

令和5年度(2023年度)共通テスト 数学・数学A 解説

数学 [数学 数学・数学A] (いずれか選択 100点, 70分)

数学・数学A (注)この科目には、選択問題があります。(29ページ参照)

第1問(必答問題)(配点 30)

<解答>

1 アイ -8 ウエ -4 オ2 カ2 キ4 ク4 ケ7 コ3

[2](1) サ0 シ7 ス4 セソ27

(2) タ5 チ6 ツ6 テト11 ナ6 ニヌ10 ネノ11 ハ2

<解説>

[1]

実数 x についての不等式 $|x+6| \leq 2$ の解は

$x \geq -6$ のとき, $x+6 \leq 2$, $\therefore x \leq -4$, したがって $-6 \leq x \leq -4$

$x < -6$ のとき, $-x-6 \leq 2$, $\therefore -8 \leq x$, したがって $-8 \leq x < -6$

以上によって, $\boxed{\text{アイ}} = -8 \leq x \leq -4 = \boxed{\text{ウエ}}$

よって, 実数 a, b, c, d が

$$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leq 2$$

を満たしているとき, 上記において $x=(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)$ とすれば,

$$-8 \leq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leq -4$$

$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると, $(a-b)(c-d)$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{-8}{1-\sqrt{3}} \geq (a-b)(c-d) \geq \frac{-4}{1-\sqrt{3}}, \therefore \frac{4}{\sqrt{3}-1} \leq (a-b)(c-d) \leq \frac{8}{\sqrt{3}-1}$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2\sqrt{3} + 2, \frac{8}{\sqrt{3}-1} = 4\sqrt{3} + 4$$

以上によって, $\boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}\sqrt{3} = 2+2\sqrt{3} \leq (a-b)(c-d) \leq 4+4\sqrt{3} = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$

特に, $(a-b)(c-d) \leq \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3} = 4+4\sqrt{3}$

であるとき, さらに, $(a-c)(b-d) = -3+\sqrt{3}$

が成り立つならば, $(a-d)(c-b) = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\sqrt{3}$

であることが, 等式 , , の左辺を展開して比較することによりわかる。

すなわち, を展開すると, $ac-ad-bc+bd = 4+4\sqrt{3}$,

を展開すると, $ab-ad-bc+cd = -3+\sqrt{3}$,

' - ' から,

$$ac-ab-cd+bd = a(c-b)-d(c-b) = (a-d)(c-b) = 7+3\sqrt{3} = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\sqrt{3}$$

[2](1)

点 O を中心とし、半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A, B を $AB = 6$ となるようにとる。また、円 O の円周上に、2 点 A, B とは異なる点 C をとる。

()

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle AOM, \text{ ただし } M \text{ は } AB \text{ の中点}$$

$$\text{したがって, } \sin \angle ACB = \sin \angle AOM = \frac{AM}{AO} = \frac{3}{5} = \boxed{\text{④}} = \boxed{\text{サ}}$$

また、点 C を $\angle ACB$ が鈍角となるようにとるとき、その点を C' とすれば $\angle AC'B = \pi - \angle ACB$ だから、 $\cos \angle AC'B = \cos(\pi - \angle ACB)$

$$= -\cos \angle ACB = -\frac{4}{5} = \boxed{\text{⑦}} = \boxed{\text{シ}}$$

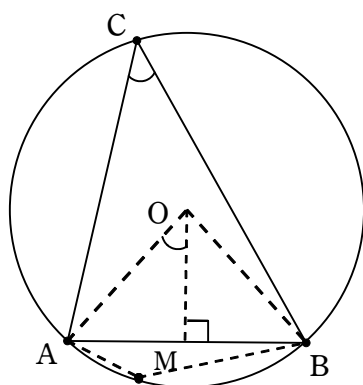


図1-1 C'

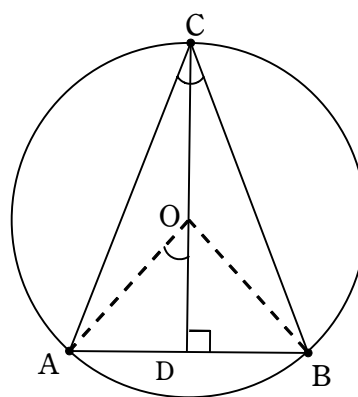


図1-2

()

点 C を $\triangle ABC$ の面積が最大となるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き、直線 AB との交点を D とする。直線 AB の垂線 CD が最長になる円周上の点が C だから、 $AC = BC$ となる。すると、直線 CD は中心 O を通る。

$$\tan \angle OAD = \frac{OD}{AD} = \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{3} = \frac{4}{3} = \boxed{\text{④}} = \boxed{\text{ス}}, \therefore OD = \frac{4}{3} AD = 4$$

$$\triangle ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} AB \times (CO + OD) = 3 \times (5 + 4) = 27 = \boxed{\text{セソ}}$$

