + \frac{2a^2+2}{4a^2-1} \right| = \frac{5a}{|4a^2-1|}$$

以上によって、 K が円となるための a の条件は $a \neq \frac{1}{2}$

円 K の中心は複素平面の点 $\left(-\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, 0\right)$, 半径は $\frac{5a}{|4a^2-1|}$ (答)

(2)

虚軸に平行で円 K の直径となる成分の上端および下端の点は

$$\text{上端点 } (x_U, y_U) = \left(-\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, \frac{5a}{|4a^2-1|}\right), \text{ 下端点 } (x_L, y_L) = \left(-\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, \frac{-5a}{|4a^2-1|}\right)$$

したがって, 虚軸に平行で円 K の直径となる線分とは

$$x = -\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, \quad |y| \leq \frac{5a}{|4a^2-1|}$$

i) $4a^2 - 1 > 0$, すなわち $a > \frac{1}{2}$ のとき

$$x = -\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, \quad y_L = \frac{-5a}{4a^2-1} \leq y \leq \frac{5a}{4a^2-1} = y_U$$

そこで上端点 (x_U, y_U) に対応する, $x = -\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, \quad y = \frac{5a}{4a^2-1}$ の点 (x, y) ①

および下端点 (x_L, y_L) に対応する, $x = -\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, \quad y = -\frac{5a}{4a^2-1}$ の点 (x, y) ②

①, ② が $a > \frac{1}{2}$ の a の変化とともに動く軌道を求める。

①において, $x = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{4a^2-1}\right), \therefore \frac{5}{4a^2-1} = -(2x+1)$, したがって $-\frac{y}{2x+1} = a$

これを ① の y に代入して計算すれば, $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$ ③

このとき $\frac{y}{2x+1} < -\frac{1}{2}$, $y > 0$ だから, $0 < y < -x - \frac{1}{2}$ ④

②において, $\frac{y}{2x+1} = a$ となり, 同様に $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$ ⑤

このとき $\frac{y}{2x+1} = a > \frac{1}{2}$, $y < x + \frac{1}{2} < 0$ ⑥

③, ⑤は双曲線の式で, 虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域はこの双曲線の内側

ii) $4a^2 - 1 < 0$, すなわち $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき

$$x = -\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, \quad y_L = \frac{5a}{4a^2-1} \leq y \leq -\frac{5a}{4a^2-1} = y_U$$

そこで, $x = -\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, \quad y = -\frac{5a}{4a^2-1}$ の点 (x, y) ⑦

および, $x = -\frac{2a^2+2}{4a^2-1}, \quad y = \frac{5a}{4a^2-1}$ の点 (x, y) ⑧

⑦, ⑧ が $0 < a < \frac{1}{2}$ の a の変化とともに動く軌道を求める。

⑦は②と同式であり, $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$ ⑨

$$\text{このとき } \frac{y}{2x+1} = a < \frac{1}{2}, \quad 0 < y < x + \frac{1}{2} \quad \textcircled{10}$$

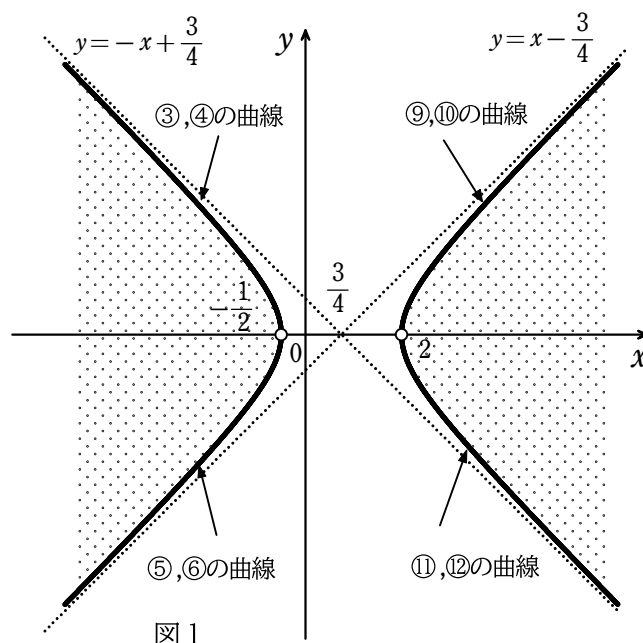
⑧は①と同式であり、

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \quad \textcircled{11}$$

$$\text{このとき } -\frac{y}{2x+1} = a < \frac{1}{2}, \quad y < 0 \text{ だから, } -x - \frac{1}{2} < y < 0 \quad \textcircled{12}$$

