2022 (R4) 年度　東京大学　前期入学試験　数学（理科・文科）解説

数学（理科）（配点120点）150分

第　1　問

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $f(x)$ は区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において最小値をもつことを示せ。

(2) $f(x)$ の区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ。

＜解答＞

(1)

$$f'(x) = -(\sin x)\log(\cos x) - \frac{\cos x \sin x}{\cos x} + \sin x + (\cos x)\log(\cos x)$$

$$= (\cos x - \sin x)\log(\cos x)$$

$f(x)$の変化を図 1 に示す。$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$において最小値をもつことがわかる。

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

図 1

(2)

図 1 より最小値は $x = \dfrac{\pi}{4}$ のときだから，

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\log 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt = \left[\int (\cos t)\log\cos t\,dt\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$，部分積分法によって，

$$\int (\cos t)\log(\cos t)\,dt = (\sin t)\log(\cos t) - \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt \quad ①$$

$\displaystyle\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt = \int \frac{\sin^2 t\,\cos t}{\cos^2 t}\,dt$ ，$\sin t = u$とおけば，$\dfrac{du}{dt} = \cos t$，$\therefore du = dt\cos t$

$$\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,du = \int \frac{u^2}{1-u^2}\,du$$

$$=\int\left(-1+\frac{1}{1-u^2}\right)du=\int\left(-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u}\right)du$$

$$=-u+\frac{1}{2}\log(1+u)-\frac{1}{2}\log(1-u)=-u+\frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}$$

以上によって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t)\log(\cos t)dt=\left[(\sin t)\log(\cos t)-\sin t+\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\left\{\log\frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})^2$$

したがって，

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\log 2-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}+\log(1+\sqrt{2})$$

$$=\log(1+\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}\log 2-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\log 2\qquad\text{(答)}$$

＜解説＞

(1)

$f(x)$ を一目して，導関数が容易に導かれることを知る。

(2)

部分積分法 $\int f'\cdot g\,dx=f\cdot g-\int f\cdot g'\,dx$ において，$f'=\cos t$，$g=\log(\cos t)$とおけば，

①が導出される。この問題は原始関数 $\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt=\int\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)dt$

$=\int\left(\frac{1}{\cos t}-\cos t\right)dt=\int\frac{1}{\cos t}dt-\sin t$ を求める問題に帰着する。

別解というほどではないが，$f'(x)=(\cos x-\sin x)\log(\cos x)$から原始関数 $f(x)$ を求めることを検討してみよう。

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(\cos x-\sin x)\log(\cos x)\,dx\quad ②$$

部分積分法によって，

$$\int(\cos x)\log(\cos x)\,dx=\sin x\log(\cos x)-\int(\sin x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$\int(\sin x)\log(\cos x)\,dx=-\cos x\log(\cos x)-\int(-\cos x)\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)dx$$

したがって，

$$f(x)=(\sin x+\cos x)\log(\cos x)+\int\frac{\sin^2 x+\sin x\cos x}{\cos x}dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\log(\cos x)+\int\frac{1-\cos^2 x+\sin x\cos x}{\cos x}dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\log(\cos x)+\int\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x+\sin x\right)dx$$

$$=(\sin x+\cos x)\log(\cos x)-\sin x-\cos x+\int\frac{1}{\cos x}dx \quad ③$$

$$=(\sin x+\cos x)\{\log(\cos x)-1\}+\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\log(1+\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}\log 2-\sqrt{2} \qquad (答)$$

②の表式に着眼すると，表式 ③が容易に導かれる。

すると同様に，原始関数$\int\frac{1}{\cos x}dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$の導出問題に帰着する。数学Ⅲの教科書にはレベルアップ問題として掲載されているが，導出方法までは示されていない。

上記と同様に $\sin x=u$として，$du=dx\cos x$，$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}du=\int\frac{1}{1-u^2}du$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\frac{1}{2}\{\log(1+u)-\log(1-u)\}=\frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

第 2 問

数列 $\{a_n\}$ をつぎのように定める。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n{}^2+1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(1)

正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ。

(2)

k, n を正の整数とする。a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k, n を用いて表せ。

(3)

a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ。

<解答>

(1)

命題 A：正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となる

すなわち，$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき $a_n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$ となる。

命題 A が $n=3j$ のとき成立するとする。 j は正の整数。

$j=1$ のとき，

$a_3=a_2{}^2+1=(a_1{}^2+1)^2+1=5$，$\therefore a_3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$， $j=1$のとき命題Aは成立する。

$n=3(j+1)$ のとき

$a_{3(j+1)}=a_{3j+2}{}^2+1=(a_{3j+1}{}^2+1)^2+1=\{(a_{3j}{}^2+1)^2+1\}^2+1=(a_{3j}{}^4+2a_{3j}{}^2+2)^2+1$

$\therefore a_{3(j+1)}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$

命題 A が $n=3j$ のとき成立するとすれば， $j=1$ のとき成立し，$n=3(j+1)$ のときも成立する。したがって，数学的帰納法によって， 命題 A が成立する。

(2)

k , n を正の整数として，a_n が a_k の倍数 $\Leftrightarrow a_n \equiv 0 \pmod{a_k}$

$a_{n+1} > a_n$ だから， $a_n \equiv 0 \pmod{a_k} \to n \geqq k$

$a_k \equiv 0 \pmod{a_k}$

$a_{k+1} = {a_k}^2 + 1$，$\therefore a_{k+1} \equiv ({a_k}^2 + 1) \pmod{a_k} \equiv \{{a_k}^2 \pmod{a_k} + 1 \pmod{a_k}\} \pmod{a_k}$

$\equiv a_1 \pmod{a_k}$

$a_{k+2} = {a_{k+1}}^2 + 1$，$\therefore a_{k+2} \equiv ({a_{k+1}}^2 + 1) \pmod{a_k} \equiv \{{a_{k+1}}^2 \pmod{a_k} + 1 \pmod{a_k}\} \pmod{a_k}$

$\equiv ({a_1}^2 + 1) \pmod{a_k} \equiv a_2 \pmod{a_k}$

$a_{k+3} = {a_{k+2}}^2 + 1$，$\therefore a_{k+3} \equiv a_3 \pmod{a_k}$

したがって， $a_{k+m} = {a_{k+m-1}}^2 + 1$，$\therefore a_{k+m} \equiv a_m \pmod{a_k}$　①　の成立が推定される。

① において $n = k + m$ とおくと， $a_n \equiv a_{n-k} \pmod{a_k}$　②

$n = pk + r$ とおく。p ，r は整数で，$p \geqq 1$ ，$0 \leqq r \leqq k - 1$，②から，

$a_n \equiv a_{n-k} \pmod{a_k} \equiv a_{n-2k} \pmod{a_k} \equiv \ldots \equiv a_{pk+r-(p-1)k} \pmod{a_k} \equiv a_{k+r} \pmod{a_k}$　③

③より， $a_n \equiv 0 \pmod{a_k} \Leftrightarrow a_{k+r} \pmod{a_k} \equiv 0 \pmod{a_k} \Leftrightarrow r = 0$

したがって， a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件は $n \equiv 0 \pmod{k}$ ，

すなわち n が k の倍数であること。（答）

(3)

$8088 = 2022 \times 4$，$\therefore a_{2022}$ は a_{8088} の約数

$a_{8088} \equiv 0 \pmod{a_{2022}}$

$a_{8089} \equiv \{(a_{8088})^2 + 1\} \pmod{a_{2022}} \equiv 1 \pmod{a_{2022}}$

$a_{8090} \equiv \{(a_{8089})^2 + 1\} \pmod{a_{2022}} \equiv 2 \pmod{a_{2022}}$

$a_{8091} \equiv \{(a_{8090})^2 + 1\} \pmod{a_{2022}} \equiv (2^2 + 1) \equiv 5 \pmod{a_{2022}}$