$\boxed{\text{サ}} \sim \boxed{\text{ス}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

$$\text{① } \frac{3}{5} \quad \text{② } \frac{3}{4} \quad \text{③ } \frac{4}{5} \quad \text{④ } 1 \quad \text{⑤ } \frac{4}{3}$$

$$\text{⑥ } -\frac{3}{5} \quad \text{⑦ } -\frac{3}{4} \quad \text{⑧ } -\frac{4}{5} \quad \text{⑨ } -1 \quad \text{⑩ } -\frac{4}{3}$$

(2)

半径が 5 である球 S がある。この球面上に 3 点 P, Q, R をとったとき、これらの 3 点を通る平面 α 上で $PQ = 8, QR = 5, RP = 9$ であったとする。

球 S の球面上に点 T を三角錐 $TPQR$ の体積が最大となるようにとるとき、その体積を求めよう。

$$\text{まず, 余弦定理により, } \cos \angle QPR = \frac{(PQ)^2 + (RP)^2 - (QR)^2}{2PQ \cdot RP} = \frac{64 + 81 - 25}{144} = \frac{5}{6} = \boxed{\frac{\text{タ}}{\text{チ}}}$$

$$\therefore \sin \angle QPR = \sqrt{1 - (\cos \angle QRP)^2} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\text{したがって } PQR \text{ の面積は } \frac{1}{2}PQ \times (\sin \angle QPR) \times RP = 4 \times \frac{\sqrt{11}}{6} \times 9 = 6\sqrt{11} = \boxed{\text{ツ}} \boxed{\sqrt{\text{テト}}}$$

次に、点 T から平面 α に垂直な直線を引き、平面 α との交点を H とする。点 T を含む平面 α に平行な平面 β を考える。 β が球 S と点 T 以外で交わるとすれば、点 T は三角錐 TPQR を最大にする球面上の点ではない。したがって、 β は球 S と点 T でのみ交わる。すなわち β は球 S の接平面である。

したがって、 $OT \perp \beta$, $\therefore OT \perp \alpha$, したがって $OH \perp \alpha$, すなわち直線 TH は球の中心 O を通る。また $OP = OQ = OR$ から、直角三角形 OHP \equiv 直角三角形 OHQ \equiv 直角三角形 OHR したがって $PH = QH = RH$, すなわち PH, QH, RH の長さは等しいので $\boxed{\text{⑥}} \boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ。

$$PQR \text{ の外接円の半径は正弦定理から, } \frac{1}{2} \times \frac{QR}{\sin \angle QPR} = \frac{1}{2} \times \frac{5 \times 6}{\sqrt{11}} = \frac{15}{11} \sqrt{11}$$

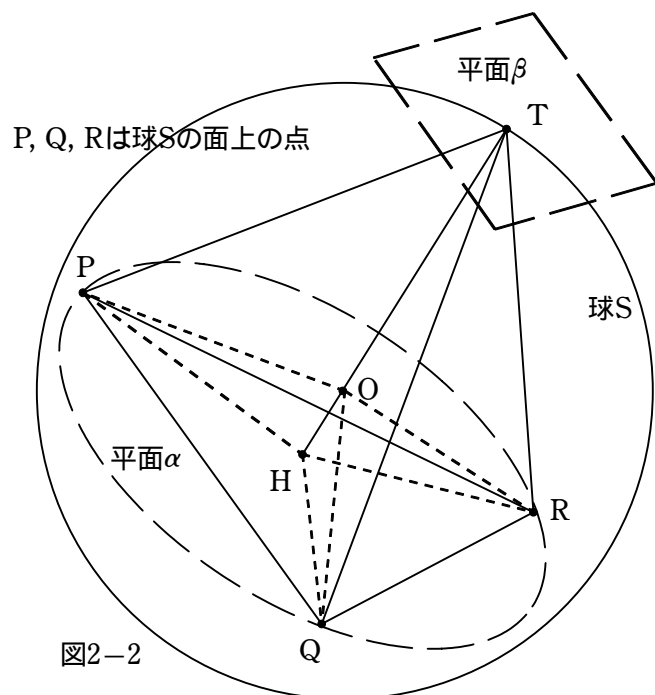
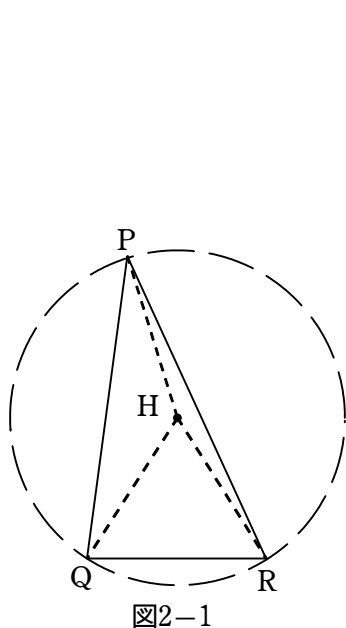
$$H \text{ は } PQR \text{ の外心だから, } PH = QH = RH = \frac{15}{11} \sqrt{11}$$

$$OH = \sqrt{(OP)^2 - (PH)^2} = \sqrt{25 - 15^2/11} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \text{ したがって } TH = OT + OH = 5 + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

$$\text{三角錐 TPQR の体積は } \frac{1}{3} \times 6\sqrt{11} \times \left(5 + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right) = 10(\sqrt{11} + \sqrt{2}) = \text{ニヌ} (\sqrt{\text{ネ}} + \sqrt{\text{ハ}})$$

