令和５年度（2023年度）共通テスト　数学Ⅱ･数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ･数学Ｂ]　（いずれか選択　100点，60分）

数学Ⅱ･数学Ｂ　（注）この科目には，選択問題があります。（25ページ参照）

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

[１](1) ア０　イ２　(2) ウ２　エ１　オ３　カ５　キ３　(3) クａ　ケ７　コ７　サ３　シ７　ス５　セ７
　(4)ソ６　タ５　チ６

[２](1) ツ２　(2) テ２　ト３　ナ２　ニ５　ヌ５

＜解説＞

[１]

三角関数の値の大小関係について考えよう。

(1)

$x = \dfrac{\pi}{6}$のとき，$\sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$，$\sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，$\sin x$ $\boxed{<⓪ア}$ $\sin 2x$ である。

$x = \dfrac{2\pi}{3}$のとき，$\sin x = \sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 2x = \sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，$\sin x$ $\boxed{>②イ}$ $\sin 2x$である。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ ＜　　　① ＝　　　② ＞

(2)

$\sin x$と$\sin 2x$の値の大小関係を詳しく調べよう。

$\sin 2x - \sin x = 2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) = \sin x(\boxed{ウ}\cos x - \boxed{エ})$

であるから，$\sin 2x - \sin x > 0$が成り立つことは

「$\sin x > 0$ かつ $2\cos x - 1 > 0$」　①

または

「$\sin x < 0$ かつ $2\cos x - 1 < 0$」　②

が成り立つことと同値である。

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，① において，$\sin x > 0$ から，$0 < x < \pi$,

$\cos x > \dfrac{1}{2}$から $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5\pi}{3} < x \leqq 2\pi$

したがって，① が成り立つような x の範囲は $0 < x < \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{オ}$

② において，$\sin x < 0$ から $\pi < x < 2\pi$，$\cos x < \dfrac{1}{2}$ から $\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5\pi}{3}$,

したがって ② が成り立つようなxの範囲は $\pi < x < \dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}\pi$

よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$\sin 2x > \sin x$ が成り立つような x の範囲は

$0 < x < \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{\text{オ}}$，$\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi = \dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}\pi$ である。

(3)

$\sin 3x$ と $\sin 4x$ の値の大小関係を調べよう。

三角関数の加法定理を用いると，等式

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$ ③

が得られる。$\alpha+\beta = 4x$，$\alpha-\beta = 3x$ を満たすα，β は $\alpha = \dfrac{7}{2}x$，$\beta = \dfrac{1}{2}x$ だから

③ を用いると，$\sin 4x - \sin 3x = 2\cos\left(\dfrac{7}{2}x\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2\cos$ ク $\sin$ ケ，∴ $\boxed{\text{ク(a)}}$，$\boxed{\text{ケ⑦}}$

$\sin 4x - \sin 3x > 0$ が成り立つことは

「$\cos\left(\dfrac{7}{2}x\right) > 0$ かつ $\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right) > 0$」 ④

または

「$\cos\left(\dfrac{7}{2}x\right) < 0$ かつ $\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right) < 0$」 ⑤

が成り立つことと同値であることがわかる。

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，④の$\cos\left(\dfrac{7}{2}x\right) > 0$ から，

$0 \leqq \dfrac{7}{2}x < \dfrac{1}{2}\pi$ または $\dfrac{3}{2}\pi < \dfrac{7}{2}x < 2\pi + \dfrac{1}{2}\pi$，∴ $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{7}$ または $\dfrac{3}{7}\pi < x < \dfrac{5}{7}\pi$

④の$\sin\left(\dfrac{1}{2}x\right) > 0$ から，$0 < \dfrac{1}{2}x < \pi$，∴ $0 < x < 2\pi$

したがって④により，$0 < x < \dfrac{\pi}{7}$ または $\dfrac{3}{7}\pi < x < \dfrac{5}{7}\pi$

⑤から $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{7}{2}x < \dfrac{3}{2}\pi$ かつ $\pi < \dfrac{1}{2}x < 2\pi$，すなわち $\dfrac{\pi}{7} < x < \dfrac{3}{7}\pi$ かつ $2\pi < x < 4\pi$

⑤ を満たすxは存在しない。

以上によって，$\sin 4x > \sin 3x$ が成り立つような x の範囲は

$0 < x < \dfrac{\pi}{7} = \dfrac{\pi}{\text{コ}}$，$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}\pi = \dfrac{3}{7}\pi < x < \dfrac{5}{7}\pi = \dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}\pi$ である。

$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0　① x　② $2x$　③ $3x$　④ $4x$　⑤ $5x$

⑥ $6x$　⑦ $\dfrac{x}{2}$　⑧ $\dfrac{3}{2}x$　⑨ $\dfrac{5}{2}x$　(a) $\dfrac{7}{2}x$　(b) $\dfrac{9}{2}x$

