令和６年度（2024年度）共通テスト　数学Ⅰ・数学Ａ　解説

数学　①　[数学Ⅰ　数学Ⅰ・数学A]　（いずれか選択　100点，70分）

数学Ⅰ・数学Ａ　（注）この科目には，選択問題があります。（29ページ参照）

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

[１]ア７　イ７　ウ３　エオカ −56　キク 14　ケ３　コ６　サ０

[２]シ４　ズ４　セ０　ソ７　タ４　チ２　ツ３　テ７　ト５　ナ０　ニ１

＜解説＞

[１]

不等式

$$n < 2\sqrt{13} < n+1 \qquad ①$$

を満たす整数 n は，$n^2 < 52 < (n+1)^2$より，$\boxed{ア} = 7$ である。実数 a，b を

$$a = 2\sqrt{13} - \boxed{ア} \qquad ②$$

$$b = \frac{1}{a} \qquad ③$$

で定める。このとき

$$b = \frac{1}{2\sqrt{13}-7} = \frac{2\sqrt{13}+7}{(2\sqrt{13}-7)(2\sqrt{13}+7)}$$

$$= \frac{7+2\sqrt{13}}{(2\sqrt{13})^2-49} = \frac{7+2\sqrt{13}}{3} = \frac{イ+2\sqrt{13}}{ウ} \qquad ④$$

である。また

$$a^2 - 9b^2 = (2\sqrt{13}-7)^2 - 9\left(\frac{7+2\sqrt{13}}{3}\right)^2$$

$$= (2\sqrt{13}-7)^2 - (7+2\sqrt{13})^2 = -56\sqrt{13} = \boxed{エオカ}\sqrt{13}$$

である。

①から

$$\frac{ア}{2} < \sqrt{13} < \frac{ア+1}{2}，すなわち\frac{7}{2} < \sqrt{13} < \frac{7+1}{2} = 4 \qquad ⑤ が成り立つ。$$

太郎さんと花子さんは，$\sqrt{13}$ について話している。

太郎：⑤ から $\sqrt{13}$ のおよその値がわかるけど，小数点以下はよくわからないね。
花子：小数点以下をもう少し詳しく調べることができないかな。

① と④ から

$$\frac{m}{3} = \frac{7+7}{3} < b = \frac{7+2\sqrt{13}}{3} < \frac{7+8}{3} = \frac{m+1}{3}$$

を満たす整数 m は 14 = $\boxed{キク}$ となる。よって，③から

$$\frac{ウ}{m+1} = \frac{3}{m+1} < a < \frac{3}{m} = \frac{ウ}{m}，\text{すなわち}\ \frac{3}{15} < a < \frac{3}{14} \qquad ⑥$$

が成り立つ。

$\sqrt{13}$ の整数部分は ⑤ から $\boxed{ケ} = 3$ であり，②と⑥より，$\dfrac{3}{15} < 2\sqrt{13} - 7 < \dfrac{3}{14}$

したがって $3.60 < \sqrt{13} < 3.5 + \dfrac{3}{28} = 3.608$ となる。すなわち②と⑥を使えば $\sqrt{13}$ の小数第1位

の数字は $\boxed{コ} = 6$，小数第 2 位の数字は $\boxed{サ} = 0$ であることがわかる。

コメント：

$\sqrt{13}$ の値を求める計算の流れを追う問題。整数部分と小数点以下部分の数字を求める。√ を含む数式の演算を的確に行うこと。

［2］

図 1 を参照して考える。

坂は 100m の水平距離に対して 7m の割合で高くなるので，$\tan\angle DCP = \dfrac{7}{100} = 0.07$

37 ページ の三角比の表から，$\tan 4° = 0.0699 < 0.7 = \tan\angle DCP < 0.0875 = \tan 5°$

$\tan\theta$ は単調増加だから， $4° < \angle \mathrm{DCP} < 4° + 1°$ となって，

$n° < \angle \mathrm{DCP} < n° + 1°$ を満たす n の値は $\boxed{シ}° = 4°$ である。

$\mathrm{BE} = \boxed{ス} \times \boxed{セ}\,\mathrm{m} = \mathrm{CD} \times \sin\angle DCP = 4 \times ⓪ = 4 \times \sin 4° = 4 \times 0.698 = 0.2792\ \mathrm{m}$