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

- ① PH < QH < RH ② PH < RH < QH ③ QH < PH < RH
 ④ QH < RH < PH ⑤ RH < PH < QH ⑥ RH < QH < PH ⑦ PH = QH = RH



コメント：

[1]では、 $x=(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)$ として、前半部分の結果を活用することがポイントである。
[2]では、(1)での考察を(2)での考察の参考にする。また、図2-1、2-2のような図を大雑把に描いて考える。

第2問（必答問題）（配点30）

<解答>

1 ア2 イ5 ウ1 (2) エ2 オ2 カ7

[2](1) キ4 ク3 ケ4 コ3 サ2 (2) シ5 ス3 セソ57 タ0 チ0

<解説>

1

- ・データ数が52，したがって第1四分位数は小さい方から13.5番目のデータである。そのデータが入る階級だから1800以上2200未満の階級 ② ア である。
- ・第3四分位数は大きい方から13.5番目のデータだから，入る階級は3000以上3400未満の階級 ⑤ イ である。
- ・上記から四分位範囲は $3000-2200=800$ より大きく， $3400-1800=1600$ より小さい。 ① ウ

ア，イの解答群

- ① 1000以上1400未満 ① 1400以上1800未満 ② 1800以上2200未満
③ 2200以上2600未満 ④ 2600以上3000未満 ⑤ 3000以上3400未満
⑥ 3400以上3800未満 ⑦ 3800以上4200未満 ⑧ 4200以上4600未満 ⑨ 4600以上5000未満

ウの解答群

- ① 800より小さい ① 800より大きく1600より小さい
② 1600より大きく2400より小さい ③ 2400より大きく3200より小さい
④ 3200より大きく4000より小さい ⑤ 4000より大きい

(2)()

図2，図3から読み取れることとして，次の①～③のうち，正しいものは② エ である。

- ① ×，地域Eにおいて，第1四分位数のデータ（小さい方から5.5番目のデータ）が2000を超えているが，5番目のデータが2000以下かどうか不明である。
② ×，明らかに地域Wの範囲の方が広い。
③ ，明らかに中央値は地域Wの方が大きい。
④ ×，2600未満の市の割合は，明らかに地域Eの方が大きい。

()

太郎さんは，地域Eと地域Wのデータの散りばりの度合いを数値でとらえようと思い，それぞれの分散を考えることにした。地域Eにおけるかば焼きの支出金額の分散は，地域Eのそれぞれの市

におけるかば焼きの支出金額の偏差の $\boxed{\text{②}}$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

分散は偏差（個々のデータの平均値からの差）の2乗を合計してデータの数で割った値である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

- ① 2乗を合計した値
- ② 絶対値を合計した値
- ③ 2乗を合計して地域 E の市の数で割った値
- ④ 絶対値を合計して地域 E の市の数で割った値
- ⑤ 2乗を合計して地域 E の市の数で割った値の平方根のうち正のもの
- ⑥ 絶対値を合計して地域 E の市の数で割った値の平方根のうち正のもの

(3)

相関係数は $\frac{\text{共分散}}{(\text{一方のデータ群の標準偏差})(\text{もう一方のデータ群の標準偏差})}$

表 1 を用いると、地域 E における、やきとりの支出金額とかば焼きの支出金額の相関係数は

$$\frac{124000}{\sqrt{348100} \times \sqrt{324900}} = \frac{124000}{590 \times 570} = 0.37$$

したがって、①～⑥のうち最も適当なものは $\boxed{\text{⑦}}$ $\boxed{\text{カ}}$

$\boxed{\text{カ}}$ については、最も適当なものを、次の①～⑥のうちから一つ選べ。

- ① -0.62 ② -0.50 ③ -0.37 ④ -0.19 ⑤ -0.02
- ⑥ 0.02 ⑦ 0.19 ⑧ 0.37 ⑨ 0.50 ⑩ 0.62

コメント：

数学 の「データ分析」分野からの出題。近年のIT技術の普及とともに、さまざまな情報のデジタル化が急速に進み、日々大量のデータが生み出され、流通する時代となった。これをどう活用するかが、社会の発展に非常に重要となっている。日ごろから、身の回りのデータから意味を見つけ、活用する意識を高めておこう。

[2](1)

放物線 C_1 の方程式における x^2 の係数を a とする。放物線 C_1 の方程式を

$$y = ax^2 - \boxed{\text{キ}} ax + \boxed{\text{ク}}$$

と表す。放物線 C_1 は点 $P_0(0, 3)$ 、 $M(4, 3)$ を通るから、

$$x = 0 \text{ として } y = 3 = \boxed{\text{ク}}, \quad x = 4 \text{ として } y = 16a - \boxed{\text{キ}} \times 4a + 3 = 3, \quad \therefore \boxed{\text{キ}} = 4$$