(4)

(2)，(3)の考察から，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin 3x > \sin 4x > \sin 2x$ が成り立つような x の値の範囲を求めよう。

$\sin 3x > \sin 4x$を満たす x の範囲は(3)の考察により，$\frac{\pi}{7} < x < \frac{3}{7}\pi$，$\frac{5}{7}\pi < x < \pi$　⑥

$\sin 4x > \sin 2x$を満たす x の範囲は(2)の考察により，$2x = X$とおくと

$0 < X < \frac{\pi}{3}$，$\pi < X < \frac{5}{3}\pi$だから，$0 < x < \frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$　⑦

⑥，⑦から $\frac{\pi}{\text{コ}} = \frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{\text{ソ}}$，$\frac{\text{ス}}{\text{セ}}\pi = \frac{5}{7}\pi < x < \frac{5}{6}\pi = \frac{\text{タ}}{\text{チ}}\pi$

コメント：

三角関数の基本的性質と演算に関する問題。煩瑣な計算を伴うものではないので，着実に解答したい。(3)で④の$\cos\left(\frac{7}{2}x\right) > 0$を満たす$x$の範囲については，ミスしやすいので注意すること。

［2］

(1)

$a > 0$，$a \fallingdotseq 1$，$b > 0$ のとき，$\log_a b = x$とおくと，$a^x = b$ $\boxed{\text{ツ⓶}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{ツ}}$の解答群

⓪ $x^a = b$　① $x^b = a$　② $a^x = b$　③ $b^x = a$　④ $a^b = x$　⑤ $b^a = x$

(2)

様々な対数の値が有理数か無理数かについて考えよう。

(i)

$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 = \boxed{\text{テ}}$，$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3}{2} = \boxed{\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}}$であり，どちらも有理数である。

(ii)

$\log_2 3$ が有理数と無理数のどちらであるかを考えよう。

$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，$\log_2 3 > 0$ であるので，二つの自然数 p，q を用いて $\log_2 3 = \frac{p}{q}$と表すことができる。このとき，(1)により $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ は $3 = 2^{\frac{p}{q}}$，$2^p = 3^q$ $\boxed{\text{ニ⑤}}$ と変形できる。いま，2 は偶数であり3 は奇数であるので，$2^q = 3^p$ を満たす自然数 p，q は存在しない。したがって，$\log_2 3$は無理数であることがわかる。

(iii)

a，bを 2 以上の自然数とするとき，(ii)と同様に考えると，「$\boxed{\text{ヌ⑤}}$ ならば $\log_a b$はつねに無理数である」ことがわかる。すなわち $\log_a b = \frac{p}{q}$ とおけば，$a^q = b^p$ だから，$\boxed{\text{ヌ⑤}}$「aとbのいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数」ならば，「$\log_a b = \frac{p}{q}$ を満たす自然数は存在しない」。

$\boxed{\text{ニ}}$の解答群

⓪ $p^2 = 3q^2$　① $q^2 = p^3$　② $2^q = 3^p$　③ $p^3 = 2q^3$　④ $p^2 = q^3$　⑤ $2^p = 3^q$

$\boxed{\text{ヌ}}$の解答群

⓪ a が偶数

① b が偶数

② a が奇数

③ b が奇数

④ aとb がともに偶数，または aとb がともに奇数

⑤ aとb のいずれか一方が偶数で，もう一方が奇数

コメント：

対数の基礎を理解していれば，難しいと感じられるところはないであろう。速やかに解答したい。昨年の対数の問題が難しかった反動であろうか。

第２問（必答問題）（配点 30）

＜解答＞

[１](1) ア 4　イウ −3　エ 2　オ 0　カ 0　キ 3　ク 9　(2) ケ 5　コ 3　サ 9　シ 6　スセソ 180

[２](1) タチツ 180　テトナ 300　ニヌ 12　ネ 5　(2) ノ 4　ハ 0　ヒ 4

＜解説＞

[１](1)

k を正の定数とし，次の 3 次関数を考える。

$$f(x) = x^2(k-x)$$

$y = f(x)$のグラフとx 軸との共有点の座標は$(0, 0)$と$(k, 0) = (\boxed{\text{ア④}}, 0)$である。

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$は

$$f'(x) = -3x^2 + 2kx = \boxed{\text{イウ}}\,x^2 + \boxed{\text{エ}}\,kx = -3x\left(x - \frac{2k}{3}\right)$$

$x = 0 = \boxed{\text{オ⓪}}$のとき，$f(x)$ は極小値 $f(0) = 0 = \boxed{\text{カ⓪}}$ をとる。

$x = \dfrac{2k}{3} = \boxed{\text{キ③}}$のとき，$f(x)$ は極大値 $f\left(\dfrac{2k}{3}\right) = \dfrac{4}{27}k^3 = \boxed{\text{ク⑨}}$ をとる。