$\mathrm{DE} = (\boxed{ソ} + \boxed{タ} \times \boxed{チ})\,\mathrm{m} = (\mathrm{BC} + \mathrm{CD} \times \cos\angle DCP)\,\mathrm{m}$

$= 7 + 4 \times ② = 7 + 4 \times \cos 4° = 7 + 4 \times 0.998 = 10.99\ \mathrm{m}$

電柱の高さ $\boxed{ツ}\,\mathrm{m} = \mathrm{AB} = \mathrm{AE} + \mathrm{BE} = \mathrm{DE} + \mathrm{BE} = 10.99 + 0.2792 = 11.26 = 11.3\mathrm{m} = ③$

上記の計算では，$\angle \mathrm{DCP} = 4°$とした。また，$\angle \mathrm{ADE} = 45°$だから，$\mathrm{AE} = \mathrm{DE}$

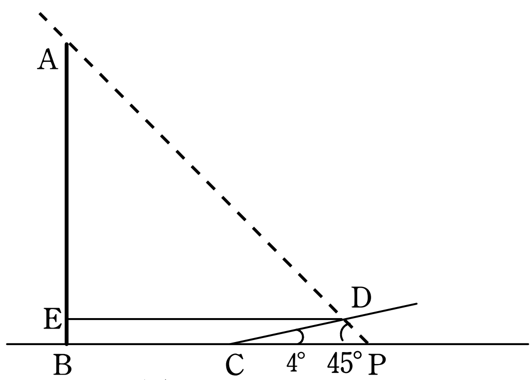

図 1

$\boxed{セ}$，$\boxed{チ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\sin\angle DCP$　① $\dfrac{1}{\sin\angle DCP}$　② $\cos\angle DCP$

③ $\dfrac{1}{\cos\angle DCP}$　④ $\tan\angle DCP$　⑤ $\dfrac{1}{\tan\angle DCP}$

$\boxed{ツ}$ の解答群

⓪ 10.4　① 10.7　② 11.0

③ 11.3　④ 11.6　⑤ 11.9

別の日，太陽高度が$\angle \mathrm{APB} = 42°$のときの電柱の影の坂にある部分の長さCDを求める。上記の議論と同様に，

$\mathrm{BE} = \mathrm{CD}\times\sin\angle DCP = \mathrm{CD}\times\sin 4°$

$\mathrm{DE} = (\mathrm{BC} + \mathrm{CD}\times\cos\angle DCP) = 7 + \mathrm{CD}\times\cos 4°$

$\mathrm{AE} = \mathrm{DE}\times\tan\angle ADE = (7 + \mathrm{CD}\times\cos 4°)\tan 42°$

$\mathrm{AB} = \mathrm{BE} + \mathrm{AE} = \mathrm{CD}\times\sin\angle DCP + (7 + \mathrm{CD}\times\cos\angle DCP)\tan 42°$

したがって，$\mathrm{CD} = \dfrac{AB - 7\times\tan 42°}{\sin\angle DCP + \cos\angle DCP\times\tan 42°} = \dfrac{AB - 7\times ⑤}{⓪ + ①\times ⑤} = \dfrac{AB - テ\times ト}{ナ + ニ\times ト}$

$= \dfrac{11.3 - 7\times\tan 42°}{\sin 4° + \cos 4°\times\tan 42°} = \dfrac{11.3 - 7\times 0.900}{0.070 + 0.998\times 0.900} = \dfrac{4.997}{0.968} = 5.2\ \mathrm{m}$

$\boxed{ト}$～$\boxed{ニ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\sin\angle DCP$　① $\cos\angle DCP$　② $\tan\angle DCP$

③ $\sin 42°$　④ $\cos 42°$　⑤ $\tan 42°$

コメント：

三角比の概念や計算を日常の場面を題材として扱う問題。太陽の高度から斜面における影の長さを求める。難しい問題ではないのだが，長い問題文を読み込んで，題意を的確に捉えて，速やかに考察を進める。ある日の太陽高度は$\angle \mathrm{APB} = 45°$，別の日は$42°$から，影の長さの変化をとらえる。

第２問（必答問題）（配点 30）

<解答>

[１] (1) ア 9　(2) イ 8　ウエ 12　(3) オ 8　カキ 13　(4) ク 3　ケ 3　コ 2

[２] (1) サ 8　シ 6　ス 4　セ 0　ソ 3　タチ 51　ツ 1　(2) テ 1

<解説>

[１]

(1)