放物線 C_1 は $y = ax^2 - 4ax + 3 = a(x - 2)^2 - 4a + 3$ となるから、

プロ選手の「シュートの高さ」は $-4a + 3 = -\boxed{\text{ケ}} a + \boxed{\text{コ}}$ である。

放物線 C_2 の方程式における x^2 の係数を p とする。放物線 C_2 の方程式を

$$y = px^2 - bx + c$$

と表すと、放物線 C_2 は点 $P_1(0, 2)$ 、 $M(4, 3)$ を通るから、

$$x = 0 \text{ として } y = 2 = c, \quad x = 4 \text{ として } y = 16p - 4b + 2 = 3, \quad \therefore b = 4p - \frac{1}{4}$$

したがって、放物線 C_2 の方程式は

$$y = px^2 - 2p\left(2 - \frac{1}{8p}\right)x + 2 = p\left\{x - \left(2 - \frac{1}{8p}\right)\right\}^2 - \frac{(16p-1)^2}{64p} + 2$$

と表すことができる。 C_2 は上に凸だから、 $p < 0$ である。

プロ選手と花子さんの「ボールが最も高くなるときの地上の位置」の比較の記述として、次の①～③のうち、正しいものは ② サ である。

① × 「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は C_1 では $x = 2$ 、 C_2 では $x = 2 - \frac{1}{8p} > 2$

両者は異なる。

① × M の x 座標は 4、 $p < 0$ で $4 > 2 - \frac{1}{8p} > 2$ だから、花子さんの方が M に近い。

② ○ C_2 の頂点の x 座標 $2 - \frac{1}{8p}$ について、つねに $4 > 2 - \frac{1}{8p} > 2$ である。

③ × 上記の議論から、つねに花子さんのそのの方がプロ選手よりも M の x 座標 4 に近い。

(2)

$$\text{放物線 } C_1 \text{ が点 } D\left(3.8, 3 + \frac{\sqrt{3}}{15}\right) \text{ を通るとき, } 3 + \frac{\sqrt{3}}{15} = a(3.8 - 2)^2 - 4a + 3$$

$$\therefore a = \frac{-5\sqrt{3}}{57}, \text{ よって } C_1 \text{ の方程式は } y = -\frac{5\sqrt{3}}{57}(x^2 - 4x) + 3 = -\frac{\text{シ}\sqrt{\text{ス}}}{\text{セソ}}(x^2 - 4x) + 3$$

$$\text{プロの「シュートの高さ」は } -4a + 3 = \frac{20\sqrt{3}}{57} + 3 \approx 3.61$$

また、放物線 C_2 が点 $D\left(3.8, 3 + \frac{\sqrt{3}}{15}\right)$ を通るとき、(1) で与えられた C_2 の方程式を用いると、花子さんの「シュートの高さ」は約 3.4 と求められる。

以上のことから、放物線 C_1 と C_2 が D を通るとき、プロの選手と花子さんの「シュートの高さ」を比べると、プロの選手 ① タ の「シュートの高さ」の方が大きく、その差は $3.61 - 3.4 = 0.21$ だから、ボール約 1 個分 ① チ である。

タ の解答群

① プロ選手 ① 花子さん

チ については、最も適当なものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

① 約 1 個分 ① 約 2 個分 ② 約 3 個分 ③ 約 4 個分

コメント：

昨年と同様に、太郎さんと花子さんの会話から、思考の流れを理解し、解答方針を案出していく。ここでは、シュートのときのバスケットボールの軌道を放物線として、その頂点の位置、リングを通過するときの条件について、考察する。2 次関数のグラフの問題だが、これをバスケットボールのシュートという具体的な状況における解析課題として扱う。長文を読解しながら解答するので、的確迅

速な日本語能力，粘り強い思考力が必要とされる。

[1]で，放物線はリングの中心を通ることを前提にするので，「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は必ず，リングの中心より人側にあることに注意する。

第3問～第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第3問（選択問題）（配点20）

< 解答 >

(1) アイウ 320 (2) エオ 60 (3) カキ 32 (4) クケ 30 (5) コ 2 (6) 260 (7) セソタチ 1020

< 解説 >

(1)

図 B において，球 1 の塗り方は 5 通りとすれば，球 2，3，4 はそれぞれ 4 通りだから，球の塗り方は $5 \times 4 \times 4 \times 4 = 320 = \boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。

(2)

図 C において，球 1 の塗り方は 5 通りとすれば，球 2 は 4 通り，球 3 は 3 通りだから，球の塗り方の総数は $5 \times 4 \times 3 = 60 = \boxed{\text{エオ}}$ 通りある。

(3)

図 D において，赤をちょうど 2 回使う塗り方は，球 1 と球 3，球 2 と球 4 が赤の場合がある。球 1 と球 3 が赤の場合，赤を除いて球 2 は 4 通りの塗り方，球 4 は 4 通りの塗り方があるから，16 通り。球 2 と球 4 が赤の場合も同様だから，合計して $32 = \boxed{\text{カキ}}$ 通りある。

(4)