また，$0 < x < k$ の範囲において $x = \dfrac{2k}{3}$ のとき $f(x)$ は最大となることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{オ}}$～$\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0　① $\dfrac{1}{3}k$　② $\dfrac{1}{2}k$　③ $\dfrac{2}{3}k$　④ k　⑤ $\dfrac{3}{2}k$

⑥ $-4k^2$　⑦ $\dfrac{1}{8}k^2$　⑧ $\dfrac{2}{27}k^3$　⑨ $\dfrac{4}{27}k^3$　(a) $\dfrac{4}{9}k^3$　(b) $4k^3$

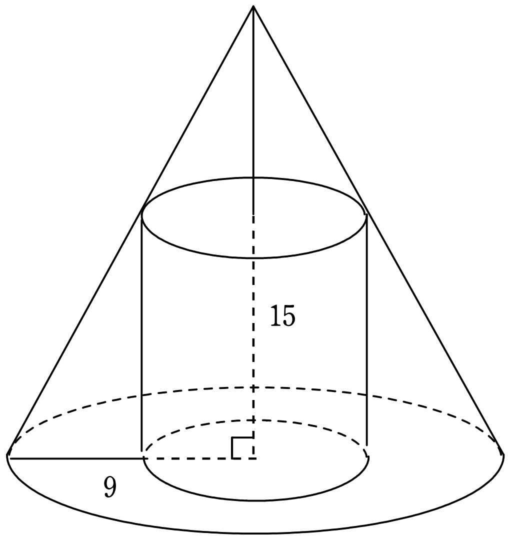
(2)

後の図のように底面が半径 9 の円で高さが 15 の円錐に内接する円柱を考える。円柱の底面の半径と体積をそれぞれ x，V とする。円柱の高さを h とすれば，$h = \dfrac{5}{3}(9-x)$。

したがって V を x の式で表すと

$V = \dfrac{5}{3}\pi x^2(9-x) = \dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}\pi x^2(\text{サ}-x)$ （ $0 < x < 9$ ）

(1)の考察で $k = 9$ とすれば，$x = \dfrac{2k}{3} = 6 = \boxed{\text{シ}}$ のとき，V は最大値 $180\pi = \boxed{\text{スセソ}}\pi$ である。



［2］(1)

定積分 $\displaystyle\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x+3\right)dx = \left[\frac{x^2}{10}+3x\right]_0^{30} = 180 = \boxed{\text{タチツ}}$ である。

また，関数 $\dfrac{1}{100}x^2-\dfrac{1}{6}x+5$ の不定積分は

$\displaystyle\int\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{1}{6}x+5\right)dx = \frac{1}{300}x^3-\frac{1}{12}x^2+5x+C = \frac{1}{\text{テトナ}}x^3-\frac{1}{\text{ニヌ}}x^2+\text{ネ}x+C$

である。ただし，Cは積分定数とする。

(2)（ i ）

$f(x) = \dfrac{1}{5}x+3$，$S(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx = \left[\frac{1}{10}x^2+3x\right]_0^t = \frac{1}{10}t^2+3t = 400$

したがって，$t^2+30t-4000 = (t+80)(t-50) = 0$，$t = 50$

ソメイヨシノの開花日時は2月に入ってから 50 日後 $\boxed{\text{ノ ④}}$ となる。

$\boxed{\text{ノ}}$ の解答群

⓪ 30日後　① 35日後　② 40日後　③ 45日後　④ 50日後　⑤ 55日後　⑥ 60日後　⑦ 65日後

（ii）

太郎さんと花子さんは，2 月に入ってから 30 日後以降の気温について話をしている。

太郎：1 次関数を用いてソメイヨシノの開花日時を求めてみたよ。

花子：気温の上がり方から考えて，2 月に入ってから 30 日後以降の気温を表す関数が 2 次関数の場合も考えてみようか。

花子さんは気温を表す関数$f(x)$ を，$0 \leqq x \leqq 30$のときは太郎さんと同じように

$$f(x) = \frac{1}{5}x + 3 \quad ①$$

とし，$x \geqq 30$ のときは

$$f(x) = \frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5 \quad ②$$

として考えた。なお $x = 30$ のとき①の右辺の値と②の右辺の値は一致する。花子さんの考えた式を用いて，ソメイヨシノの開花日時を考えよう。(1)より

$\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x + 3\right)dx = 180$ であり，$\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5\right)dx = 115$ となることがわかる。

また，$x \geqq 30$ の範囲において $f(x)$ は増加する。よって

$$\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5\right)dx \ \boxed{<\ ハ⓪} \ \int_{40}^{50}\left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5\right)dx$$

