令和６年度（2024年度）共通テスト　数学Ⅱ･数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ･数学Ｂ]　（いずれか選択　100点，60分）

数学Ⅱ･数学Ｂ　（注）この科目には，選択問題があります。（27ページ参照）

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

[１](1) ア３　イウ10　エ１　オ０　カ０　キ５　ク２　ケ２

[２](1) コサ−2　シ３　ス２　セ１　ソタ12　(2) チ３　ツ１　テ１　ト１　ナ３　(3) ニヌ −6　ネノ 14

＜解説＞

[１](1)

$k>0$，$k\fallingdotseq 1$とする。関数$y=\log_k x$と$y=\log_2 kx$のグラフについて考えよう。

(ｉ) $y=\log_3 x$のグラフは，$x=27=3^3$のとき$y=\log_3 x=\log_3 3^3=3$だから，

点$(27, \boxed{ア})=(27, 3)$を通る。また，$y=\log_2\dfrac{x}{5}$のグラフは，$y=\log_2\dfrac{x}{5}=1$のとき

$x=10$だから，点$(10, 1)=(\boxed{イウ}, 1)$を通る。

(ii) $y=\log_k x \Leftrightarrow x=k^y$，$k$の値によらず$y=0$のとき$x=1$だから，$y=\log_k x$のグラフは

定点$(1, 0)=(\boxed{エ}, \boxed{オ})$を通る。

(iii) $k=2$，3，4のとき

$y=\log_k x$ のグラフは

定点$(1, 0)$を通る。また，$\log_2 x=\dfrac{\log x}{\log 2}>\dfrac{\log x}{2\log 2}=\dfrac{\log x}{\log 2^2}=\dfrac{\log x}{\log 4}=\log_4 x$

したがって，その概形は$\boxed{カ\ ⓪}$

$y=\log_2 kx$ のグラフは

関数 $y=\log_2 kx=\log_2 k+\log_2 x$ は k の増加とともに増加する。

したがって，その概形は$\boxed{キ\ ⑤}$

(2)

$x>0$，$x\fallingdotseq 1$，$y>0$ とする。$\log_x y$ について考えよう。

(ｉ) 座標平面において，方程式 $\log_x y=2$ の表す図形を図示すると，

$\log_x y=2 \Leftrightarrow \dfrac{\log y}{\log x}=2 \Leftrightarrow \log y=2\log x \Leftrightarrow \log y=\log x^2 \Leftrightarrow y=x^2$ だから

$\boxed{ク\ ②}$のグラフの $x>0$，$x\fallingdotseq 1$，$y>0$ の部分となる。

(ii) 座標平面において，不等式 $0<\log_x y<1$ の表す領域を図示すると，

$\boxed{ケ\ ②}$の斜線部分となる。ただし，境界（境界線）は含まない。なぜなら，

$\log_x y=\dfrac{\log y}{\log x}$ だから，$0<\log_x y<1 \Leftrightarrow 0<\dfrac{\log y}{\log x}<1$

$\log x>0$ すなわち $x>1$ のとき，$\log y>0$，$\log x>\log y$，∴　$y>1$，$x>y$

$\log x<0$ すなわち $x<1$ のとき，$\log y<0$，$\log x<\log y$，∴　$0<y<1$，$y>x$

[2]

$S(x)$を x の 2 次式とする。x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$，余りを $U(x)$ とする。ただし，$S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(1)

$P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 5$，$S(x) = x^2 + 4x + 7$ の場合を考える。

方程式 $S(x) = x^2 + 4x + 7 = 0$ の解は $x = -2 \pm \sqrt{3}i = \boxed{コサ} \pm \boxed{\sqrt{シ}}\, i$

$P(x) = S(x)T(x) + U(x) = (x^2+4x+7)(2x-1) + 12$

したがって，$T(x) = 2x-1 = \boxed{ス}\,x - \boxed{セ}$，$U(x) = 12 = \boxed{ソタ}$

(2)

方程式 $S(x) = 0$ は異なる二つの解 α，β をもつとする。このとき

$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になる

ことと同値な条件を考える。

(i) 余りが定数になるときを考えてみよう。

仮定から，定数 k を用いて $U(x) = k$ とおける。このとき，$\boxed{チ ③}$ 。

したがって，余りが定数になるとき，

$P(\alpha) = S(\alpha)T(\alpha) + k = 0 \times T(\alpha) + k = k$，$P(\beta) = S(\beta)T(\beta) + k = 0 \times T(\beta) + k = k$

だから，$\boxed{ツ ①}$ が成り立つ。

$\boxed{チ}$ についての選択肢⓪～③を評価する。

⓪ $P(\alpha) = P(\beta) = k \rightarrow S(\alpha)T(\alpha) = S(\beta)T(\beta) = 0$，$\therefore S(\alpha) = S(\beta) = 0$ とは限らない。誤り