図 E において，球 1 が赤，青，他の 3 色の場合について考える。

球 1 が赤の場合，球 2～球 6 の 5 個のいずれも赤に塗ることはできない。

球 1 が青の場合，球 2～球 6 の 5 個のいずれも青に塗ることはできない。

球 1 が赤，青以外の 3 色のどれかの色の場合，球 2～球 6 の 5 個の球のうち

赤が 3 個，青が 2 個だから， $3 \times {}_5C_3 = 30$ 通りある。

以上から図 E において，赤をちょうど 3 回，青をちょうど 2 回使う塗り方は， $30 = \boxed{\text{クケ}}$ 通りある。

(5)

図 D において，球の塗り方の総数を求める。図 F では球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方が可能であるため，図 D よりも図 F の球の塗り方の総数の方が大きい。

図 F における球の塗り方は，図 B における球の塗り方と同じであるため，全部で 320 通りある。

そのうち，球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方の総数を考える。

球 2 が 5 色を使う塗り方，球 3 が球 2 の色以外の 4 色を使う塗り方，球 4 は球 3 と同色，すると球 1 は球 2 と球 3 とは違う 3 色の塗り方，したがって，図 F において球 3 と球 4 が同色である塗り方の総数は $5 \times 4 \times 3 = 60$ 通り。

図 F で球 3 と球 4 が同色であることは，球 1 と球 4 が異色であるから，球 3 と球 1 が異色であることを意味する。したがって，図 F で球 3 を球 1 とひもで結び，球 4 を球 3 と同色に固定する場合の塗り方と同じ。すなわち，解答群の $\boxed{\text{④}}$ $\boxed{\text{㉓}}$ と同じ。

□ の解答群の塗り方の総数を調べてみる。

- ① 球 1 に 5 色，球 2 に 4 色選べるから 塗り方の総数は $5 \times 4 = 20$ 通り
- ② 球 1 に 5 色，球 2 に球 1 の色以外の 4 色，球 3 に球 2 の色以外の 4 色選べるので，
 $5 \times 4 \times 4 = 80$ 通り
- ③ 球 1 に 5 色，球 2 に球 1 以外の 4 色，球 3 に球 1 と球 2 の色以外の 3 色を選べるので，
 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 通り
- ④ ? (ここで求める問題)
- ⑤ 球 3 は球 2 と異色だから， $5 \times 4 \times 3 \times 4 = 240$ 通り

したがって，図 D における球の塗り方は図 F における塗り方の総数 320 から球 3 と球 4 が同色の塗り方の総数 60 を引いて， $320 - 60 = 260 = \boxed{\text{サシス}}$ 通りある。

(6)

図 G における塗り方を考察する。(5)の考え方を参考にすれば，図 G の塗り方は図 H の塗り方において，球 4 と球 5 が同色となる場合を除いたもの。図 H で球 4 と球 5 が同色となる塗り方の総数は図 D の塗り方の総数と同じ。なぜなら，図 H において球 4 と球 5 が同色ということは，球 1 と球 4 は異色ということだから，球 1 と球 4 はひもでつながれ，球 5 は球 4 と同色に固定される。すなわち図 D の塗り方に一致する。

図 H における塗り方の総数は， $5 \times 4 \times 4 \times 4 = 1280$ 通り。

そのうち球 5 が球 4 と同色になる塗り方は(5)で求めた図 D における塗り方の総数 260 通り。

したがって，図 G の塗り方は $1280 - 260 = 1020 = \boxed{\text{セソタチ}}$ 通りある。

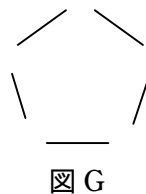


図 G

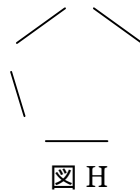


図 H

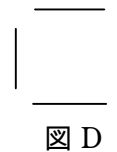


図 D

コメント：

数学 A における「場合の数と確率」分野の問題。色の塗り方の数を求める問題は，塗られる対象と塗る色の組合せとして，しばしば出題される。ここでは球に 5 色のうち 1 色を塗るが，ひもで結ばれた球は異色でなければならない。この与えられた条件下で，ひもで結ばれた球の組合わせに対して，色の塗り方の総数を求める。

難しい問題のように思えるが，決して難しくはないので，落ち着いて考えよう。(5)を応用して(6)を考察することは直ぐ気づくであろう。球が 3, 4, 5, 6, ... と増えても同じ考え方が使える。

さて(5)の思考の過程で，

(n 個の球を円環状にひもで結んだときの色の塗り方の総数)

= (上記円環の 1 本のひもを外したときの色の塗り方の総数) - ($n-1$ 個の球を円環状にひもで結んだときの色の塗り方の総数)

であることに気づくことができれば，(5)，(6)を容易に取り扱うことができる。

第3問～第5問は、いずれか2問を選択し、解答しなさい。

第4問（選択問題）（配点 20）

< 解答 >

(1) アイ 11 ウエオカ 2310 キク 22 ケコサシ 1848

(2) スセソ 770 タチ 33 ツテトナ 2310 ニヌネノ 6930

< 解説 >

(1)