$(a_{8091})^2 \equiv 5^2 \pmod{a_{2022}}$

したがって， a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数は a_{2022} と 5^2 の最大公約数

$2022 = 3 \times 674$，(1)より a_{2022} は 5 の倍数だから， a_{3m} と $5^2 = 25$ の関係を考察する。

$a_3 = 5 \equiv 5 \pmod{25}$

$a_6 = {a_5}^2 + 1 = ({a_4}^2 + 1)^2 + 1 = \{({a_3}^2 + 1)^2 + 1\}^2 + 1 \equiv 5 \pmod{25}$

すると $a_{3m} \equiv 5 \pmod{25}$　が推論される。

命題 B：$a_{3m} \equiv 5 \pmod{25}$ とする。 m は正の整数

$m = 1$ で命題 B は成立する。 $m = j$ で命題 B は成立するとする。 $a_{3j} \equiv 5 \pmod{25}$

$a_{3(j+1)} = a_{3j+3} = \{({a_{3j}}^2 + 1)^2 + 1\}^2 + 1 \equiv 5 \pmod{25}$

以上によって，$m = j$ で命題 B が成立するとすれば $m = j + 1$ で成立し， $j = 1$ でも成立するので，数学的帰納法によって命題 B は任意の m において成立する。

したがって， $a_{2022} \equiv 5 \pmod{25}$，したがって a_{2022} と 5^2 の最大公約数は5,

したがって， a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数は 5（答）

＜解説＞

(1)

合同式の演算について習熟していない場合には，以下のような帰納法による方が簡明かも知れない。

命題A：$n = 3j$ のとき a_{3j} は 5 の倍数すなわち $a_{3j} = 5m$ である。$j, m = 1, 2, 3, \cdots$

$n = 3$ すなわち $j = 1$ のとき，$a_3 = {a_2}^2 + 1 = ({a_1}^2 + 1)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ となって成立する。

$a_{3j+1} = {a_{3j}}^2 + 1 = (5m)^2 + 1$

$a_{3j+2} = (a_{3j+1})^2 + 1 = \{(5m)^2 + 1\}^2 + 1 = (5\text{の倍数}) + 2$

$a_{3(j+1)} = a_{3j+3} = (a_{3j+2})^2 + 1 = \{(5\text{の倍数}) + 2\}^2 + 1 = \{(5\text{の倍数}) + 4\} + 1 = 5$ の倍数

したがって，n が 3 の倍数のとき，すなわち $n = 3j$ のとき，a_n は 5 の倍数とすれば，

$n = 3(j + 1)$でも a_n は 5 の倍数となる。

命題 A は $j = 1$ において成立し，$n = 3j$ $(2, 3, ...)$ において成立するとすれば，$n = 3(j+1)$ でも成立するので，数学的帰納法によって命題Aは成立する。

(2)

合同式の演算について習熟していると，解答の着想を得やすいだろう。

a_n が a_k の倍数 すなわち $a_n \equiv 0 \pmod{a_k}$ のための必要十分条件 を n，k を用いて表せ，ということだから，$a_k \equiv 0 \pmod{a_k}$ という単純な事実を踏まえて，数列 $\{a_n\}$ の定義から $a_n \equiv 0 \pmod{a_k}$ が満たす n，k の関係性を求める。

するとまずは，① が導かれる。上記では厳密な証明の記述をしていない。$a_{k+m} \equiv a_m \pmod{a_k}$ は数学的帰納法によって証明できるので，読者が試みてほしい。

(3)

a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数という2 項の関係性の問題である。2022と8091という数字の組み合わせが唐突で，まずは両数字の関係性を明らかにすることに着眼しよう。すると8088＝2022×4，$\therefore$ a_{2022}は a_{8088}の約数ということから，a_{8091} との関係性が見えてくる。

a_{2022} と 5^2 の最大公約数を求めることが最後の課題となる。

第　3　問

O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 $\mathrm{S}(x_1, y_1)$，$\mathrm{T}(x_2, y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式　$0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$

が表す正方形の領域をD とし，その２つの頂点 $\mathrm{A}(3, 0)$，$\mathrm{B}(3, 3)$ を考える。さらに，次の条件 (ｉ)，(ii) をともに満たす点 P をとる。

(ｉ) 点 Pは領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある。

(ii) 点 Pは，3点 O，A，B のいずれからも十分離れている。

点 Pの x 座標を a とする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 次の条件 (iii)，(iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii) 点 Q は領域 D の点である。

(iv) 点 Q は，4 点 O，A，B，P のいずれからも十分離れている。

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

点 P(a, a^2) は領域 D の点だから，$0 \leqq a \leqq 3$ かつ $0 \leqq a^2 \leqq 3$，$\therefore 0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$

図 1 に点 O，A，B とそれらの点から十分離れていない領域 S_O，S_A，S_B を示す。

条件 (ⅰ) を満たす点 P(a, a^2) が条件 (ii) を満たすことは，P が S_O，S_A，S_B に入らないこと。

明らかに，P(a, a^2) は S_A，S_B に入ることはない。

明らかに，$1 \leqq a$ であれば P が S_O に入ることはない。

したがって，$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ （答）

(2)

領域 S_O，S_A，S_B の面積はそれぞれ $1\times1 = 1$

点 P(a, a^2) から十分離れていない点の領域で領域 D に含まれる領域 S_P は，頂点が

$(a-1, a^2-1)$，$(a-1, a^2+1)$，$(a+1, a^2-1)$，$(a+1, a^2+1)$ の正方形で面積は $2\times2 = 4$

ただし，$a^2 > 2$ では，正方形 が領域 D をとび出る。

領域 D にあって，4 点 O，A，B，P のいずれからも十分離れている点 Q の領域 S_Q

ⅰ) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

点 O，A，B，P のいずれからも十分離れていない領域の面積は

$9-S_Q = (S_O + S_A + S_B + S_P) - (S_O + S_A + S_B) \cap S_P = (3+4) - (S_O + S_A + S_B) \cap S_P$

ただし S_O，S_A，S_B，S_P は領域の名称とともに面積をも表すものとする。

$S_O \cap S_P = (1-a+1)(1-a^2+1) = (a-2)(a^2-2) = a^3-2a^2-2a+4$

$S_A \cap S_P = (a+1-2)(1-a^2+1) = (a-1)(2-a^2) = -a^3+a^2+2a-2$

$S_B \cap S_P = (a+1-2)(a^2+1-2) = (a-1)(a^2-1) = a^3-a^2-a+1$

$9-S_Q = 7-(a^3-2a^2-a+3) = -a^3+2a^2+a+4$

$f(a) = S_Q = a^3-2a^2-a+5$ （答）

ii) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき

領域 S_P の面積は，$2\times\{3-(a^2-1)\} = 2(4-a^2)$

点 O，A，B，P のいずれからも十分離れていない領域の面積は

$9-S_Q = (S_O + S_A + S_B + S_P) - (S_O + S_A + S_B) \cap S_P = 3+2(4-a^2) - S_B \cap S_P$

$= 3+2(4-a^2) - 1\times\{(a+1)-2\} = -2a^2-a+12$

$f(a) = S_Q = 2a^2+a-3$ （答）

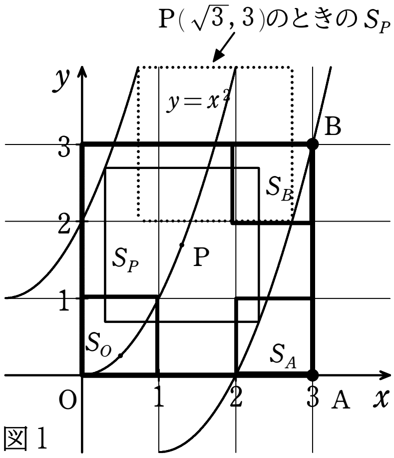

図1

(3)