図１を参照しながら考える。

△PBQの面積 = 台形PBCO－△BCQ － △PQO

$= \frac{1}{2}\times 6\times(4+1) - \frac{1}{2}\times 4\times 2 - \frac{1}{2}\times 4\times 1 = 9 = \boxed{ア}$

(2)

開始時刻からの経過時間を t 秒とすれば，$0 \leqq t \leqq 3$ において $\mathrm{P}(t, 0)$，$\mathrm{Q}(0, 2t)$だから，

△PBQの面積 = 台形PBCO－△BCQ － △PQO

$= \frac{1}{2}\times 6\times(4+t) - \frac{1}{2}\times 4\times 2t - \frac{1}{2}\times(6-2t)\times t = t^2 - 4t + 12$

$= (t-2)^2 + 8$　①

$0 \leqq t \leqq 3$ において，① の最小値は $t = 2$ のとき 8 であり，最大値は $t = 0$ のとき 12 である。

したがって，面積の最小値は $8 = \boxed{イ}$ であり，最大値は $12 = \boxed{ウエ}$ である。

(3)

$3 \leqq t \leqq 6$ において，図２のように $\mathrm{P}(t, 0)$，$\mathrm{Q}(0, 2t-6)$ だから，

△PBQの面積 = 台形PBCO－△BCQ － △PQO

$= \frac{1}{2}\times 6\times(4+t) - \frac{1}{2}\times 4\times(12-2t) - \frac{1}{2}\times(2t-6)\times t$

$= -t^2 + 10t - 12 = -(t-5)^2 + 13$

$3 \leqq t \leqq 6$ において，最小値は 9，最大値は13

したがって開始時刻から終了時刻までの，最小値は $8 = \boxed{オ}$ であり，最大値は $13 = \boxed{カキ}$ である。

(4)

$0 \leqq t \leqq 3$において，$t^2 - 4t + 12 \leqq 10$ であるから，$2-\sqrt{2} \leqq t \leqq 3$

$3 \leqq t \leqq 6$ において，$-t^2 + 10t - 12 \leqq 10$ であるから，$3 \leqq t \leqq 5-\sqrt{3}$

したがって，面積が10以下となる時間は

$(5-\sqrt{3})-(2-\sqrt{2}) = (3-\sqrt{3} + \sqrt{2}) = ($ク $-$ $\sqrt{ケ}$ $+$ $\sqrt{コ}$$)$ 秒間である。

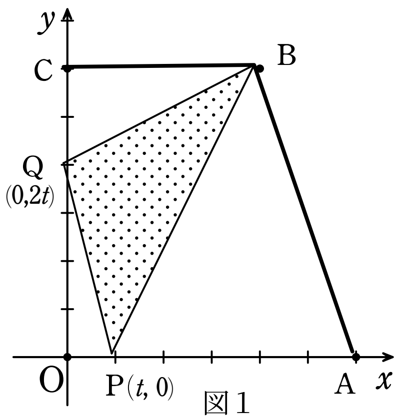

図１

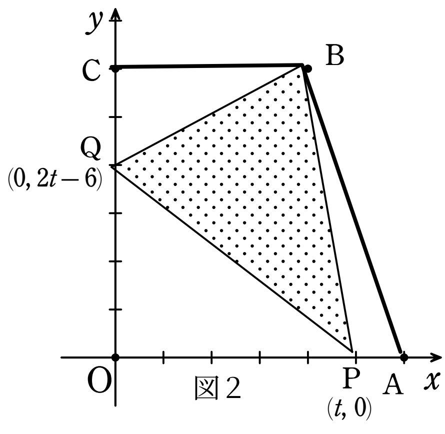

図２

コメント：

２つの移動する点が作る三角形の面積の変化を考察する問題である。三角形の面積を表式化すれば，経過時間の二次関数となるので，二次関数の最大値，最小値問題ということになる。移動する点の座標を経過時間の関数として表現すれば，面積の表式化は容易である。

(3)の最小値で，うっかりすると $3 \leqq t \leqq 6$における最小値を答えてしまう。問題は 移動開始時刻から終了時刻までの最小値であるから，(2)の最小値と同じになる。

［2］

(1)(ⅰ)

問題図１からＡの最頻値は階級 $\boxed{\text{サ}}$ ＝ ⑧ の階級値である。

また問題図２からＢの中央値が含まれる階級は450以上480未満だから，$\boxed{\text{シ}}$ ＝ ⑥ である。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 270以上300未満　　① 300以上330未満