であることがわかる。

$$\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x + 3\right)dx + \int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5\right)dx = 180 + 115 = 295 < 400 \quad ③$$

$$\int_0^{30}\left(\frac{1}{5}x + 3\right)dx + \int_{30}^{50}\left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5\right)dx > 180 + 2\int_{30}^{40}\left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{6}x + 5\right)dx = 410 > 400 \quad ④$$

③から 40日後までには開花しない，④から 50日後には開花している，ことがわかる。

以上より，ソメイヨシノの開花日時は2月に入ってから40日後より後，かつ50日後より前（$\boxed{ヒ④}$）となる。

$\boxed{ハ}$の解答群

⓪ ＜　　① ＝　　② ＞

$\boxed{ヒ}$の解答群

⓪ 30日後より前　① 30日後　② 30日後より後，かつ40日後より前

③ 40日後　④ 40日後より後，かつ50日後より前　⑤ 50日後

⑥ 50日後より後，かつ60日後より前　⑦ 60日後　⑧ 60日後より後

コメント：

［1］は3次関数の極値，最大値とその応用に関する問題。題意は簡明であり，速やかに対応したい。

［2］は，ある事象（ここでは温度）の累積値が一定の値を超えると，別の事象が発生するという過程を1次関数，2次関数の積分によって評価する。難しい式の取り扱いを必要とするものではないが，長文を的確に読み込んで，題意を正確に把握しよう。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

<解答>

(1) ア０　イ１　ウ２　エ４　オ２　カ１　キク65　ケ４

(2) コ１　サ２　シス25　セ３　ソ７　タ０　チツ17

<解説>

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 43 ページの正規分布表を用いてもよい。

(1)

ある生産地で生産されるピーマン全体を母集団とし，この母集団におけるピーマン１個の重さ（単位はg）を表す確率変数を X とする。m と σ を正の実数とし，X は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとする。

（ⅰ）

この母集団から１個のピーマンを無作為に抽出したとき，重さが m g 以上である確率 $P(X \geqq m)$ は，m は平均値であるから，平均値以上である確率である。したがって，

$$P(X \geqq m) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq \text{ア}\right) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq 0\right) = \frac{1}{2} = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}\text{である。}$$

（ⅱ）

母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本 X_1，X_2，・・・，X_n の標本平均を $\overline{X}$ とする。$\overline{X}$の平均（期待値）と標準偏差はそれぞれ

$$E(\overline{X}) = m = \boxed{\text{エ④}}\ ,\ \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \boxed{\text{オ②}}$$

$n=400$，標本平均が 30.0 g，標本の標準偏差が 3.6 g のとき，m の信頼度 90 % の信頼区間を次の方針で求めよう。

方針

Z を標準正規分布 $N(0\,,1)$ に従う確率変数として，$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.901$ となる z_0 を正規分布表から求める。この z_0 を用いると m の信頼度 90.1 %の信頼区間が求められるが，これを信頼度 90 % の信頼区間とみなして考える。

$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 2P(0 \leqq Z \leqq z_0)$ だから，$P(0 \leqq Z \leqq z_0) = \dfrac{0.901}{2} = 0.4505$ となる z_0 は 43 ページの正規分布表から 1.65 。したがって方針において，$z_0 = 1.65 = \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キク}}$ である。

方針に基づいて，m の信頼度 90 %の信頼区間を考える。

$Z = \dfrac{\overline{X}-m}{\sigma(\overline{X})}$ とすれば，Z の信頼度 90 % の区間は $-z_0 \leqq Z \leqq z_0$，$\therefore\ -z_0 \leqq \dfrac{\overline{X}-m}{\sigma(\overline{X})} \leqq z_0$，

したがって，m の信頼度 90 % の区間は，$\overline{X} - \sigma(\overline{X})z_0 \leqq m \leqq \overline{X} + \sigma(\overline{X})z_0$

一般に，標本の大きさ n が大きいときには，標本平均の標準偏差を求めるとき，母標準偏差の代わりに，標本の標準偏差を用いてもよいことが知られている。すなわち母標準偏差 σ の値として，ここでは標本の標準偏差 3.6 を用いて，

$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{3.6}{\sqrt{400}} = 0.18$，$\overline{X} = 30.0$，$z_0 = 1.65$ として

m の信頼度 90 % の区間は $29.7 \leqq m \leqq 30.3$ （$\boxed{ケ④}$）

$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ σ　① σ^2　② $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$　③ $\dfrac{\sigma^2}{n}$　④ m　⑤ $2m$

⑥ m^2　⑦ $\sqrt{m}$　⑧ $\dfrac{\sigma}{n}$　⑨ $n\sigma$　(a) nm　(b) $\dfrac{m}{n}$

$\boxed{ケ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $28.6 \leqq m \leqq 31.4$　① $28.7 \leqq m \leqq 31.3$　② $28.9 \leqq m \leqq 31.1$