ⅰ) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$

$f(a) = a^3 - 2a^2 - a + 5$

$f'(a) = 3a^2 - 4a - 1 = 0$ となる $a = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ においては，$f'(a) \leqq 0$ なので $f(a)$ は単調減少

$f(a)$ の最小値は $f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$

ⅱ) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき

$f(a) = 2a^2 + a - 3 = 2\left(a + \dfrac{1}{4}\right)^2 - \dfrac{25}{8}$，したがって $f(a)$ の最小値は $f(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$

以上によって $f(a)$ を最小値にする a は $\sqrt{2}$ （答）

＜解説＞

(1)

図1のような図を描けば，解答は容易だろう。数式を追うと以下のようになる。

O から十分離れている $\Leftrightarrow a \geqq 1$ または $a^2 \geqq 1$，$\therefore a \geqq 1$

A から十分離れている $\Leftrightarrow |a-3| \geqq 1$ または $a^2 - 0 \geqq 1$，$\therefore a \leqq 2$ または $a \geqq 1$

B から十分離れている $\Leftrightarrow |a-3| \geqq 1$ または $|a^2 - 3| \geqq 1$，$\therefore a \leqq 2$ または $a \leqq \sqrt{2}$，$\therefore a \leqq 2$

以上によって，$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$

(2)

図1のように，点 P から十分離れていない領域 S_P は P を中心とする 2×2の正方形で，

$1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ の範囲で，$y = x^2$ に沿って移動する。

点 O，A，B，P のいずれからも十分離れていない領域の面積は

$(S_O + S_A + S_B + S_P) - (S_O + S_A + S_B) \cap S_P$ であることを考慮すれば，十分離れている点 Q の領域 S_Q を求めることは容易だろう。O，A，B，P のいずれからも

（十分離れている点 Q の領域の面積）＋（十分離れていない点 の領域の面積）=3×3 である。

第　4　問

座標平面上の曲線

$$C: y = x^3 - x$$

を考える。

(1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ。

(i) 点 P を通る直線 l で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2) 次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(ii) 点 P を通る直線 l で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 l と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。

＜解答＞

(1)

$C: y = x^3 - x$　①

座標平面上の任意の点 P を (p, q) とする。

a を実数として，点 P を通る直線 $l:\ y = a(x - p) + q$　②

①，② を連立させた 3 次方程式 $x^3 - (1+a)x + ap - q = 0$　③

$f(x) = x^3 - (1+a)x + ap - q$　④　とおく。

$f'(x) = 3x^2 - (1+a) = 0$ とすれば,

$a > -1$ のとき，$b_1 = -\sqrt{\dfrac{1+a}{3}}$，$b_2 = \sqrt{\dfrac{1+a}{3}}$ として，$f'(b_1) = f'(b_2) = 0$ だから

④ は $x = b_1$ において極大値，$x = b_2$ において極小値をとる。

$f(b_1) > 0$，$f(b_2) < 0$ であれば，④ は x 軸と 異なる 3 点で交わるから，① と ② は 3 点で交わる。

$$f(b_1) = \frac{2(1+a)}{3}\sqrt{\frac{1+a}{3}} + ap - q \quad ⑤$$

$$f(b_2) = -\frac{2(1+a)}{3}\sqrt{\frac{1+a}{3}} + ap - q \quad ⑥$$

いかなる点 (p, q) に対しても，十分大きな実数 a をとれば，$f(b_1) > 0$，$f(b_2) < 0$ となる。

したがって，$f(x)$ は x 軸と 3 点で交わるので，③ は 3 つの異なる実数解をもつから曲線 C と直線 l とは相異なる 3 点で交わる。すなわち座標平面上のすべての点 P において，点 P を通る直線 l で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2)

曲線 C は原点に関して対称だから,

直線 l と C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しい $\Longleftrightarrow$ l は原点に関して対称（l は原点を通る）

直線 l を $y = ax$　⑦ とすれば，① と ⑦ を連立させた 3 次方程式

$y = x^3 - (1+a)x = 0$　⑧

⑧ の解は $x = 0$，$\pm\sqrt{1+a}$

3 つの実数解をもつためには $1 + a > 0$，$\therefore a > -1$　⑨

⑨を満たす直線 $y = ax$ 上の点 P はすべて (ii) を満足し，図 1 に示す打点部である。

ただし 直線 $y = -x$ および y 軸上の点は含まない。

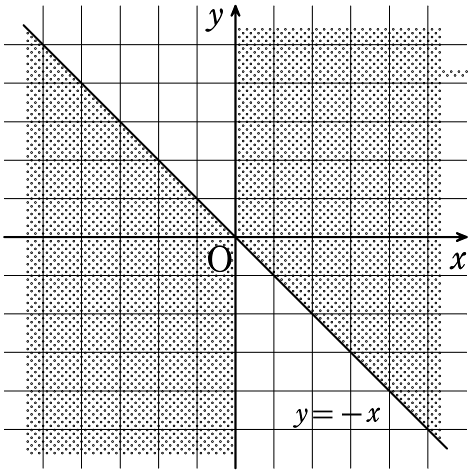

図１

＜解説＞

(1)

任意の点 P (p, q) を通る直線 l で曲線 C と連立させた 3 次方程式 ③ が異なる 3 つの実数解を必ずもつ場合があることを証明すればよい。

⑤ は a の 3/2乗 の式だから，P (p, q) の座標に関わらず，a が十分大きな値であれば，⑤ は正すなわち $f(b_1) > 0$ となる。同様に a が十分大きな値であれば，⑥ は負すなわち $f(b_2) < 0$ となる。

(2)

図２に曲線 C：$y = x^3 - x$　① を示す。曲線Cは原点に関して対称である。

直線l：$y = a(x - p) + q$ が曲線 C と 3 点で交わるとすれば，そのうちの 1 点は必ず $-\sqrt{\dfrac{1}{3}} < x < \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ にある。すると，C と l とが囲む 2 つの部分の面積が同じであるためには，l が原点を通り，2 つの部分が原点に関して対称な図形であることがわかる。

3 点で交わるためには，$a > -1$　⑨ でなければならない。原点を通り傾きが -1 を超える直線上の点が求める点 P に相当することを意味する。

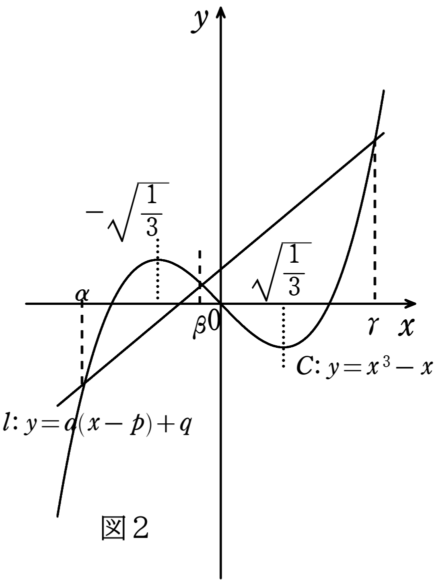

図２

別解を考えてみよう。

C と l との交点の x 座標をα，β，γ とする。C と l が囲む二つの部分の面積を S_1，S_2 とする。

$S_1=\int_\alpha^\beta\{x^3-(1+a)x+ap-q\}$，$S_2=\int_\beta^\gamma\{-x^3+(1+a)x-ap+q\}$，$S_1=S_2$ として，

$$S_1-S_2=\int_\alpha^\beta\{x^3-(1+a)x+ap-q\}dx-\int_\beta^\gamma\{-x^3+(1+a)x-ap+q\}dx$$

$$=\int_\alpha^\gamma\{x^3-(1+a)x+ap-q\}dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{1+a}{2}x^2+(ap-q)x\right]_\alpha^\gamma$$

$$=\frac{1}{4}(\gamma^4-\alpha^4)-\frac{1+a}{2}(\gamma^2-\alpha^2)+(ap-q)(\gamma-\alpha)=0$$