i) と同様に虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域は ⑨, ⑪ の双曲線の内側以上をまとめて、図 1 の打点部が虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域である。

ただし、境界線を含み、○印の点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ と $(2, 0)$ は含まない。



<解説>

複素数平面に関する問題。(1)では、与えられた条件から z を消去して、 w と a の関係式を求めたとき、 w が描く図形 K が円となる条件を求める。 w と複素数 p_0 との距離 $|w - p_0| = c_0$ (一定) の表式が得られれば、 w が描く図形 K は中心 p_0 、半径 c_0 の円となる。

(2)では、虚軸に平行で円 K の直径となる線分の両端の軌跡を求め、その間を結ぶ直線が求める領域となる。

5 (60点)

$$a \text{ は } 0 < a \leq \frac{\pi}{4} \text{ を満たす実数とし, } f(x) = \frac{4}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - ax\right) \text{ とする.}$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 次の等式 (*) を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ。

$$(*) \quad \int_0^1 f(x) dx = 1$$

(2) $0 \leq b < c \leq 1$ を満たす実数 b, c について, 不等式

$$f(b)(c-b) \leq \int_b^c f(x)dx \leq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次の試行を考える.

[試行] n 個の数 $1, 2, \dots, n$ を出目とする, あるルーレットを k 回まわす.

この [試行] において, 各 $i = 1, 2, \dots, n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし,

$$(**) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx$$

が成り立つとする. このとき, (1) の等式 (*) が成り立つことを示せ.

(4) (3) の [試行] において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし, $A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n,k}$ とする.

(**) が成り立つとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ.

<解答>

(1)

$$f(x) = \frac{4}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - ax\right) = \frac{2}{3} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin 2ax \right) = \frac{2}{3} (1 + \sin 2ax)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1 + \sin 2ax)dx = \frac{2}{3} \left[x - \frac{\cos 2ax}{2a} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\cos 2a}{2a} + \frac{1}{2a} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1 - \cos 2a}{2a} \right) \end{aligned}$$

したがって, $0 < a \leq \frac{\pi}{4}$ において,

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1 - \cos 2a}{2a} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2a}{a} = 1 \Leftrightarrow 1 - a = \cos 2a \quad \text{①}$$

$$g_1(a) = 1 - a, \quad g_2(a) = \cos 2a \quad \text{とおくと,} \quad g_1'(a) = -1 < 0, \quad g_2'(a) = -\sin 2a < 0$$

したがって $g_1(a), g_2(a)$ ともに一様減少関数, $g_1(0) = g_2(0) = 1, \quad g_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} > g_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$g_1(a), g_2(a)$ のグラフは図 1 のようになり, $1 - a_1 = \cos 2a_1$ なる $a = a_1$ において, ①が成立

以上によって, $\int_0^1 f(x)dx = 1$ を満たす a がただ 1 つ存在する.

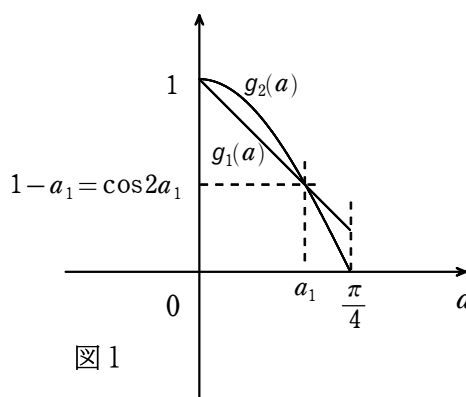
(2)