③ $29.6 \leqq m \leqq 30.4$　④ $29.7 \leqq m \leqq 30.3$　⑤ $29.9 \leqq m \leqq 30.1$

(2)

(1) の確率変数 X において，$m = 30.0$，$\sigma = 3.6$ とした母集団から無作為にピーマンを 1 個ずつ抽出し，ピーマン 2 個を 1 組にしたものを袋に入れていく。このようにしてピーマン 2 個を 1 組にしたものを 25 袋作る。その際，1 袋ずつの重さの分散を小さくするために，次のピーマン分類法を考える。

ピーマン分類法

無作為に抽出したいくつかのピーマンについて，重さが 30.0 g 以下のときを S サイズ，30.0 g を超えるときは L サイズと分類する。そして，分類されたピーマンから S サイズと L サイズのピーマンを一つずつ選び，ピーマン 2 個を 1 組とした袋を作る。

(i)

ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，ピーマン分類法で 25 袋作ることができる確率 p_0 を考えよう。母集団平均が 30.0 g だから，無作為に 1 個抽出したピーマンが S サイズである確率は $\dfrac{1}{2} = \dfrac{コ}{サ}$ である。ピーマンを無作為に 50 個抽出したときの S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_0 とすると，U_0 は二項分布 $B\left(50, \dfrac{1}{2}\right)$ に従うので，

$p_0 = {}_{50}C_{シス} \times \left(\dfrac{コ}{サ}\right)^{シス} \times \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{50-シス} = {}_{50}C_{25} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{25} \times \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{50-25}$ となる。

p_0 を計算すると，$p_0 = 0.1122\ldots$ となることから，ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，25 袋作ることができる確率は 0.11 程度とわかる。

（ii）

ピーマン分類法で 25 袋作ることができる確率が 0.95 以上となるようなピーマンの個数を考えよう。

k を自然数とし，ピーマンを無作為に $(50+k)$ 個抽出したとき，S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_k とすると，U_k は二項分布 $B\left(50+k, \dfrac{1}{2}\right)$ にしたがう。

$(50+k)$ は十分に大きいので，U_k は近似的に正規分布 N(セ , ソ) に従う。ここで，

$\boxed{セ}$ ＝（平均値）＝（標本の数 × Sサイズの確率）＝ $(50+k)\times\dfrac{1}{2}$ ＝ $\boxed{セ ③}$

$\boxed{ソ}$ ＝（分散）＝（標本の数×Sサイズの確率×Lサイズの確率）＝ $(50+k)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$ ＝ $\boxed{ソ ⑦}$

ピーマン分類法で，25 袋作ることができる確率を p_k とすると $p_k = P(25 \leqq U_k \leqq 25+k)$

$Y = \dfrac{U_k - セ}{\sqrt{ソ}} = \dfrac{U_k - (50+k)/2}{\sqrt{50+k}\,/2}$ とすると，Yは近似的に標準正規分布$N(0, 1)$に従う。

$U_k = 25$のとき，$Y = -\dfrac{k}{\sqrt{50+k}}$，$U_k = 25+k$ のとき，$Y = \dfrac{k}{\sqrt{50+k}}$

よって，$p_k = P(25 \leqq U_k \leqq 25+k) = P\left(-\dfrac{k}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \dfrac{k}{\sqrt{50+k}}\right)$

$= P\left(-\dfrac{タ ⓪}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \dfrac{タ ⓪}{\sqrt{50+k}}\right)$ となる。

$\boxed{タ ⓪} = k = \alpha$，$\sqrt{50+k} = \beta$ とおく。

$p_k \geqq 0.95$ となるような $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について，正規分布表から $\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 1.96$を満たせばよいことがわかる。

ここでは $\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 2$　①

を満たす自然数kを考えることにする。①の両辺は正であるから，$\alpha^2 \geqq 4\beta^2$ を満たす最小の k を k_0 として，k_0 を求める。$k^2 \geqq 4(50+k)$ から，$(k-2)^2 \geqq 204$，$\therefore k-2 \geqq \sqrt{204} \fallingdotseq 2\sqrt{51} = 14.28$

したがって $k \geqq 16.28$，$\therefore k_0 = 17 = \boxed{チツ}$ であることがわかる。ただし，$k_0 = 17$ の計算においては，$\sqrt{51} = 7.14$を用いてもよい。少なくとも $(50+17) = 67$ 個のピーマンを抽出しておけば，ピーマン分類法で 25 袋作ることができる確率は 0.95 以上となる。

$\boxed{セ}$ ～ $\boxed{タ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ k　　① $2k$　　② $3k$　　③ $\dfrac{50+k}{2}$