$\therefore\ \frac{1}{4}(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma+\alpha)-\frac{1+a}{2}(\gamma+\alpha)+(ap-q)=0$ ⑩

一方，$\alpha^3-(1+a)\alpha+ap-q=0$ ⑪，$\gamma^3-(1+a)\gamma+ap-q=0$ ⑫ だから，

⑪+⑫より，$ap-q=-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\{(\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2)-(1+a)\}$ ⑬

⑬ を⑩ に代入して，$\frac{1}{4}(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma+\alpha)-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\{(\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2)=-\frac{1}{4}(\gamma+\alpha)(\gamma-\alpha)^2=0$

$\gamma\neq\alpha$だから，$\gamma=-\alpha$，$\therefore$ ⑬より$ap-q=0$

したがって条件 (ii) を満たす点 $\mathrm{P}(p,q)$ を通る直線 l ： $y=a(x-p)+q$ ② は原点を通る直線 $y=ax$ ⑭ 上の点に帰着する。しかるに，C と l が異なる 3 点で交わることから，$a>-1$ ⑨，したがって 条件 (ii) を満たす点 $(p,q)\in\{(x,y):y=ax,\ a>-1\}$ となる（図 1 ）。

第 5 問

座標空間内の点 A (0 , 0 , 2) と点 B (1 , 0 , 1) を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が PQ $=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

<解答>

点 P を (x_P,y_P,z_P) として，$x_P{}^2+y_P{}^2=(2-z_P)^2$，$1\leqq z_P\leqq 2$，$0\leqq x_P{}^2+y_P{}^2\leqq 1$ ①

点 Qを $(x_Q,y_Q,0)$ として，

$(\mathrm{PQ})^2=(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2+z_P{}^2=2^2=4$ ②

点 M は $(x_M,y_M,z_M)=\left(\frac{x_P+x_Q}{2},\frac{y_P+y_Q}{2},\frac{z_P}{2}\right)$

$x_M=\frac{x_P+x_Q}{2}$，$y_M=\frac{y_P+y_Q}{2}$，$z_M=\frac{z_P}{2}$，$z_M=t$ とおけば ① より，$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$

$x_Q=2x_M-x_P$，$y_Q=2y_M-x_P$

② は $(x_P-x_M)^2+(y_P-y_M)^2+z_M{}^2=(x_M-x_P)^2+(y_M-y_P)^2+t^2=1$

$(x_M-x_P)^2+(y_M-y_P)^2=1-t^2$ ③

③ から線分 PQ の中点 M は $z=t$ の平面において，(x_P,y_P) を中心とする半径 $r_M=\sqrt{1-t^2}$

の円 C_M となることがわかる。$(x_P,\ y_P)$ が変化するに伴い，この C_M の円周が覆う領域が $z=t$ の平面における K の断面となる。

$(x_P,\ y_P)$ は $z=2t$ の平面における曲面 S の断面上の点で，$(0,0)$を中心とする円 C_P となる。

$y_P=0$ のとき， $x_P=z_P-2=2t-2$ だから，この円の半径は $r_P=2(1-t)$

$r_P{}^2-r_M{}^2=\{2(1-t)\}^2-(\sqrt{1-t^2})^2=(5t-3)(t-1)$,

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{3}{5}$ のとき $2(1-t)\geqq\sqrt{1-t^2}$ ，すなわち $r_P\geqq r_M$

$\dfrac{3}{5}\leqq t\leqq 1$ のとき $2(1-t)\leqq\sqrt{1-t^2}$ ，すなわち $r_P\leqq r_M$

$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{3}{5}$ のとき，

K の断面となる C_M が覆う領域 は図 1 (1)より，円 C_M の中心が円 C_P の円周上を動きながら，その円周が覆う領域（打点部）となる。半径 (r_P-r_M) の円内を覆うことはない。

したがってその面積 $D(t)$ は

$$D(t)=\pi\{(r_P+r_M)^2-(r_P-r_M)^2\}=4\pi r_Pr_M=8\pi(1-t)\sqrt{1-t^2}$$

$\dfrac{3}{5}\leqq t\leqq 1$のとき

C_M が覆う領域 は図 1 (2)のようになり，半径 (r_M-r_P) の円内を覆うことはない。

$$D(t)=\pi\{(r_P+r_M)^2-(r_P-r_M)^2\}=4\pi r_Pr_M=8\pi(1-t)\sqrt{1-t^2}$$

以上によって K の体積は $V=8\pi\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\sqrt{1-t^2}\,dt$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は図２の打点部の面積だから

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

また，$\left\{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right\}'=-2t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ だから

$$-\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{3}\left[(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

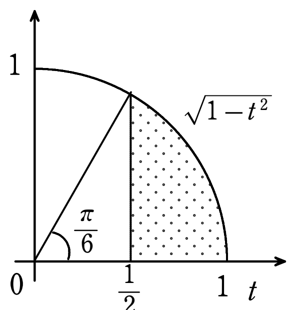

図２

$$V=8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\sqrt{1-t^2}\,dt=8\pi\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\pi\left(\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}\right)\qquad\text{（答）}$$

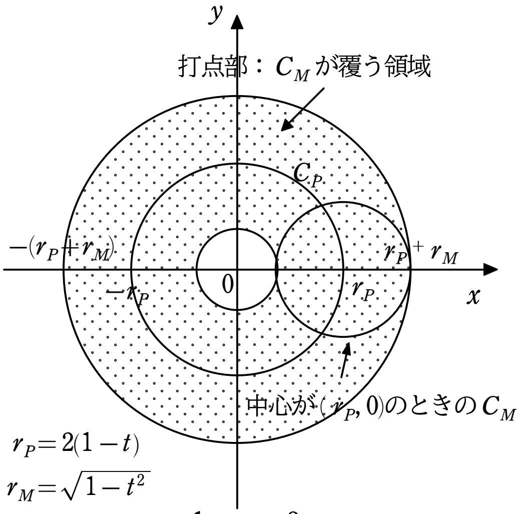

図 1 (1)　$\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{3}{5}$のとき

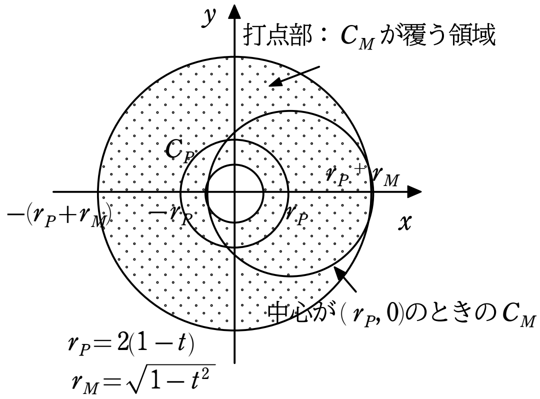

図 1 (2)　$\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{3}{5}$のとき

＜解説＞

Kはz軸を回転して得られる立体だから，z軸に垂直な断面のKの面積を求め，z軸方向に積算していけば良い。問題文からKがどのような立体なのか描こう。Q がxy平面上を P からの距離 2で動くということは，P を円錐の頂点として Q は円錐の底面の円になる。すると PQ の中点 M もその円錐の高さが半分の底面の円を描く。

そして点 P は$(0, 0, 2)$を頂点としz軸を軸とする円錐の底面円の円周上の点である。したがって，Mの円は$z=t$の平面の原点$(0, 0)$を中心として回転する。この結果，Mが覆う領域は原点から最遠点$(r_P+r_M, 0)$が描く円と最近点$(|r_P-r_M|, 0)$が描く円の間の円環となる。