① 上記と同様に誤り。

② $S(\alpha) = S(\beta) = 0 \rightarrow P(x) = S(x)T(x) + k$ とはいえない。誤り

③ 正しい

$\boxed{ツ}$ の解答群

⓪ $T(\alpha) = T(\beta)$　　① $P(\alpha) = P(\beta)$

② $T(\alpha) \fallingdotseq T(\beta)$　　③ $P(\alpha) \fallingdotseq P(\beta)$

(ii) 逆に $\boxed{ツ ①\ P(\alpha) = P(\beta)}$ が成り立つとき，余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$ が 2 次式であるから，m，n を定数として $U(x) = mx + n$ とおける。$P(x)$ を$S(x)$，$T(x)$，m，nを用いて表すと，$P(x) = S(x)T(x) + U(x) = S(x)T(x) + mx + n = \boxed{テ ①}$

この等式の x に α，β をそれぞれ代入すると，

$P(\alpha) = S(\alpha)T(\alpha) + m\alpha + n = m\alpha + n$，$P(\beta) = S(\beta)T(\beta) + m\beta + n = m\beta + n$

すなわち $\boxed{ト ①}$ となるので，

したがって，$P(\alpha) = P(\beta)$であれば，$\boxed{ツ ①\ P(\alpha) = P(\beta)}$ と$\alpha \fallingdotseq \beta$ より $\boxed{ナ ③\ m = 0}$ となる。

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ $(mx+n)S(x)T(x)$　　① $S(x)T(x) + mx + n$

② $(mx+n)S(x) + T(x)$　　③ $(mx+n)T(x) + S(x)$

$\boxed{ト}$ の解答群

⓪ $P(\alpha) = T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = T(\beta)$

① $P(\alpha) = m\alpha + n$ かつ $P(\beta) = m\beta + n$

② $P(\alpha) = (m\alpha + n)\, T(\alpha)$ かつ $P(\beta) = (m\beta + n)\, T(\beta)$

③ $P(\alpha) = P(\beta) = 0$

④ $P(\alpha) \fallingdotseq 0$ かつ $P(\beta) \fallingdotseq 0$

$\boxed{ナ}$ の解答群

⓪ $m \fallingdotseq 0$	① $m \fallingdotseq 0$ かつ $n = 0$
② $m \fallingdotseq 0$ かつ $n \fallingdotseq 0$	③ $m = 0$
④ $m = n = 0$	⑤ $m = 0$ かつ $n \fallingdotseq 0$
⑥ $n = 0$	⑦ $n \fallingdotseq 0$

（ⅰ），（ⅱ）の考察から，方程式 $S(x) = 0$ が異なる二つの解 α，β をもつとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $\boxed{ツ\ ①\ P(\alpha) = P(\beta)}$ であることは同値である。

(3)

p を定数とし，$P(x) = x^{10} - 2x^9 - px^2 - 5x$，$S(x) = x^2 - x - 2$ の場合を考える。

$S(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$ のとき，$x = 2$ または -1

$P(x)$ を $S(x)$で割った余り k を定数として，$P(x) = S(x)\,T(x) + k$ とおく。

$P(2) = 2^{10} - 2\cdot 2^9 - p\cdot 2^2 - 5\cdot 2 = -4p - 10 = S(2)\,T(2) + k = k$　　①

$P(-1) = (-1)^{10} - 2\cdot(-1)^9 - p\cdot(-1)^2 - 5\cdot(-1) = 8 - p = S(-1)\,T(-1) + k = k$　　②

①，②より $p = \boxed{ニヌ\ -6}$ となり，その余りは $k = \boxed{ネノ\ 14}$ となる。

コメント：

整式の処理と表現に関わる問題。難しいものではない。多項式の因数分解，２次方程式の解，同値関係など，基礎的な知識と技法が問われる。長文の論理を速やかにていねいに読み込むこと，長い語句の選択肢の場合，どこに差異があるのか，注意深く読み込むことが必要だ。

第２問（必答問題）（配点 30）

＜解答＞

(1) ア３　イ２　ウ９　エ６　オ９　カ２　キ６　ク１　ケ５　コ２　サ２　シ２　ス３

(2) セ０　ソ５　タ１　チ１　ツ２

(3) テ３　ト４　ナ２　ニ０　ヌ４　ネ２

＜解説＞

m を $m > 1$を満たす定数とし，$f(x) = 3(x-1)(x-m)$とする。また，$S(x) = \int_0^x f(t)dt$ とする。

関数 $y = f(x)$と $y = S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

(1)

$m = 2$のとき，すなわち，$f(x) = 3(x-1)(x-2)$のときを考える。

(ⅰ)

$f'(x)=3(2x-3)=0$となる x の値は, $x=\dfrac{3}{2}=\boxed{\dfrac{ア}{イ}}$

(ⅱ)