④ $\dfrac{25+k}{2}$　　⑤ $25+k$　　⑥ $\dfrac{\sqrt{50+k}}{2}$　　⑦ $\dfrac{50+k}{4}$

コメント：

数学Ｂの「確率分布と統計的な推測」分野の基本的な問題。昨年も同様の問題だから，対策の勉学に苦労することは少なかろう。ただ長文で，$\boxed{}$ 混じりの読み難い文章を速やかに的確に理解する国語力が重要である。

特に(2)で「ピーマン分類法で25袋作ることができる確率」とはどういう意味か，速やかに理解できるかがポイントになる。1袋にSサイズ1個，Lサイズ1個のピーマンを入れるのだから，S，Lとも25個以上となる必要がある。したがって「ピーマンを無作為に$(50+k)$個取り出して，ピーマン分類法により25袋作ることができる確率」ということは，取り出した$(50+k)$個の中にSサイズのピーマンの個数jが$25 \leqq j \leqq 25+k$存在する確率ということになる。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) ア２　イ０　ウ３　エ４　オ０　(2) カ２　キ３　ク２　ケ１　コ３　サシ30　スセ10　(3) ソ８

＜解説＞

花子さんは，毎年初めに預金口座に一定額の入金をすることにした。この入金を始める前における花子さんの預金は10万円である。ここで，預金とは預金口座にあるお金のことである。預金には年利1％で利息がつき，ある年の初めの預金がx万円であれば，その年の終わりには預金は$1.01x$万円となる。次の年の初めには$1.01x$万円に入金額を加えたものが預金となる。

毎年の初めの入金額をp万円とし，n年目の初めの預金をa_n万円とおく。ただし，$p>0$とし，nは自然数とする。

例えば，$a_1 = 10 + p$，$a_2 = 1.01(10+p)+p$である。

(1)

a_nを求めるために二つの方針で考える。

方針１

n年目の初めの預金と$(n+1)$年目の初めの預金との関係に着目して考える。

3年目の初めの預金a_3万円について，$a_3 = 1.01a_2 + p = 1.01\{1.01(10+p)+p\}+p = \boxed{ア②}$

すべての自然数nについて

$$a_{n+1} = 1.01\,a_n + p = \boxed{イ⓪}\ a_n + \boxed{ウ③}$$

が成り立つ。これは

$$a_{n+1} + 100p = a_{n+1} + \boxed{エ④} = 1.01\,(a_n + 100p) = \boxed{オ⓪}\,(a_n + \boxed{エ④})$$

と変形でき，a_nを求めることができる。

$\boxed{ア}$の解答群

⓪ $1.01\{1.01(10+p)+p\}$　① $1.01\{1.01(10+p)+1.01p\}$　② $1.01\{1.01(10+p)+p\}+p$

③ $1.01\{1.01(10+p)+p\}+1.01p$　④ $1.01(10+p)+1.01p$　⑤ $1.01(10+1.01p)+1.01p$

$\boxed{\text{イ}}$～$\boxed{\text{オ}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 1.01　① 1.01^{n-1}　② 1.01^{n}　③ p　④ $100p$

⑤ np　⑥ $100np$　⑦ $1.01^{n-1}\times 100p$　⑧ $1.01^{n}\times 100p$

方針２

もともと預金口座にあった 10 万円と毎年の初めに入金した p 万円について，n 年目の初めにそれぞれがいくらになるかに着目して考える。

もともと預金口座にあった 10 万円は，2 年目の初めには 10×1.01 万円になり，3 年目の初めには 10×1.01^{2} 万円になる。同様に考えると n 年目の初めには $10\times 1.01^{n-1}$ 万円になる。

- 1 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p\times 1.01^{n-1}=p\times 1.01^{\text{②カ}}$ 万円になる。
- 2 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには $p\times 1.01^{n-2}=p\times 1.01^{\text{③キ}}$ 万円になる。

$$\vdots$$

- n 年目の初めに入金した p 万円は，n 年目の初めには p 万円のままである。

これより

$$a_n=10\times 1.01^{n-1}+p\times 1.01^{n-1}+p\times 1.01^{n-2}+\cdots+p$$

$$=10\times 1.01^{n-1}+p\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}=10\times 1.01^{n-1}+p\sum_{k=1}^{n}1.01^{\text{②ク}}$$

ここで，等比数列の和の公式により，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1.01^{k-1}=\frac{1\times(1.01^{n}-1)}{1.01-1}=100\,(1.01^{n}-1)=\boxed{\text{ケ①}}$

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $n+1$　① n　② $n-1$　③ $n-2$

$\boxed{\text{ク}}$の解答群

⓪ $k+1$　① k　② $k-1$　③ $k-2$

$\boxed{\text{ケ}}$の解答群

⓪ 100×1.01^{n}　① $100\,(1.01^{n}-1)$　② $100\,(1.01^{n-1}-1)$

③ $n+1.01^{n-1}-1$　④ $0.01\,(101n-1)$　⑤ $\dfrac{n\times 1.01^{n-1}}{2}$

(2)