第　6　問

Oを原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数kに対して，ベクトル$\overrightarrow{v_k}$を

$$\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3}, \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも$\frac{1}{2}$の確率で出るコインをN回投げて，座標平面上に点X_0，X_1，X_2，・・・，X_Nを以下の規則 (ｉ)，(ii) に従って定める。

(ｉ) X_0は O にある。

(ii) nを 1 以上N以下の整数とする。X_{n-1}が定まったとし，X_nを次のように定める。

- n回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{OX_n}=\overrightarrow{OX_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$$

によりX_nを定める。ただし，kは 1 回目からn回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n回目のコイン投げで裏が出た場合，X_nをX_{n-1}と定める。

(1) $N=8$とする。X_8が O にある確率を求めよ。

(2) $N=200$とする。X_{200}が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうどr回出る確率

を p_r とおく。ただし $0 \leqq r \leqq 200$である。p_r を求めよ。また p_r が最大となる r の値を求めよ。

＜解答＞

(1)

図のように，$\overrightarrow{v_k}$ は $k \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$ に応じて３つの値をとる。$\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\vec{0}$ だから，$X_N = X_0$であるためには，コイン投げの過程で $\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ が同数出ることが必要である。

コイン投げで表が出る事象をA，裏が出る事象をBとする。Aの出現のたびに，$\overline{OX_{n-1}}$ に $\overrightarrow{v_k}$ が加算されるので，X_8 がOにあるためには $(\overrightarrow{v_0},\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2})$ の組が 0，1，2 回出現することが必要。したがって，Aの出現は 0，3，6 回に限定される。

i) A の出現が 0 回のとき

8 回連続してBが出現するので，コイン投げの過程は BBBBBBBB の一通り。ただし左から右へコイン投げが進行するものとする。

ii) A の出現が 3 回のとき

5 回の B が出現する。AとBの出現順序によって

$(\overrightarrow{v_0},\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3},\ \overrightarrow{v_4},\ \overrightarrow{v_5})$ すなわち $(\overrightarrow{v_0},\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_0},\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2})$ のうち３つの異なる $\overrightarrow{v_k}$ が選択される。

最初に A が出現して $\overrightarrow{v_0}$ が選択されると，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ が選択される場合の数は 4 通り

すなわち ABABABBBB，ABABBBBA，ABBABBAB，ABBBBABA，

最初に B が出現して $\overrightarrow{v_1}$ が選択されると，$\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_2}$ が選択される場合の数は 2 通り

すなわち BABABABB，BABBABBA

最初に BB が出現して $\overrightarrow{v_2}$ 選択されると，$\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_1}$ が選択される場合の数は 1 通り

すなわち BBABABAB

最初に BBB が出現して $\overrightarrow{v_0}$ 選択されると，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ が選択される場合の数は 1 通り

すなわち BBBABABA

以上によって，合計 8 通り

iii) A の出現が 6 回のとき

$(\overrightarrow{v_0},\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2})$ がこの順序で選択されると，$\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_2}$ の一通り

すなわち AABAABAA

i)，ii)，iii) の合計 10 通り。それぞれの確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ だから，合計して $\left(\frac{1}{2}\right)^8 \times 10 = \frac{5}{128}$　（答）

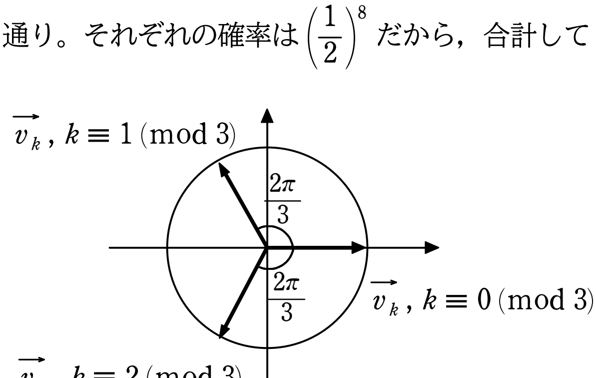

図 1

(2)

(1) の検討から，X_{200} が O にあるためには，表すなわちA が 3 の倍数出現することが必要。

すると $r\equiv 1,\ 2\pmod 3$ のとき $p_r=0$，$r\equiv 0\pmod 3$ の場合のみ p_r は有意な値をもつ。

$r=0$ のとき，すべて裏だから $X_{200}=X_0$，$p_r=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{200}$

$r=3j$，$j=1,2,\ldots,65,66$，$200=3\times 66+2\equiv 2\pmod 3$

A が r 個のとき，B は $(200-r)$個

$(200-r)$ 個の B の間に r 個の A を挿入することにより，$X_{200}=X_0$ とすることを考える。

$(200-r)$ 個の B の並びの右側にA が出現すると，それより左側のB の個数によって，$\overrightarrow{v_k}$ が選択される。B の並びにおいて，m 番目の B を$\mathrm{B_m}$ ($\mathrm{m}=1,2,\ldots,200-r$)とすると，A が $\mathrm{B_m}$ と$\mathrm{B_{m+1}}$の間で出現すると，$\overrightarrow{v_m}$ が選択される。ただし $m\equiv 0,\ 1,\ 2\pmod 3$

$\mathrm{B_1\ B_4\ B_7}\ldots\mathrm{B_{3\times 66+1-r}}$ の $\mathrm{B_m}$ それぞれの右側に A が出現すると，B が A の左に $m\equiv 1\pmod 3$ 個存在するから，$\overrightarrow{v_1}$ が選択される。

したがって $\overrightarrow{v_1}$ が選択される A の位置の個数は $(3\times 66+1-r-1)/3+1=67-j$

このとき，$\mathrm{B_1}$ の左に A は来ないから，B とA の並びの組み合わせの数は ${}_{67-1}C_j$

$\mathrm{B_2\ B_5\ B_8}\ldots\mathrm{B_{3\times 66+2-r}}$ の $\mathrm{B_m}$ それぞれの右側に A が出現すると，B が A の左に $m\equiv 2\pmod 3$ 個存在するから，$\overrightarrow{v_2}$ が選択される。 したがって $\overrightarrow{v_2}$ が選択されるA の位置の個数は $67-j$

このとき、$\mathrm{B_2}$ の左に A は来ないから，B とA の並びの組み合わせの数は ${}_{67-1}C_j$

$\mathrm{B_3\ B_6\ B_9}\ldots\mathrm{B_{3\times 66+3-r}}$ の $\mathrm{B_m}$ それぞれの右側に A が出現すると，B が A の左に $m\equiv 0\pmod 3$ 個存在するから，$\overrightarrow{v_0}$ が選択される。したがって $\overrightarrow{v_0}$ が選択されるA の位置の個数は $67-j$

このとき，$\mathrm{B_3}$ の左に A は来ないから，B とA の並びの組み合わせの数は ${}_{67-1}C_j$

以上によって，$\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ が選択される場合の A と B の並びの場合の数はいずれも ${}_{66}C_j$

$$p_r=\frac{({}_{66}C_j)^3}{2^{200}}=\frac{\left({}_{66}C_{\frac{r}{3}}\right)^3}{2^{200}}\ ,\ r\equiv 0\pmod 3 \text{ のとき}$$

$=0$，$r\equiv 1,2\pmod 3$ のとき　　　　　　　　(答)

$${}_{66}C_{j+1}-{}_{66}C_j=\frac{66!}{(j+1)!(66-j-1)!}-\frac{66!}{j!(66-j)!}=\frac{66!}{(j+1)!(66-j-1)!}\left(1-\frac{j+1}{66-j}\right)$$

$$=\frac{66!}{(j+1)!(66-j-1)!}\left(\frac{65-2j}{66-j}\right),$$

$\therefore\ j\leqq 32$ のとき ${}_{66}C_j<{}_{66}C_{j+1}$，$j\geqq 33$ のとき ${}_{66}C_j>{}_{66}C_{j+1}$