横の長さが462で縦の長さが110である赤い長方形を、図1のように並べて正方形や長方形を作
ることを考える。

$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$, $110 = 2 \times 5 \times 11$ と素因数分解できるから、両方を割り切る素数のうち最大
のものは $11 = \boxed{\text{アイ}}$ である。

赤い長方形を並べて作ることができる正方形のうち、辺の長さが最小であるものは、462と110
の最小公倍数となるものである。すなわち $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310 = \boxed{\text{ウエオカ}}$ のものである。

また、赤い長方形を並べて正方形ではない長方形を作るとき、横の長さ
と縦の長さの差の絶対値は、 j, k を整数として $|462j - 110k| = 22|21j - 5k|$ と表現できる。それが最小になるのは、
正方形となる0を除いて、 $|21j - 5k| = 1$ だから、462の約数と110の約数を考えると、差の絶対値
が最大公約数 $22 = \boxed{\text{キク}}$ になるときである。

縦の長さが横の長さより $\boxed{\text{キク}} = 22$ 長い長方形では $21j - 5k = -1$ であるから、

$$k = 4j + \frac{j+1}{5}, \text{したがって最小の } j \text{ は } j = 4,$$

したがって、横の長さが最小であるものは、横の長さが $462 \times 4 = 1848 = \boxed{\text{ケコサシ}}$ のものである。

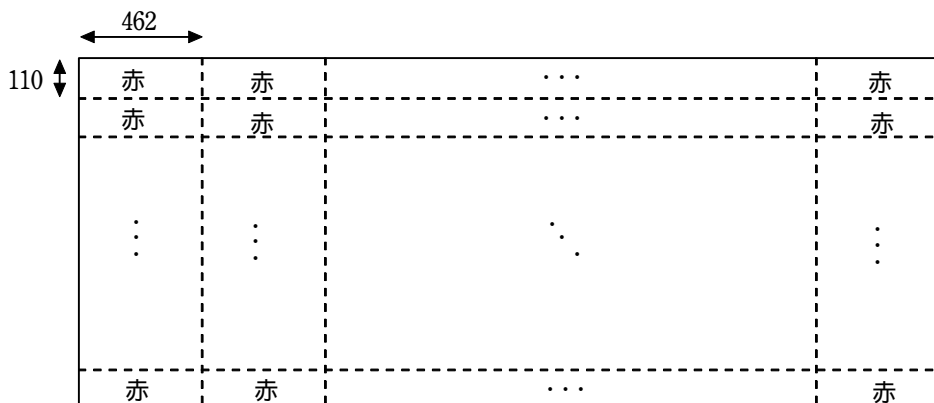


図1

(2)

花子さんと太郎さんは、(1)で用いた赤い長方形を1枚以上並べて長方形を作り、その右側に横の
長さが363で縦の長さが154である青い長方形を1枚以上並べて、図2のような正方形や長方形を作

ることを考えている。

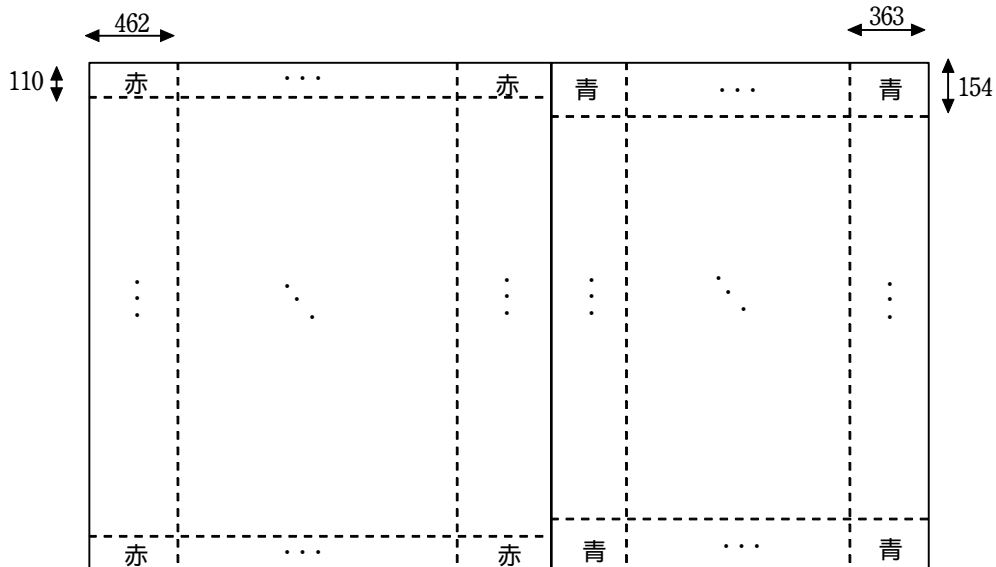


図 2

このとき，赤い長方形を並べてできる長方形の縦の長さや青い長方形を並べてできる長方形の縦の長さは等しい。よって図 2 のような長方形のうち，縦の長さが最小のものは， $110 = 2 \times 5 \times 11$ と $154 = 2 \times 7 \times 11$ の最小公倍数となる縦の長さ $770 = \boxed{\text{スセソ}}$ のものであり，図 2 のような長方形は縦の長さが 770 の倍数である。