② 330以上360未満　　③ 360以上390未満

④ 390以上420未満　　⑤ 420以上450未満

⑥ 450以上480未満　　⑦ 480以上510未満

⑧ 510以上540未満　　⑨ 540以上570未満

(ⅱ)

- 速い方から13番目の選手とは第１四分位数にあたる選手だから，問題図３からＢの速い方から13番目の選手のベストタイムは約435秒，Ａの速い方から13番目の選手のベストタイムは約480秒と読み取れる。
  前者は後者よりおよそ45 ＝ ④ ＝ $\boxed{\text{ス}}$ 秒速い。
- Ａの四分位範囲は約55，Ｂの四分位範囲は約50と読み取れる。
  前者から後者を引いた差の絶対値はおよそ5だから，$\boxed{\text{セ}}$ ＝ ⓪ である。

$\boxed{\text{ス}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 5　① 15　② 25　③ 35　④ 45　⑤ 55

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ 0以上20未満　① 20以上40未満　② 40以上60未満　③ 60以上80未満　④ 80以上100未満

(ⅲ)

式　(あるデータのある選手のベストタイム)＝ (そのデータの平均値) ＋ z× (そのデータの標準偏差)

式と表１を用いると，Ｂの１位の選手のベストタイムに対する z の値は

$$z=\frac{296-454}{45}=-\frac{158}{45}=-3.51=-\boxed{\text{ソ}}.\boxed{\text{タチ}}$$

このことから，Ｂの１位の選手のベストタイムは，平均値より標準偏差のおよそ3.51倍だけ小さいことがわかる。

Ａの１位の選手のベストタイムに対する z の値は

$$z=\frac{376-504}{40}=-\frac{128}{40}=-3.2$$

式が意味することは集団の記録の傾向（平均値と標準偏差）の影響を除いて，個人の記録の評価をするということである。すると z の小さい方が，より小さい（より速い）ということになる。

Ａ，Ｂそれぞれにおける，1位の選手についての記述として，次の⓪～③のうち，正しいものは

$\boxed{ツ}$ ＝ ① である。

$\boxed{ツ}$ の解答群

⓪ ベストタイムで比較すると A の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると A の 1 位の選手の方が優れている。

① ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。

② ベストタイムで比較すると A の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。

③ ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると A の 1 位の選手の方が優れている。

(2)

次の(a)，(b)は問題図４，問題図５に関する記述である。

(a) マラソンのベストタイムの速い方から 3 番目までの選手の 10000m のベストタイムは，3 選手とも 1670 秒未満である。

(b) マラソンと 10000mの間の相関は，5000m と 10000m の相関より強い。

問題図４では，マラソンのタイムの左から３点の10000mのタイムは1670 秒未満だから(a)は正しい。
問題図４の方が問題図５よりも 50 の点のばらつきが大きく，相関性が小さいから (b) は誤り。
したがって，(a)，(b)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{テ}$ ＝ ①

$\boxed{テ}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

コメント：

数学Ⅰの「データの分析」分野からの出題である。長文を的確に読み取り，題意を正しく把握することが必要である。またグラフと問題文を対応させて，グラフの意味するところを把握する。これらの重要性は，この分野の例年の出題と変わることはない。

例年と比較して，易化したように思えるが，(iii）の z をどのように理解するかが，難しいかも知れない。

昨今，データの活用が産業の発展に欠かせない状況になっており，データサイエンスが重要視されている。しかし統計学がいかに重要であったかは，今更のことではない。学生にはしっかり勉強することが求められる。

$\boxed{\text{第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。}}$

第３問（選択問題）（配点 20）

＜解答＞

(1) ア 1　イ 2　ウ 6　エオ 14　カ 7　キ 8

(2) ク 6　ケ 2　コ 9　サシ 42

(3) スセ 54　ソタ 54　チツ 75　テトナ 512

＜解説＞

(1) (ⅰ)

2 回の試行では，$\boxed{A}\boxed{A}$，$\boxed{A}\boxed{B}$，$\boxed{B}\boxed{A}$，$\boxed{B}\boxed{B}$ の組み合わせがあるので，$\boxed{A}$，$\boxed{B}$ がそろっている確率は $\dfrac{ア}{イ}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ である。

(ⅱ)