したがって $\ldots<{}_{66}C_{31}<{}_{66}C_{32}<{}_{66}C_{33}>{}_{66}C_{34}>{}_{66}C_{35}\ldots$

したがって p_r が最大となる r の値は $r=3j=99$　(答)

<解説>

N 回のコイン投げで，$X_N=X_0$ であるためには，規則をよく理解し，どのような条件が必要なのか考え出さなくてはならない。

まずは $\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3}, \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ を吟味すると，裏の回数 k において $k \equiv 0, 1, 2\ (\bmod 3)$ に対応した3つのベクトル $\overrightarrow{v_0}$， $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ をとり， $\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\vec{0}$ であることがわかる。

コイン投げでA，Bの並びが決まるが，Aが出るごとにA以前に出たBの回数 k に応じた $\overrightarrow{v_k}$ が X_n に加算されることから， N 回のコイン投げで、$\overrightarrow{v_0}$， $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ が同数出るようなA，Bの並びを求める問題となる。

合計200個のAとBの並びの中で，Aの位置をどのように条件づけるかを次に考えることになる。

＜総評＞

例年にも増して骨の折れる問題が揃ったと感じた。解答方針の着想，解答に至る論理の展開，結果を得るための計算，いずれも標準以上の数学的力量を要求される。完答2問，他は部分点を得て，60点が得点のめやすか。，

第１問

解答方針の立てやすい積分の問題。部分積分法や置換積分法を用いて，原始関数を求める。演習問題等で経験があれば容易に対応できるだろう。難易度Ｂ。

第２問

合同式の演算を利用する整数の問題。先ずは，合同式の演算の利用を着想することが必要になる。合同式の演算に習熟してないと，着想自体が難しい。⑴は数学的帰納法を利用することは直ぐに気づくだろう。⑵では a_k を法とする合同式の演算の利用という気づきがないと，困難である。その上で，数列 $\{a_n\}$ の定義から $a_n \equiv 0\ (\bmod\ a_k)$ が満たす n，k の関係性を求める。難易度Ａ

第３問

難しい問題ではないが，文章を的確に読み込み，題意を把握しなければならない。やや煩瑣であり，時間がかかりそうだ。図を描いて考察することが良い。難易度はＢ。

第４問

問題そのものは難解ではないのだが，題意を理解し，何を明らかにすべきかを明確にすることがやや難しい。Ｂ＋

第５問

立体図形の体積を求める問題。この種の問題は数年に一度くらいの頻度で出題されるが、立体の認識力には個性差が大きいように思う。日頃から，立体図形を脳内に描く訓練をしておくことが重要であろう。工学部の建築土木系，機械工学系の学びでは立体感覚が非常に約にたつ。

解答方針の着想と断面の面積式を求めることが難しいので，難易度はＡ。

第６問

確率の問題だが，題意から表式に至る論理の展開が難しいと思う。 X_N が X_0 になるためには， N 回のコイン投げによって， $\overrightarrow{v_0}$， $\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ が同数出ることが必要ということを明らかにする。同数出るためには，どのような条件が必要か，となると約30分という時間内では難しいだろう。難易度はＡ＋。

数学（文科）（配点80点）100分

第　1　問

a，b を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2+ax+b$ を C とおく。C は，原点で垂直に交わる2本の接線 l_1，l_2 を持つとする。ただし，C と l_1 の接点 $\mathrm{P_1}$ の x 座標は，C と l_2 の接点 $\mathrm{P_2}$ の x 座標より小さいとする。

(1) b を a で表せ。また a の値はすべての実数をとりうることを示せ。

(2) $i=1, 2$ に対し，円 D_i を，放物線 C の軸上に中心を持ち，点 $\mathrm{P_i}$ で l_i と接するものと定める。D_2 の半径が D_1 の半径の2倍となるとき，a の値を求めよ。

<解答>

(1)

l_1 ： $y=p_1x$，l_2 ： $y=p_2x$ とする。両者は垂直に交わるので，$p_1p_2=-1$　①

また，C は下に凸だから，$p_1<0$，$p_2>0$　②

C と l_1 を連立させた方程式 $x^2+ax+b=p_1x$，

すなわち $x^2+(a-p_1)x+b=0$ は重解を持つ。解と係数の関係から，$(a-p_1)^2-4b=0$　③

同様に，$(a-p_2)^2-4b=0$　④

②，③，④より $a-p_1=-(a-p_2)$，$\therefore$ $p_1+p_2=2a$　⑤

②，⑤より，$p_1=a-\sqrt{a^2+1}$，$p_2=a+\sqrt{a^2+1}$　⑥

③より，$b=\dfrac{(a-p_1)^2}{4}=\dfrac{a^2+1}{4}$　（答）

⑥より，任意の実数 a が②を満たすので，a の値はすべての実数をとりうる。

(2)

l_1 ： $y=p_1x=(a-\sqrt{a^2+1})x$，l_2 ： $y=p_2x=(a+\sqrt{a^2+1})x$

C と l_1 を連立させた方程式より，

$$x^2+(a-p_1)x+b=x^2+\sqrt{a^2+1}\,x+\frac{a^2+1}{4}=\left(x+\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}\right)^2=0$$

C と l_1 の接点は $\left(-\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}, \dfrac{-a\sqrt{a^2+1}+a^2+1}{2}\right)=(\alpha, p_1\alpha)$ とおく。

同様に，C と l_2 の接点は $\left(\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}, \dfrac{a\sqrt{a^2+1}+a^2+1}{2}\right)=(\beta, p_2\beta)$ とおく。

$x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，放物線 C の軸は $x=-\dfrac{a}{2}$

$(\alpha, p_1\alpha)$ を通り l_1 に垂直な直線は $y-p_1\alpha=p_2(x-\alpha)$，

$\therefore$ $y=p_2x+(p_1-p_2)\alpha=(a+\sqrt{a^2+1})x+(a^2+1)$

$x=-\dfrac{a}{2}$ とおけば，$y=\dfrac{a^2}{2}+1-\dfrac{a\sqrt{a^2+1}}{2}$，

$(\beta, p_2\beta)$ を通り l_2 に垂直な直線は $y-p_2\beta=p_1(x-\beta)$，

$\therefore\ y = p_1x + (p_2 - p_1)\beta = \left(a - \sqrt{a^2+1}\right)x + (a^2+1)$

$x = -\dfrac{a}{2}$ とおけば，$y = \dfrac{a^2}{2} + 1 + \dfrac{a\sqrt{a^2+1}}{2}$

l_1 に接する円 D_1 の半径 r_1 は，接点 $(\alpha,\ p_1\alpha) = \left(-\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2},\ \dfrac{a^2+1-a\sqrt{a^2+1}}{2}\right)$ と

円の中心 $\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2+2-a\sqrt{a^2+1}}{2}\right)$ との距離から，

$$r_1{}^2 = \left(\frac{a-\sqrt{a^2+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a^2-2a\sqrt{a^2+1}+a^2+2}{4} = \frac{a^2-a\sqrt{a^2+1}+1}{2}$$

同様に l_2 に接する円 D_2 の半径 r_2 は，接点 $(\beta,\ p_2\beta) = \left(\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2},\ \dfrac{a^2+1+a\sqrt{a^2+1}}{2}\right)$ と

円の中心 $\left(-\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2+2+a\sqrt{a^2+1}}{2}\right)$ との距離から

$$r_2{}^2 = \left(\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2a\sqrt{a^2+1}+a^2+2}{4} = \frac{a^2+a\sqrt{a^2+1}+1}{2}$$

$r_2{}^2 = 4r_1{}^2$ より

$$\frac{a^2+a\sqrt{a^2+1}+1}{2} = 2a^2 - 2a\sqrt{a^2+1} + 2$$

$$a^2+1+a\sqrt{a^2+1} = 4a^2 - 4a\sqrt{a^2+1} + 4$$

$3a^2 - 5a\sqrt{a^2+1} + 3 = 0$，$a^2 = \dfrac{9}{16}$，$\therefore\ a = \pm\dfrac{3}{4}$，$r_2 > r_1$ なので $a = \dfrac{3}{4}$　（答）