花子さんは，10 年目の終わりの預金が 30 万円以上になるための入金額について考えた。

10 年目の終わりの預金が 30 万円以上であることを不等式を用いて表すと

$1.01\,a_{10}=\boxed{\text{③コ}}\geqq 30$

(1)の検討において，$a_{10}=10\times 1.01^{9}+100p\,(1.01^{10}-1)$ だから，

$1.01\,a_{10}=10\times 1.01^{10}+101p\,(1.01^{10}-1)\geqq 30$

$$\therefore\ p\geqq\frac{30-10\times 1.01^{10}}{101\,(1.01^{10}-1)}=\frac{\text{サシ}-\text{スセ}\times 1.01^{10}}{101\,(1.01^{10}-1)}$$

したがって，毎年の初めの入金額が例えば 18000円であれば，10 年目の終わりの預金が 30 万円以上になることがわかる。

$\boxed{コ}$ の解答群

⓪ a_{10}　① $a_{10}+p$　② $a_{10}-p$　③ $1.01a_{10}$　④ $1.01a_{10}+p$　⑤ $1.01a_{10}-p$

(3)

1 年目の入金を始める前における花子さんの預金が 10 万円ではなく，13 万円の場合を考える。すべての自然数 n に対して，この場合の n 年目の初めの預金は a_n 万円よりも $3\times1.01^{n-1}$ $\boxed{⑧ソ}$ 万円多い。なお，年利は 1% であり，毎年の初めの入金額は p 円のままである。

$a_n=10\times1.01^{n-1}+100p(1.01^n-1)$だから，入金を始める前の預金が 13万円 の場合の n 年目の初めの預金は $a_n'=13\times1.01^{n-1}+100p(1.01^n-1)$，$\therefore\ a_n'-a_n=3\times1.01^{n-1}$ $\boxed{⑧ソ}$

$\boxed{ソ}$ の解答群

⓪ 3	① 13	② $3(n-1)$	③ $3n$
④ $13(n-1)$	⑤ $13n$	⑥ 3^n	⑦ $3+1.01(n-1)$
⑧ $3\times1.01^{n-1}$	⑨ 3×1.01^n	(a) $13\times1.01^{n-1}$	(b) 13×1.01^n

コメント：

複利法による預金を例とした数列に関わる問題。長文であるが，特段に難しい内容ではないので，落ち着いて的確に読み込んで対応しよう。昨年度に比べると，かなり易化したように思う。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第５問（選択問題）（配点　20）

<解答>

(1) ア 1　イ 2　ウ 1　エ 2　オ 1

(2) カ 9　キ 2

(3) ク 0　ケ 3　コ 0　サ 4　シ 2

<解説>

三角錐 PABC において，辺 BC の中点を M とおく。また，∠PAB = ∠PAC とし，この角度を θとおく。ただし，$0°<\theta<90°$とする。

(1)

M は BC の中点だから，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{ア}{イ}\overrightarrow{AB}+\frac{ウ}{エ}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\angle PAB=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle PAC=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

したがって，$\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\cos\theta=\boxed{オ①}$　①

$\boxed{オ}$の解答群

⓪ $\sin\theta$　① $\cos\theta$　② $\tan\theta$　③ $\dfrac{1}{\sin\theta}$　④ $\dfrac{1}{\cos\theta}$

⑤ $\dfrac{1}{\tan\theta}$　⑥ $\sin\angle BPC$　⑦ $\cos\angle BPC$　⑧ $\tan\angle BPC$

(2)

$\theta=45^\circ$ とし，さらに

$|\overrightarrow{AP}|=3\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{PB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{PC}|=3$　が成り立つ場合を考える。このとき

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=3\sqrt{2}\times3\times\cos45^\circ=9$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=3\sqrt{2}\times3\times\cos45^\circ=9$

したがって，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=9=\boxed{カ}$

さらに，直線AM上の点Dが$\angle\mathrm{APD}=90^\circ$ を満たしているとする。

$\angle\mathrm{PAM}=\alpha$ とすれば，$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC})=9$，$\therefore\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{2}|\overrightarrow{AM}|}$

$|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{\cos\alpha}=3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}|\overrightarrow{AM}|=2|\overrightarrow{AM}|$，$\therefore\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}=\boxed{キ}\overrightarrow{AM}$

(3)

$\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AM}$ で定まる点をQ とおく。$\overrightarrow{PA}$ と$\overrightarrow{PQ}$ が 垂直である三角錐PABC はどのようなものかについて考えよう。例えば(2)の場合では，点 Q は点 D と一致し，$\overrightarrow{PA}$ と$\overrightarrow{PQ}$ は垂直である。

(i)

$\overrightarrow{PA}$ と$\overrightarrow{PQ}$ が 垂直であるとき，$\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ によって表すと，