問題文に示されているように，$\boxed{A}$ を 1 回取り出す場合は 3 通り。同様に $\boxed{B}$ を 1 回取り出す場合も3 通りある。よって，3 回の試行でA，B がそろっている取り出し方は $\boxed{ウ}=6$ 通りである。

よって，3 回の試行でA，B がそろっている確率は $\dfrac{6}{2^3}=\dfrac{3}{4}$ である。

(ⅲ)

4 回の試行で，A，B がそろう取り出し方は，A を1回，2 回，3 回取り出す場合の和である。

$\boxed{A}$ を 1 回取り出す場合は ${}_4C_1=4$ 通り

$\boxed{A}$ を 2 回取り出す場合は ${}_4C_2=6$ 通り

$\boxed{A}$ を 3 回取り出す場合は ${}_4C_3=4$ 通り

したがって A，B がそろっている取り出し方は $\boxed{エオ}=4+6+4=14$ 通りある。

よって，4 回の試行で A，B がそろっている確率は $\dfrac{カ}{キ}=\dfrac{14}{2^4}=\dfrac{7}{8}$ である。

(2) (ⅰ)

3 回目の試行で初めてA，B，C がそろう取り出し方は $\boxed{ク}=3!=6$ 通りある。

よって，3 回目の試行で初めてA，B，C がそろう確率は $\dfrac{ク}{3^3}=\dfrac{3!}{3^3}=\dfrac{2}{9}$ である。

(ⅱ)

4 回目の試行で初めてA，B，C がそろう取り出し方を，(1) の (ⅱ) を振り返ることにより考える。3 回の試行で A，B がそろう取り出し方は (1) の (ⅱ) から 6 通りで，4 回目で C が出ると，4 回目の試行で初めて A，B，C がそろう。

3 回の試行で B，C がそろう場合も 6 通り，C，A がそろう場合も 6 通りだから，
4 回目の試行で初めてA，B，C がそろう取り出し方は $3\times\boxed{ウ}=3\times6=18$ 通りある。

よって，4 回目の試行で初めてA，B，C がそろう確率は $\dfrac{ケ}{コ}=\dfrac{18}{3^4}=\dfrac{2}{9}$ である。

(iii)

5 回目の試行で初めてA，B，C がそろう取り出し方を，(1) の (iii) を振り返ることにより考える。

4 回の試行で A，B がそろう取り出し方は (1) の (iii) から 14 通りで，5 回目で C が出ると，5 回目の試行で初めて A，B，C がそろう。

4 回の試行で B，C がそろう場合も 14 通り，C，A がそろう場合も 14 通りだから，
5 回目の試行で初めてA，B，C がそろう取り出し方は $3 \times \boxed{\text{サシ}} = 3\times14 = 42$ 通りある。

よって，5 回目の試行で初めてA，B，C がそろう確率は $\dfrac{\text{サシ}}{3^5} = \dfrac{42}{3^5} = \dfrac{14}{81}$ である。

(3) (i)

太郎さんと花子さんは，6 回目の試行で初めてA，B，C，D がそろう確率について考えている。

太郎：例えば，5 回までに $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，
かつ 6 回目に初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される場合を考えたら計算できそうだね。
花子：それなら，初めて $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ だけがそろうのが 3 回目のとき，4 回目のとき，
5 回目のときで分けて考えてみてはどうかな。

6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めてA，B，C だけがそろう取り出し方が (2) (i) のように，
$\boxed{\text{ク}} = 6$ 通りあることに注意する。

「6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めてA，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方を考える。

このとき 4 回目，5 回目は A，B，C のいずれでも良いから，この取り出し方は
$\boxed{\text{スセ}} = 6\times3\times3 = 54$ 通りある。

同じように，「6 回の試行のうち 4 回目の試行で初めてA，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方を考える。

4 回目の試行で初めてA，B，C がそろう取り出し方は (2) (ii)のように，
$3 \times \boxed{\text{ウ}} = 3\times 6 = 18$通りある。

このとき 5 回目の試行は A，B，C のいずれでも良いから，この取り出し方は $\boxed{\text{ソタ}} = 18\times3 = 54$ 通りある。

同じように，「6 回の試行のうち 5 回目の試行で初めてA，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方を考える。

5 回目の試行で初めてA，B，C がそろう取り出し方は (1) (iii)より 42 通りある。
したがって6 回の試行のうち 5 回目の試行で初めてA，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方は 42 通りである。