<解説>

接点 $(\alpha,\ p_1\alpha)$ を通り，l_1 に垂直な直線は $y - p_1\alpha = p_2(x-\alpha)$，
接点 $(\beta,\ p_2\beta)$ を通り，l_2 に垂直な直線は $y - p_2\beta = p_1(x-\beta)$，
であることに注意する。

第 2 問

$y = x^3 - x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-\alpha)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を l とする。C と l は相異なる 3 点で交わるとする。

(1) α のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) C と l の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を β，γ とする。ただし $\beta < \gamma$ とする。
$\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 \fallingdotseq 0$ となることを示せ。

(3) (2) の β，γ を用いて，

$$u = 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}$$

と定める。このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ。

<解答>

(1)

$y=f(x)=x^3-x$ ①， $f'(x)=3x^2-1$， $f'(\alpha)=3\alpha^2-1=p$ とおく。

$p=0$ のとき，直線 l は y 軸に平行になり， C と 3 点で交わらないので，以後 $p\fallingdotseq 0$とする。

したがって直線 l の方程式は $y-(\alpha^3-\alpha)=\dfrac{-1}{p}(x-\alpha)$

すなわち，$y=\dfrac{-1}{p}\{(x-\alpha)-p(\alpha^3-\alpha)\}$ ②

C と l とが相異なる 3 点で交わるための条件を考察する。① と ② を連立させて整理すると，

$p\{(x^3-\alpha^3)-(x-\alpha)\}=p(x-\alpha)\{(x^2+\alpha x+\alpha^2)-1\}=-(x-\alpha)$ ③

C と l とが相異なる 3 点で交わる。$\Leftrightarrow$ 3 次方程式 ③ が 3 つの異なる実数解をもつ。

$\Leftrightarrow$ $x=\alpha$ が 解の一つ。 $p\{(x^2+\alpha x+\alpha^2)-1\}+1=0$ ④ が α 以外の 2 つの実数解をもつ。

2 次方程式 ④ が $x=\alpha$ 以外の 2 つの実数解をもつための条件を考察する。④ を整理すると

$x^2+\alpha x+\alpha^2-1+\dfrac{1}{p}=0$ ⑤， $x=\alpha$として $3\alpha^2-1+\dfrac{1}{p}=3\alpha^2-1+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}\fallingdotseq 0$

したがって $x=\alpha$ は ④ の解ではない。⑤ の解の判別式は

$$D=\alpha^2-4\left(\alpha^2-1+\frac{1}{p}\right)=4-3\alpha^2-\frac{4}{p}=\frac{(4-3\alpha^2)p-4}{p}=\frac{(4-3\alpha^2)(3\alpha^2-1)-4}{p}$$

$$=\frac{-9\alpha^4+15\alpha^2-8}{p}=\frac{-9}{p}\left\{\left(\alpha^2-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{7}{36}\right\}$$

$p=3\alpha^2-1>0$ のとき， $D<0$，$\therefore$ ④ は実数解をもたない。

$p=3\alpha^2-1<0$ のとき， $D>0$，$\therefore$ ④ は相異なる 2 つの実数解をもつ。

④ が 2 つの実数解をもつ。$\Leftrightarrow D>0\Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

したがって，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ （答）

(2)

C と l の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標 β，γ は 2 次方程式 ⑤ の実数解である。

解と係数の関係により，$\beta+\gamma=-\alpha$，$\beta\gamma=\alpha^2-1+\dfrac{1}{p}$

$$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1=(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma-1=\alpha^2-\alpha^2+1-\frac{1}{p}-1=-\frac{1}{p}=\frac{-1}{3\alpha^2-1}\fallingdotseq 0$$

(3)

$$u=4\alpha^3+\frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}=4\alpha^3-(3\alpha^2-1)=4\alpha^3-3\alpha^2+1$$

$u=u(\alpha)$ として， $u'(\alpha)=12\alpha^2-6\alpha=6\alpha(2\alpha-1)$

u は図 1 のように変化するから， $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}<u\leqq 1$ （答）

図 1

α	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$u'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(\alpha)$	$\frac{-4\sqrt{3}}{9}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$

＜解説＞

(1)

C と l の方程式を連立させた 3 次方程式が相異なる 3 つの実数解をもてば良い。接線の傾きを p とでもして数式計算をして，最後に α を繰り込むと処理しやすい。

第　3　問

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 4,\quad a_{n+1} = a_n{}^2 + n(n+2) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots..)$$

(1) a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ。

(2) a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数を求めよ。

＜解答＞

(1)

$a_1 \pmod 3 = 4 \equiv 1 \pmod 3$

$a_2 \pmod 3 \equiv (a_1{}^2 + 3) \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$

$a_3 \pmod 3 \equiv \{a_2{}^2 + 2(2+2)\} \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$

$a_4 \pmod 3 \equiv \{a_3{}^2 + 3(3+2)\} \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$

$a_5 \pmod 3 \equiv \{a_4{}^2 + 4(4+2)\} \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$

$a_6 \pmod 3 \equiv \{a_5{}^2 + 5(5+2)\} \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3$

$a_7 \pmod 3 \equiv \{a_6{}^2 + 6(6+2)\} \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$

$a_8 \pmod 3 \equiv \{a_7{}^2 + 7(7+2)\} \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$

$a_9 \pmod 3 \equiv \{a_8{}^2 + 8(8+2)\} \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$

$a_{10} \pmod 3 \equiv \{a_9{}^2 + 9(9+2)\} \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$

$a_{11} \pmod 3 \equiv \{a_{10}{}^2 + 10(10+2)\} \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$

$a_{12} \pmod 3 \equiv \{a_{11}{}^2 + 11(11+2)\} \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3$

上記のことから，

$n \equiv 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 0 \pmod 6$ に応じて，$a_n \equiv 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2 \pmod 3$　が推定される。

命題 A：$a_{6k}\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$　(k は正の整数) を数学的帰納法によって証明する。

$k=1$ のとき， $a_6\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv \{\ {a_5}^2 + 5\ (5+2)\}\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$となって成立する。

$k = j$のとき命題 A： $a_{6j}\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ を仮定， $j=2, 3, 4, \ldots$

$a_{6j+1}\ (\mathrm{mod}\ 3) = \{\ (a_{6j}\ )^2 + 6j\,(6\ j+2)\}\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$

$a_{6j+2}\ (\mathrm{mod}\ 3) = \{\ (a_{6j+1}\ )^2 + (6j+1)\ (6\ j+1+2)\}\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$

$a_{6j+3}\ (\mathrm{mod}\ 3) = \{\ (a_{6j+2}\ )^2 + (6j+2)\ (6\ j+2+2)\}\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$

$a_{6j+4}\ (\mathrm{mod}\ 3) = \{\ (a_{6j+3}\ )^2 + (6j+3)\ (6\ j+3+2)\}\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$

$a_{6j+5}\ (\mathrm{mod}\ 3) = \{\ (a_{6j+4}\ )^2 + (6j+4)\ (6\ j+4+2)\}\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$

$a_{6(j+1)}\ (\mathrm{mod}\ 3) = \{\ (a_{6j+5}\ )^2 + (6j+5)\ (6\ j+5+2)\}\ (\mathrm{mod}\ 3) \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$

$k = j$のとき 命題 A の成立を仮定すれば， $k = j+1$ のときも成立し， 命題 A は $k=1$ のとき成立するから，数学的帰納法によっって，命題 A は任意の k (正の整数) において成立する。

$2022=6\times337$だから $a_{2022} = a_{6\times337} \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ ，すなわち a_{2022} を 3 で割った余りは 2　(答)