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

したがって，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0=-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$,

$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}$，すなわち $\boxed{ク⓪}$ が成り立つ。

さらに①から，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

$\boxed{ク⓪}$から，$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta+|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=|\overrightarrow{AP}|$，すなわち$\boxed{ケ③}$ が成り立つことがわかる。

$\boxed{ク}$の解答群

⓪ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}$　① $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}$

② $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　③ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

④ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　⑤ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\boxed{ケ}$の解答群

⓪ $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{BC}|$　① $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{BC}|$

② $|\overrightarrow{AB}|\sin\theta+|\overrightarrow{AC}|\sin\theta=|\overrightarrow{AP}|$　③ $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta+|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=|\overrightarrow{AP}|$

④ $|\overrightarrow{AB}|\sin\theta=|\overrightarrow{AC}|\sin\theta=2|\overrightarrow{AP}|$　⑤ $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=2|\overrightarrow{AP}|$

(ⅱ)

k を正の実数とし，$k\,\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$ が成り立つとする。

$k\,\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB} = k\,|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta$，

$\therefore k\,|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$，すなわち $\boxed{\text{コ}\ ⓪}$ が成り立つ。

また，点 B から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点をB’とし，同様に点 C から直線 AP に下ろした垂線と直線 AP との交点を C’とする。このとき，$\overrightarrow{PA}$と$\overrightarrow{PQ}$ が垂直であるとする。

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}$，したがって，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA}\,(\,\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}\,) = \overrightarrow{PA}\,(\,\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\,)$$

$$= |\overrightarrow{PA}|^2 - |\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta - |\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta = 0$$

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta + k|\overrightarrow{AB}|\cos\theta = (1+k)|\overrightarrow{AB'}|$

$\Leftrightarrow$ B’は線分 AP を $(1:k)$ に内分する点

また同様に，

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = \dfrac{1}{k}|\overrightarrow{AC}|\cos\theta + |\overrightarrow{AC}|\cos\theta = |\overrightarrow{AC'}| + \dfrac{1}{k}|\overrightarrow{AC'}|$

$\Leftrightarrow$ C’は線分 AP を $(k:1)$ に内分する点

したがって，$\overrightarrow{PA}$ と$\overrightarrow{PQ}$ が垂直であることと $\boxed{\text{サ}\ ④}$ であることと同値である。

特に $k = 1$ のとき，B’，C’ は共に AP を $(1:1)$ に内分する同一の点であり，△PABと△PACはそれぞれ BP = BA，CP = CA を満たす二等辺三角形である。

したがって $k = 1$ のとき，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であることは，$\boxed{\text{シ}\ ②}$ であることと同値である。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ $k\,|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$　① $|\overrightarrow{AB}| = k\,|\overrightarrow{AC}|$　② $k\,|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{2}\,|\overrightarrow{AB}|$　③ $k\,|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{2}\,|\overrightarrow{AC}|$

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ B’と C’がともに線分 AP の中点

① B’と C’が線分 AP をそれぞれ $(k+1):1$ と $1:(k+1)$ に内分する点

② B’と C’が線分 AP をそれぞれ $1:(k+1)$ と $(k+1):1$ に内分する点

③ B’とC’ が線分 AP をそれぞれ $k:1$と$1:k$ に内分する点

④ B’とC’が線分 AP をそれぞれ $1:k$ と $k:1$ に内分する点

⑤ B’とC’が線分 AP を $k:1$ に内分する点

⑥ B’とC’が線分 AP を $1:k$ に内分する点

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ △PAB と △PAC がともに正三角形

① △PAB と △PAC がそれぞれ ∠PBA = 90°，∠PCA = 90° を満たす直角二等辺三角形

② △PAB と △PAC がそれぞれ BP = BA，CP = CA を満たす二等辺三角形

③ △PAB と △PAC が合同

④ AP = BC

コメント：

立体図形をベクトルによって扱う問題。立体図形は苦手という受験生は少なくないかも知れない。しかしベクトルの合成，内積などを活用して考察すれば，決して難しい問題ではないことに気づくことであろう。

<総評>

センター試験から大学入学共通テストへ変更となった３年目である。知識，技能の修得に加え，思考力，判断力，表現力を高める高校教育をめざすことが，共通テストにも反映されている。

長い問題文を速やかに読み込みながら，解答方針を考察し，数学的な結論に至るまでの思考過程に沿って，要所の設問に答えていくという対応が必要である。思考過程を追うことに負担はあるが，それだけに数学的な問題としては難解なものではない。

昨年は，数学Ｂの選択問題（３問中２問選択）は３問とも太郎さんと花子さんの会話を通して，問題設定と思考過程を理解し解答するものであった。今年は，第４問のみであった。公平性の観点から，これで良いのかという疑問が残る。

230313