(1) より, $f(x) = \frac{2}{3} (1 + \sin 2ax)$ で, $0 < x \leq 1$ において単調増加関数

したがって, $0 \leq b \leq x \leq c \leq 1$ なる x に対して, $f(b) \leq f(x) \leq f(c)$

$$\text{したがって,} \quad \int_b^c f(b)dx = f(b)(c-b) \leq \int_b^c f(x)dx \leq \int_b^c f(c)dx = f(c)(c-b)$$

したがって, $f(b)(c-b) \leq \int_b^c f(x)dx \leq f(c)(c-b)$ が成り立つ。



(3)

この[試行]において、それぞれの出目が出る回数の総和は k であるから、 $\sum_{i=1}^n S_{n,k,i} = k$

(**) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx$ が成立することから、

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{S_{n,k,i}}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1$$

(4)

$p_{n,k,i} = \frac{S_{n,k,i}}{k}$ とすれば、 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{n,k,i} = p_{n,\infty,i} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k}$ となり、 $p_{n,\infty,i}$ はルーレットを回したときに i が出目となる確率を表す。

$A_{n,k} = \sum_{i=1}^n i p_{n,k,i}$ とおくことができるから、

$$A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i p_{n,k,i} = \sum_{i=1}^n i p_{n,\infty,i} = \sum_{i=1}^n i \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} \right) = \sum_{i=1}^n i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (1 + \sin 2ax) dx$$

$$\text{したがって、} \frac{A_n}{n} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (1 + \sin 2ax) dx$$

$$\frac{1}{n} = \Delta h, \quad x_i = i \Delta h, \quad x_0 = 0, \quad x_n = n \Delta h = 1 \text{ とすれば,}$$

$$\frac{i}{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (1 + \sin 2ax) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x_i (1 + \sin 2ax) dx$$

$x_{i-1} < x_i$, $\sin 2ax_{i-1} < \sin 2ax_i$ であり、(2)を利用して、

$$\begin{aligned} x_{i-1} (1 + \sin 2ax_{i-1}) \Delta h &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} x_{i-1} (1 + \sin 2ax) dx \\ &< \int_{x_{i-1}}^{x_i} x_i (1 + \sin 2ax) dx \leq x_i (1 + \sin 2ax_i) \Delta h \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_{i-1}(1 + \sin 2ax_{i-1})\Delta h &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} x_{i-1}(1 + \sin 2ax) dx \\ &< \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} x_i(1 + \sin 2ax) dx \leq \sum_{i=1}^n x_i(1 + \sin 2ax_i)\Delta h \quad (2) \end{aligned}$$

区分求積法の定義より, (2) において,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_{i-1}(1 + \sin 2ax_{i-1})\Delta h = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i(1 + \sin 2ax_i)\Delta h = \int_0^1 x(1 + \sin 2ax) dx$$

したがって挟みうちにより,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} x_i(1 + \sin 2ax) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x(1 + \sin 2ax) dx = \int_0^1 xf(x) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x(1 + \sin 2ax) dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x \cos 2ax}{2a} + \frac{\sin 2ax}{(2a)^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2a}{2a} + \frac{\sin 2a}{(2a)^2} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\cos 2a}{a} + \frac{\sin 2a}{2a^2} \right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

<解説>

(1)

公式 $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ より, $A = \frac{\pi}{2}$, $B = 2ax$ とすれば,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - ax\right) = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin 2ax \right) = \frac{1}{2} (1 + \sin 2ax)$$

(2)

単調増加関数に対する積分として基本的な関係である。

(3)

(**) の $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k}$ が i が出目となる確率を意味することに気づきたい。

解答では, $\sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{S_{n,k,i}}{k}$ が数学的に成立することを前提としている。

(4)

$\int_0^1 x(1 + \sin 2ax) dx$ の積分において, $\int x \sin 2ax dx = -\frac{x \cos 2ax}{2a} + \frac{\sin 2ax}{(2a)^2}$ は部分積分法に