以上の結果，5 回の試行でA，B，C がそろい，6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される取り出し方は $54 + 54 + 42 = 150$ 通り。$\boxed{\text{D}}$ の代わりに $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の場合も同様だから，6 回の試行で初めて A，B，C，D がそろうのは，150×4 通り。

6 回の試行で初めてA，B，C，D がそろう確率は $\dfrac{150\times4}{4^6} = \dfrac{150}{4^5} = \dfrac{75}{512} = \dfrac{\text{チツ}}{\text{テトナ}}$

コメント：

場合の数と確率の問題。問題文が長文で丁寧な表現だから，速やかに題意を的確に把握する国語力が必要だ。この問題で考察する場合の数は，「n 回目の試行で初めてカードがそろう」という条件を満たす場合の数である。すなわち ($n-1$) 回の試行では，1 枚を除いて他のカードすべてが出て，n 回目の試行で残る 1 枚のカードが出て，すべてのカードがそろう場合の数ということになる。

(1)の(iii)で別解をあげる。

A，B がそろう取り出し方は，すべてA あるいは B を取り出す場合の余事象である。
すべて A を取り出す場合は 1 通り。すべて B を取り出す場合は 1 通り。
4 回の試行でA，B の取り出し方の場合は 2^4 通りあるから，A，B がそろう取り出し方は
$2^4 - 2 = 14 = \boxed{\text{エオ}}$ 通りである。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) アイウ 104　エオカ 103　(2) キク 64　ケコサシ 1728
(3) スセ 64　ソ 6　タチツ 518　テ 3

＜解説＞

(1)

10 進数で 40 秒を T6 で (6進数で) 表示すると
$40 = 1\times6^2 + 0\times6^1 + 4\times6^0 = 104_{(6)} = \boxed{\text{アイウ}}$

2 進数で $10011_{(2))}$ 秒を T4 で (4進数で) 表示すると
$10011_{(2))} = 1\times2^4+0\times 2^3 +0\times 2^2 + 1\times2^1+ 1\times2^0 = 19 = 103_{(4))} = \boxed{\text{エオカ}}$

(2)

T4 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは 10 進数で 64 秒後である。
すなわち，$333_{(4)}+1 = 3\times4^2 + 3\times4^1 + 3\times4^0 +1 = 48+12+3+1 = 64 = \boxed{\text{キク}}$ 秒後

T6 をスタートさせた後，初めて表示が 000 に戻るのは 10 進数で 216 秒後 である。
すなわち，$555_{(6)}+1 = 5\times6^2 + 5\times6^1 + 5\times6^0 +1 = 180+30+5+1 = 216$

T4 と T6 を同時にスタートさせた後，初めて両方の表示が 000 に戻るのは，10 進数で 64 と 216 の最小公倍数秒後である。
すなわち，$64 = 2^6$ と $216 = 2^3\times3^3$ の最小公倍数は，$2^6\times3^3 = 1728 = \boxed{\text{ケコサシ}}$

(3)

(2)より，l 秒後の T4 の表示が 012 とは，
$l = (1\times4^1+2\times4^0)+4^3p = 6 + 64p \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$ということ。
したがって，l を $64 = \boxed{\text{スセ}}$ で割った余りが $6 = \boxed{\text{ソ}}$ であることと同値である。

　同様に，l 秒後の T3 の表示が 012 とは，

$l=(1\times3^1+2\times3^0)+3^3p=5+27p\quad(p=0,1,2,...)$ということ。

したがって l を 27 で割った余りが 5 であることと同値である。

　T3 と T4 を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を m 秒とする。上記のことから，p，q を正の整数として

T3 について，$m=27p+5$　①

T4 について，$m=64q+6$　②

したがって，$27p=64q+1$，$p=\dfrac{64q+1}{27}=2q+\dfrac{10q+1}{27}$　③

③ を満たす最小の q は 8，最小の p は 19，① もしくは ② から，$m=518=$ $\boxed{タチツ}$

　T4 と T6 を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を n 秒とする。上記の T3 と T4 の議論と同様に，

T4 について，$n=64p+6$　④

T6 について，$n=6^3q+(012)_6=216q+8$　⑤

④，⑤より，$64p=216q+2$，$\therefore 32p=108q+1$　⑥

⑥ の左辺は偶数，右辺は奇数なので，⑥ は成立しない。

　したがって，T4 と T6 の表示に関する記述として，正しいものは $\boxed{テ\ ③}$ である。

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ T4 とT6 を同時にスタートさせてから，m 秒後より前に初めて両方が同時に 012 と表示される。