(2)

$a_{2023} =\ (\ a_{2022}\ )^2 + 2022\times2024$

これより， a_{2022} と a_{2023} の公約数は $2022\times2024=(1\times2\times3\times337)\ (1\times2^3\times253)$の約数,

$a_{2024} = (\ a_{2023}\ )^2 + 2023\times2025$

これより， a_{2023} と a_{2024} の公約数は$2023\times2025=(1\times7\times289)\ (1\times 3^4 \times5^2\ )$の約数

したがって， a_{2022}， a_{2023}， a_{2024} の公約数は

$(1\times2\times3\times337)\ (1\times2^3\times253)$と$(1\times7\times289)\ (1\times 3^4\times5^2\ )$の約数でなければならない。

すると，約数は1，3 。しかし $a_{2022} = a_{6\times337} \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ で 3 は約数ではない。

したがって， a_{2022}， a_{2023}， a_{2024} の最大公約数は 1　(答)

＜解説＞

(1)

$n=2022$という大きな項数の $a_{2022}\ (\mathrm{mod}\ 3)$を求める問題。合同式の演算の問題ということに，まずは気づく必要がある。 n が大きいことから， a_{2022} の値を直接求めることは難しいので，解答方針の着眼が重要だ。 解答方針の手がかりを得るために，n を 1 から増やしていきながら， $a_n\ (\mathrm{mod}\ 3)$ を求めて，何らかの規則性を見つけてみよう。

このとき，合同式の演算に習熟していると速い。東大入試の数学には整数問題が頻出するが，決して難しいものではないので，慣れておきたい。整数問題は計算力よりも，数学論理の思考力が試されるので，重視されているのではないか。

(2)

(1)で $a_{2022} = a_{6\times337} \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ が導かれるので，これを活用する。数列の定義から， a_{2022}， a_{2023}， a_{2024} の公約数が含む数の条件を明らかにする。難しく考えない。

第 4 問

Oを原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3},\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，X_2，・・・，X_N を以下の規則 (ｉ)，(ii) に従って定める。

(ｉ) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

・n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{OX_n}=\overrightarrow{OX_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

・n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N=5$ とする。X_5 が O にある確率を求めよ。

(2) $N=98$ とする。X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ。

<解答>

理系の第 6 問と同じ問題設定でなので，理系の解答，解説を参照する。文系なので，(1) では理系では $N=8$ であるところ $N=5$ と容易化し，(2) では $N=200$ を $N=98$に限定し，表を 90 回と特定している。

(1)

図 1 のように，$\overrightarrow{v_k}$ は $k\equiv 0,1,2 \pmod 3$ に応じて３つの値をとる。$\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{0}$ だから，$X_N=X_0$であるためには，コイン投げの過程で $\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ が同数出ることが必要である。

コイン投げで表が出る事象をA，裏が出る事象をBとする。A の出現のたびに，$\overrightarrow{OX_{n-1}}$ に $\overrightarrow{v_k}$ が加算されるので，X_5 が O にあるためには ($\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$) の組が 0，1 回出現することが必要。

したがって，A の出現は 0 と 3 回に限定される。

ｉ) A の出現が 0 回のとき

5 回連続してBが出現するので，コイン投げの過程は BBBBB の一通り。ただし，左から右へコイン投げが進行するものとする。

ii) A の出現が 3 回のとき

2 回の B が出現する。AとBの出現順序によって ($\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$) が選択される。

B が 2 回しか出現しないので，ABABA によってのみ $\overrightarrow{v_0}$，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$ が選択される。

したがって，X_5 が O にある確率は $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^4}$　（答）

(2)

98 回のコイン投げは以下のように 90 個のA の中に 8 個の B が混じる Aと B の系列となる。

A . . A B_1 A . . A B_2 A . . A B_3 A . . A B_4 A . . A B_5 A . . A B_6 A . . A B_7 A . . A B_8 A . . A

$\overrightarrow{v_0}$ $\overrightarrow{v_1}$ $\overrightarrow{v_2}$ $\overrightarrow{v_0}$ $\overrightarrow{v_1}$ $\overrightarrow{v_2}$ $\overrightarrow{v_0}$ $\overrightarrow{v_1}$ $\overrightarrow{v_2}$

Aからみて左側にある B の個数 $k\,(\mathrm{mod}3)$ に応じて，Aの個数だけ $\overrightarrow{v_k}$ （$k=0,1,2$）が $\overrightarrow{OX_{n-1}}$ に 加算される。 $\overrightarrow{v_0}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ が 同数となるためには，それぞれに対応する A の総数が 30 である。

$\overrightarrow{v_0}$ が選択される場合の数は B_1の左側のAの個数 a_1， B_3 とB_4 の間のAの個数 a_4， B_6 と B_7 の間のAの個数 a_7 の組み合わせの場合の数である。すなわち 30 個の Aの並び を 3 分割したとき，それぞれの領域に入る A の個数が $0 \leqq a_1,\ a_4,\ a_7 \leqq 30$, $a_1+a_4+a_7=30$ を満たす組み合わせの場合の数である。

すると32 個の席に30 個のAと2 個の B を配置して，A が並ぶ領域を 3 分割する場合の数だから，${}_{32}C_2$ 通り。

同様に， $\overrightarrow{v_1}$ が選択される場合の数は B_1とB_2 の間の A の個数 a_2， B_4 とB_5 の間の A の個数 a_5，B_7 と B_8 の間の A の個数 a_8 の組み合わせの場合の数である。同様に ${}_{32}C_2$ 通り。

同様に， $\overrightarrow{v_2}$ が選択される場合の数は B_2とB_3 の間の A の個数 a_3， B_5 とB_6 の間の A の個数 a_6，B_8 の右側のAの個数 a_9 の組み合わせの場合の数である。同様に ${}_{32}C_2$ 通り。

したがって，X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率は

$\dfrac{({}_{32}C_2)^3}{2^{98}} = \dfrac{31^3}{2^{86}}$ （答）

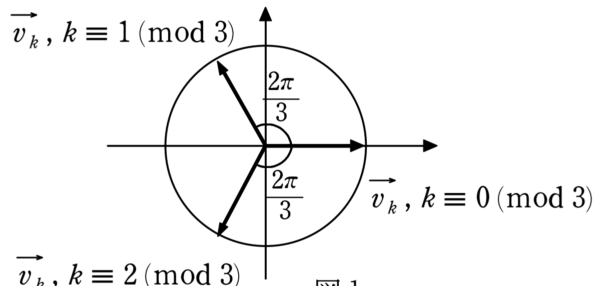

図 1

＜解説＞

理系の第４問と同じ問題なので，そちらも参照する。

表が出る事象を A，裏が出る事象を B とでもして， N 回のコイン投げの結果を A と B の並びによって表現して考察すると理解しやすい。

(1) は $N=5$で， $X_5 = X_0$ となる表裏の出現を具体的に考えればわかりやすい。

(2) は $N=98$ において，90 回の表と8 回の裏が発生して， X_{98} が Oにある確率を求める。

＜総評＞

文系とはいえ，なかなか手強い問題であった。

第１問

放物線の接線に関する問題。原点から放物線に2本の接線を引くことができ，それらが直交するとき

の放物線はどのようなものか考察する。さらに，接点で放物線に内接する円の条件を考慮して，放物線を定める。題意は簡明なのだが，計算がやや錯綜するので，注意する。文系の問題としては難易度Ｂ＋。

第２問

題意が明解なので，４問の中ではいちばん扱い易いだろう。完答したい。難易度Ｂ

第３問

合同式を活用した整数問題だが，解答方針の考案に数学的な着想が必要で，なかなか難しいと感じる。難易度A。

第４問

理系と同じ問題設定を容易化した問題だが題意を把握し，的確に解答方針を考案することはなかなか難しいと感じる。難易度Ａ－。

250720