二人は，次のように話している。

花子：赤い長方形と青い長方形を図 2 のように並べて正方形を作ってみようよ。

太郎：赤い長方形の横の長さが 462 で青い長方形の横の長さが 363 だから，図 2 のような正方形の横の長さは 462 と 363 を組み合わせて作ることができる長さでないといけないね。

花子：正方形だから，横の長さは $770 = \boxed{\text{スセソ}}$ の倍数でもないといけないね。

$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$ と $363 = 3 \times 11^2$ の最大公約数は $3 \times 11 = 33 = \boxed{\text{タチ}}$ であり， 33 の倍数のうちで $770 = 2 \times 5 \times 7 \times 11$ の倍数でもある最小の正の整数は $(2 \times 5 \times 7 \times 11) \times 3 = 2310 = \boxed{\text{ツテトナ}}$ である。

これらのことと，使う長方形の枚数が赤い長方形も青い長方形も 1 枚以上であることから，図 2 のような正方形のうち，辺の長さが最小であるものを考える。

l, m, n, l' を整数として，図 2 のような正方形の縦の長さや横の長さが等しいことから， $770l = 462m + 363n = 33(14m + 11n) = 2310l'$

したがって， $14m + 11n = 70l'$ ， $\therefore m + \frac{11}{14}n = 5l'$ ，したがって n は 14 の倍数。

$m = 5l' - \frac{11}{14}n \geq 1$ ， $5l' \geq 1 + \frac{11}{14}n$ ，したがって $n=14$ のとき， $5l' \geq 12$ ， $l' \geq 3$

したがって， l' のとり得る最小値は 3 で，このとき $m = 4$

以上から図 2 のような正方形のうち，辺の長さが最小のものは， $2310 \times 3 = 6930 = \boxed{\text{三又ネノ}}$

コメント：

長方形を並べて正方形を作るという問題が、整数の問題になっていることに直ぐ気づく。2つ以上の整数の最小公倍数や最大公約数を求めるときに、まずは素因数分解が有効なこともわかっている。

$110k - 462j = 22$, $5k - 21j = 1$ を満たす最小の j を求めるという不定方程式の問題が登場する。不定方程式の一般的解法はユークリッドの互除法によって、整数解の一つを求め、これを基に一般解を求めるものである。しかし、ここでは一般解は必要ないので、上記解説に示したように、 j, k の整数条件によって、最小の j を求める方が速やかである。

第3問～第5問は、いずれか2問を選択し、解答しなさい。

第5問（選択問題）（配点 20）

< 解答 >

- (1) アイ 90 ウ 3 エ 4 オ 3 カ 2
(2) キ 3 ク 3 ケ 6 コ 2 サ 7

< 解説 >

(1)

円 O に対して、次の手順1で作図を行う。

手順1

(Step 1) 円 O と異なる2点で交わり、中心 O を通らない直線 l を引く。

円 O と直線 l との交点を A, B とし、線分 AB の中点 C をとる。

(Step 2) 円 O の周上に、点 D を $\angle COD$ が鈍角となるようにとる。直線 CD を引き、円 O との交点で D とは異なる点を E とする。

(Step 3) 円 O を通り直線 OC に垂直な直線を引き、直線 OC との交点を F とし、円 O との交点で D とは異なる点を G とする。

(Step 4) 点 G における円 O の接線を引き、直線 l との交点を H とする。

このとき、直線 l と点 D の位置によらず、直線 EH は円 O の接線である。

このことは、次の構想に基づいて、後のように説明できる。

構想

直線 EH が円 O の接線であることを証明するためには、

$\angle OEH = 90^\circ = \boxed{\text{アイ}}^\circ$ であることを示せばよい。

直線 EH が円 O の接線

$\Leftrightarrow \angle OEH = 90^\circ$

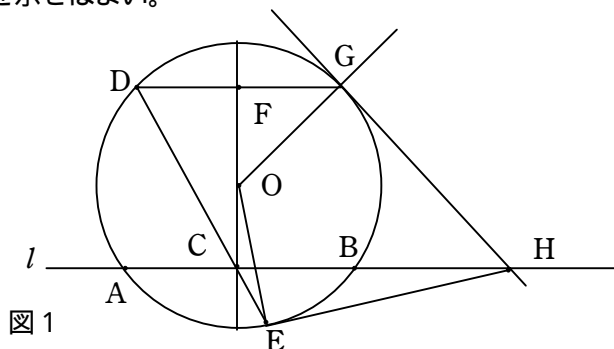


図1

手順1の (Step 1) より $\angle OCH = 90^\circ$, (Step 4) より $\angle OGH = 90^\circ$, したがって , 4点 C , G , H , O ③ [ウ] は同一円周上にあることがわかる。よって , $\angle CHG$ は $\angle COG$ の外角に等しい。すなわち , $\angle CHG = \angle FOG$ ④ [エ] である。

一方 , 点 E は円 O の周上にあることから , 中心角と円周角の関係より $\angle FOG = \frac{1}{2} \angle DOG = \angle DEG$ ③ [オ] がわかる。