① T4 とT6 を同時にスタートさせてから，ちょうどm 秒後に初めて両方が同時に 012 と表示される。

② T4 とT6 を同時にスタートさせてから，m 秒後より後に初めて両方が同時に 012 と表示される。

③ T4 とT6 を同時にスタートさせてから，両方が同時に 012 と表示されることはない。

コメント：

(3) において，(2) より64 秒ごとにT4 の表示は 000 に戻るから，$l=(012)_4+64p$ 秒後に $(012)_4=6$ になる。すなわち，l を 64 で割った余りが 6 ということである。

T3 と T4 を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に 012 と表示されるまでの時間を m 秒とするということだから，不定方程式 $27p-64q=1$で最小の p または q を求める必要がある。不定方程式の解法にはユークリッドの互除法などがあるが，ここでは，③ のように変形して考察すれば，視察により容易に ③ を満たす q の最小の正の整数は 8 とわかる。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) ア 0　イ 1　ウ 4　エ 3　オ 8

(2) カ 5　キク 45　ケ 0　コ 1　サ 0　シ 2　ス 2　セ 2

＜解説＞

(1)

△AQDと直線CEに着目すると，メネラウスの定理により

$$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{AC}{CQ}=\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{⓪}{CQ}=\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{\text{ア}}{CQ}=1$$

が成り立つので

$$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{AC}{CQ}=\frac{QR}{RD}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}=1,\ \therefore\frac{QR}{RD}=\frac{1}{4},\ \therefore \mathrm{QR}:\mathrm{RD}=1:4=\boxed{\text{イ}}:\boxed{\text{ウ}}$$

また，△AQDと直線BEに着目すると，メネラウスの定理により

$$\frac{DT}{TA}\cdot\frac{AP}{PQ}\cdot\frac{QB}{BD}=\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{QB}{BD}=1,\ \therefore\frac{QB}{BD}=\frac{3}{8},\ \therefore \mathrm{QB}:\mathrm{BD}=3:8=\boxed{\text{エ}}:\boxed{\text{オ}}$$

したがって，BQ：QR：RD =3：1：4 = $\boxed{\text{エ}}$：$\boxed{\text{イ}}$：$\boxed{\text{ウ}}$

$\boxed{\text{ア}}$の解答群

⓪ AC　① AP　② AQ　③ CP　④ PQ

(2)

5 点 P，Q，R，S，T が同一円周上にあるとし，AC = 8 であるとする。

(ｉ)

5 点 A，P，Q，S，T に着目すると，方べきの定理により，$\mathrm{AT}\cdot\mathrm{AS}=\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=2\times5=10$

$\mathrm{AT}:\mathrm{AS}=1:2$ より，$\mathrm{AS}=2\times\mathrm{AT}$，$\therefore \mathrm{AT}\cdot\mathrm{AS}=2\times(\mathrm{AT})^2=10$，$\therefore \mathrm{AT}=\sqrt{5}=\sqrt{\text{カ}}$

さらに，5 点 D，Q，R，S，T に着目すると，方べきの定理により，

$\mathrm{DR}\cdot\mathrm{DQ}=\mathrm{DS}\cdot\mathrm{DT}=3\sqrt{5}\times4\sqrt{5}=60$，

(1)より QR：RD = 1：4 であり，$\mathrm{DQ}=\frac{5}{4}\mathrm{DR}$ だから，$\frac{5}{4}(\mathrm{DR})^2=60$，$\therefore \mathrm{DR}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

(ⅱ)

3 点 A，B，C を通る円と点 D の位置関係を，次の構想に基づいて調べる。

構想

線分 AC と BD の交点に着目し，AQ・CQ と BQ・DQ の大小を比べる。

まず，$\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{CQ}=5\times3=15$

また，$\mathrm{DQ}=\frac{5}{4}\mathrm{DR}=5\sqrt{3}$，$\mathrm{BQ}=3\mathrm{QR}=3\sqrt{3}$ だから，$\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{DQ}=45=\boxed{\text{キク}}$