より求めると良い。

$$\text{すなわち, } \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,$$

$$f'(x) = \sin 2ax, \quad f(x) = -\frac{\cos 2ax}{2a}, \quad g(x) = x, \quad g'(x) = 1$$

上記では区分求積法により解答を導いた。下記のように区分積分の級数として求めることもできる。

$$A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n,k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n i p_{n,k,i} = \sum_{i=1}^n i p_{n,\infty,i} = \sum_{i=1}^n i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (1 + \sin 2ax) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n i \left[x - \frac{\cos 2ax}{2a} \right]_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n i \left\{ \frac{i}{n} - \frac{\cos 2a\left(\frac{i}{n}\right)}{2a} - \left(\frac{i-1}{n} \right) + \frac{\cos 2a\left(\frac{i-1}{n}\right)}{2a} \right\} \\
&= \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{3a} \sum_{i=1}^n i \left\{ \cos 2a\left(\frac{i-1}{n}\right) - \cos 2a\left(\frac{i}{n}\right) \right\} \\
&= \frac{n+1}{3} + \frac{1}{3a} \sum_{i=1}^n \cos 2a\left(\frac{i-1}{n}\right) - \frac{n}{3a} \cos 2a
\end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \frac{A_n}{n} = \frac{n+1}{3n} + \frac{1}{3an} \sum_{i=1}^n \cos 2a\left(\frac{i-1}{n}\right) - \frac{\cos 2a}{3a}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} = \frac{1}{3} - \frac{\cos 2a}{3a} + \frac{1}{3a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cos 2a\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

$$\text{区分求積法により, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cos 2a\left(\frac{i-1}{n}\right) = \int_0^1 \cos 2ax \, dx = \left[\frac{\sin 2ax}{2a} \right]_0^1 = \frac{\sin 2a}{2a}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\cos 2a}{a} + \frac{\sin 2a}{2a^2} \right) \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
&\text{なお, } \sum_{i=1}^n i \left\{ \cos 2a\left(\frac{i-1}{n}\right) - \cos 2a\left(\frac{i}{n}\right) \right\} \\
&= 1 \left\{ 1 - \cos 2a\left(\frac{1}{n}\right) \right\} + 2 \left\{ \cos 2a\left(\frac{1}{n}\right) - \cos 2a\left(\frac{2}{n}\right) \right\} + 3 \left\{ \cos 2a\left(\frac{2}{n}\right) - \cos 2a\left(\frac{3}{n}\right) \right\} + \cdots \\
&+ (n-1) \left\{ \cos 2a\left(\frac{n-2}{n}\right) - \cos 2a\left(\frac{n-1}{n}\right) \right\} + n \left\{ \cos 2a\left(\frac{n-1}{n}\right) - \cos 2a\left(\frac{n}{n}\right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \cos 2a\left(\frac{i-1}{n}\right) - n \cos 2a
\end{aligned}$$

<総評>

180分で5問(300点満点)と国立大学の中では、最長の時間だけに、骨の折れる難問が揃っている。題意を的確に把握し、解答方針を考え、粘り強く取り組もう。

①

その係数の範囲が限定された2次方程式の複素数解の存在範囲を求め、複素数平面に描く問題。複素数のまま扱うのではなく、実数部、虚数部に分けて存在範囲を求めることがポイント。難易度はA。

②

解答方針に着眼着想が必要であり、粘り強く思考を展開することが求められる。難易度はA。

③

図形と関数の問題。図を描いて、題意を的確に把握する。図によって速やかに、解答方針を見出す。解答の方向性を誤ると、難しくなる。難易度はB+。

④

複素数平面に関する問題。解答方針は立て易いが計算がやや煩瑣であり、表式も長くなる。難易度はB+。

⑤

積分法に関する問題で、(1)、(2)は標準レベルの問題として、的確にスムーズに解答したい。

(3)で(**) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx$ などと, ルーレットの出目 i の確率が $f(x)$ によって定義

されて, 面食らう。解答方針では, 区分求積法によって積分演算するという着眼着想が必要になり, 難易度はA。

260106