よって , $\angle CHG = \angle DEG$ であるので , 4点 C , G , H , E ② [カ] は同一円周上にある。この円が点 O を通ることにより , $\angle OGH = 90^\circ$ だから , $\angle OEH = 90^\circ$ を示すことができる。

[ウ] の解答群

① B ② D ③ F ④ O

[エ] の解答群

① $\angle AFC$ ② $\angle CDF$ ③ $\angle CGH$ ④ $\angle CBO$ ⑤ $\angle FOG$

[オ] の解答群

① $\angle AED$ ② $\angle ADE$ ③ $\angle BOE$ ④ $\angle DEG$ ⑤ $\angle EOH$

[カ] の解答群

① A ② D ③ E ④ F

(2)

円 O に対して , (1) の手順 1 とは直線 l の引き方を変え , 次の手順 2 で作図を行う。

手順 2

(Step 1) 円 O と共有点をもたない直線 l を引く。中心 O から直線 l に垂直な直線を引き , 直線 l との交点を P とする。

(Step 2) 円 O の周上に , 点 Q を $\angle POQ$ が鈍角となるようにとる。直線 PQ を引き , 円 O との交点で Q とは異なる点を R とする。

(Step 3) 円 O を通り直線 OP に垂直な直線を引き , 円 O との交点で Q とは異なる点を S とする。

(Step 4) 点 S における円 O の接線を引き , 直線 l との交点を T とする。

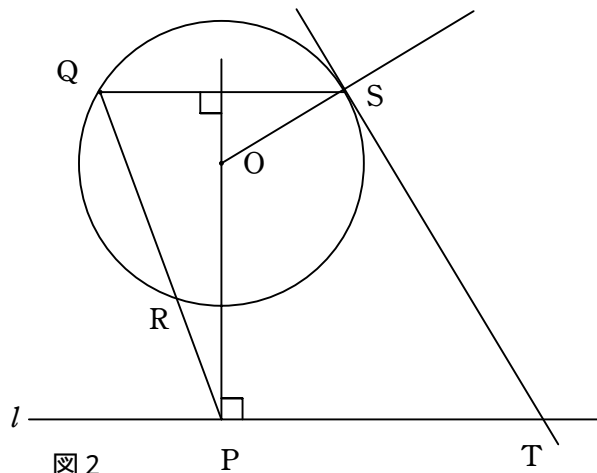


図 2

$\angle OPT = \angle OST = 90^\circ$, \therefore 4点 O, P, T, S は同一円周上にある。

したがって, $\angle PTS = (\angle POS\text{の外角}) = \frac{1}{2}\angle QOS = \angle QRS$ ㉓ キ である。

$\angle QRS$ は ($\angle SRP$ の外角) であるから, $\angle PTS = (\angle SRP\text{の外角})$

したがって, 4点 R, P, T, S は同一円周上にある。

したがって, 5点 O, R, P, T, S は同一円周上にあり, 3点 O, R, P を通る円は 5点 O, R, P, T, S を通る円と同じである。その直径は OT に等しい。

円 O の半径が $\sqrt{5}$ で, $OT = 3\sqrt{6}$ であったとすると,

3点 O, R, P を通る円の半径は $\frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{\text{ク}\sqrt{\text{ケ}}}{\text{コ}}$

ORT と OST において, $OR = OS, OT$ は共通で直径であるから, $ORT \equiv OST$

したがって, $RT = ST = \sqrt{(OT)^2 - (OS)^2} = 7 =$ サ

キ の解答群

㉑ $\angle PQS$ ㉒ $\angle PST$ ㉓ $\angle QPS$ ㉔ $\angle QRS$ ㉕ $\angle SRT$

コメント:

作図をしながら, できあがる図形の特性を求める問題。円周角と中心角, 4個以上の点が同一円周上にあるための条件, などを基礎とする。煩瑣な図形ではないので, 参考図, 図1, 2のような図を描きながら, スムーズに解答したい。

< 総評 >

センター試験から大学入学共通テストへ変更となった3年目である。昨年は共通テストがめざす教育成果を問う傾向が強すぎて, 受験生にとって難しいと感じられ, 平均点は38.0点とR3年の57.7点から大きく低下した。

その反省からか, 共通テストがめざす出題の傾向は変わらないものの, 今年の問題はやや易化したように感じられる。長文の数学思考のプロセスを読み進めながら, 設問に答えるという出題形式である。平易な文章だから, 特段に読解力を必要とするものではないが, 試験会場という緊張する場面でのことだから, 国語の地力が必要なことはいうまでもない。

第2問で2次関数を使って, ボールの軌道と高さを議論する問題が出題された。2次関数の曲線は放物線であるから, バスケットボールの軌道を2次関数によって論ずることは, 2次関数をより深く実用的に理解することになるから, 適切な問題であろう。長文を速やかに読み進め, 題意を的確に読み取り, ボールの高さや水平方向の位置などを2次関数によって求めるという応用力を必要とする。

第3問~5問の選択問題は, 例年同様, 解答方針に着眼着想が必要な工夫された問題であった。いずれも, 例年よりも題意が簡明であり扱い易かったように思う。

230202