したがって，AQ･CQ $\boxed{<\ ⓪\ \text{ケ}}$ BQ･DQ　①　が成り立つ。

また，3点 A，B，C を通る円と直線 BD との交点のうち，B と異なる点を X とすると，方べきの定理より

AQ･CQ $\boxed{=\ ①\ \text{コ}}$ BQ･XQ　②　が成り立つ。

① と② の左辺は同じなので，① と② の右辺を比べることにより XQ $\boxed{<\ ⓪\ \text{サ}}$ DQ が得られる。

したがって，点 D は 3 点 ABC を通る円の $\boxed{\text{外部}\ ②\ \text{シ}}$ にある。

ケ ～ サ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ ＜　　① ＝　　② ＞

シ の解答群

⓪ 内部　　① 周上　　② 外部

(iii)

3 点 C，D，E を通る円と2 点 A，B との位置関係を調べる。

$AC = 8$ から，$CQ = 3$，$QP = 3$，$PA = 2$，方べきの定理により$CQ \cdot CP = 18 = CR \cdot CS$

$\triangle ACS$ と直線 DQ に着目すると，メネラウスの定理により$CR = RS$，したがって

$CR = RS = SE = 3$ となる。

点 C，D，E を通る円と直線 DA の交点のうち D とは異なる 点 を Y とする。

方べきの定理により，$CS \cdot SE = 18 = DS \cdot SY$

方べきの定理と（ i ）により，$DS \cdot DT = DR \cdot DQ = 60$，$DT = \frac{4}{3}DS$ だから，$\frac{4}{3}(DS)^2 = 60$

$\therefore DS = 3\sqrt{5}$，$\therefore ST = TA = \sqrt{5}$，方べきの定理により$DS \cdot SY = CS \cdot SE = 18$

一方 $DS \cdot SA = 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 30$，$\therefore DS \cdot SA > DS \cdot SY$，$\therefore SA > SY$，したがって点 A は 3 点 C，D，E を通る円の $\boxed{\text{ス 外部 ②}}$ にある。

点 C，D，E を通る円と直線 DB の交点のうち D とは異なる 点 を Z とする。

方べきの定理により $DR \cdot RZ = CR \cdot RE = 18$，$\therefore RZ = \frac{18}{DR} = \frac{18}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

しかるに $QB = 3\sqrt{3}$ だから，$RB = RQ + QB = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} > RZ$

したがって，点 B は 3 点 C，D，E を通る円の $\boxed{\text{セ 外部 ②}}$ にある。

ス，セ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 内部　　① 周上　　② 外部

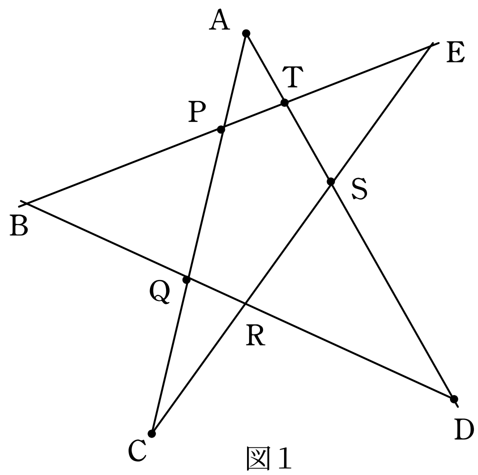

図 1

コメント：
　メネラウスの定理，方べきの定理を多用する図形の問題。問題文の論理の流れに乗りながら，要所で両定理を活用していけば，正答を得ることができるだろう。線分の記号 AC，AD，. . . などがやたらに多いので，誤認には注意する。そのためには，問題文を問題図１によって的確に理解把握することだ。幸い，問題図の長さ関係は問題文の数値を概ね正しく反映したものになっている。

＜総評＞
　共通テスト 4 年目である。長い問題文を読み込みながら，要所の問いに答えていくという共通テストの傾向に変化はない。問題そのものは難しいものではないが，解答に至る筋道を理解してゆかなければならないので，問題文の読み込みを揺るがせにできない。R3 年度からの平均点の推移が 57.7, 38.0，55.7 点 で，今年度が 51.4 点ということである。一昨年のような極端な受験者の適応不足はなく，適切な難易の程度であったといえよう。
　大問１⑵の「図形と計量」分野では太陽の高度から電柱の影の長さを三角比を用いて考察する問題，大問２⑵「データの分析」分野ではマラソンの記録のデータから意味を考察する問題で，それぞれ数学の実際的な有用性に関するものである。受験生は日常的な現象を数理的に思考する能力を養うことが重要であろう。

240220