$S(x)=\displaystyle\int_0^x(3t^2-ウt+エ)dt=\int_0^x(3t^2-9t+6)dt=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^x$

$=x^3-\dfrac{9}{2}x^2+6x=x^3-\boxed{\dfrac{オ}{カ}}x^2+\boxed{キ}x$

$S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-2)$だから,

$x=\boxed{ク}=1$ のとき, $S(x)$ は極大値 $S(1)=\boxed{\dfrac{ケ}{コ}}=\dfrac{5}{2}$ をとり

$x=\boxed{サ}=2$ のとき, $S(x)$は極小値 $S(2)=\boxed{シ}=2$ をとることがわかる。

(ⅲ)

$f(3)=S'(3)$ だから, $f(3)$と一致するものとして, 次の⓪～④のうち,
正しいものは $\boxed{ス\ ③}$ である。

$\boxed{ス}$ の解答群

⓪ $S(3)$

① 2点 $(2, S(2))$, $(4, S(4))$を通る直線の傾き

② 2点 $(0, 0)$, $(3, S(3))$を通る直線の傾き

③ 関数 $y=S(x)$のグラフ上の点 $(3, S(3))$ における接線の傾き

④ 関数 $y=f(x)$のグラフ上の点 $(3, f(3))$ における接線の傾き

(2)

$0\leqq x\leqq 1$の範囲で, 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1,
$1\leqq x\leqq m$ の範囲で, 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。
$y=f(x)$ のグラフは図1のようだから,

$S_1=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\boxed{セ\ ⓪}$, $S_2=\displaystyle\int_1^5\{-f(x)\}dx=\boxed{ソ\ ⑤}$

$S_1=S_2$ となるのは, $S_1-S_2=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\int_1^m\{-f(x)\}dx=\int_0^m f(x)dx=\boxed{タ\ ①}=0$ のとき

$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ だから, $S_1-S_2=\displaystyle\int_0^m f(x)dx=\int_0^m f(t)dt=S(m)$, $S_1=S_2$のとき $S(m)=0$

$S(x)=\displaystyle\int_0^x 3(t-1)(t-m)dt=\left[t^3-\frac{3(1+m)}{2}t^2+3mt\right]_0^x=x\left\{x^2-\frac{3(1+m)}{2}x+3m\right\}$

$S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-m)$, したがって $S(x)$ は図2のように変化する。原点を通り, $x=1$で極大値, $x=m$ で極小値をとる。$y=S(x)$のグラフは図3のようである。

$S_1=S_2$ のとき, $S(m)=0$ なので, 関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{チ\ ①}$ である。

$S_1>S_2$ のとき, $S(m)>0$ なので, 関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{ツ\ ②}$ である。

関数 $y=S(x)$ は$x\to-\infty$で$y\to-\infty$, $x\to\infty$で$y\to\infty$だから, 選択肢のうち③, ④, ⑤は不適切。

$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\int_0^1 f(x)dx$　① $\int_0^m f(x)dx$　② $\int_1^m f(x)dx$

③ $\int_0^1 \{-f(x)\}dx$　④ $\int_0^m \{-f(x)\}dx$　⑤ $\int_1^m \{-f(x)\}dx$

$\boxed{タ}$ の解答群

⓪ $\int_0^1 f(x)dx$　① $\int_0^m f(x)dx$　② $\int_1^m f(x)dx$　③ $\int_0^1 f(x)dx-\int_0^m f(x)dx$

④ $\int_0^1 f(x)dx-\int_1^m f(x)dx$　⑤ $\int_0^1 f(x)dx+\int_0^m f(x)dx$　⑥ $\int_0^m f(x)dx+\int_1^m f(x)dx$

$\boxed{チ}$，$\boxed{ツ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。

（⓪～⑤のグラフ概形の記載は略）

(3)

関数$y=f(x)$のグラフの特徴から関数$y=S(x)$のグラフの特徴を考える。図１を参照する。

関数 $y=f(x)$のグラフは直線 $x=\dfrac{m+1}{2}=\boxed{テ\ ③}$ に関して対称であるから， すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^{1} f(x)dx=\int_m^{m+p} f(x)dx=\boxed{\int_m^{ト④} f(x)dx}\qquad ①$$

が成り立ち，$M=\dfrac{m+1}{2}=\boxed{テ\ ③}$ とおくと $0<q\leqq M-1=\dfrac{m+1}{2}-1=\dfrac{m-1}{2}$ であるすべての実数 q に対して，$-f(x)$ も直線 $x=\dfrac{m+1}{2}=\boxed{テ\ ③}$ に関して対称であるから

$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}dx=\int_M^{M+q}\{-f(x)\}dx=\boxed{\int_M^{ナ②}\{-f(x)\}dx}\qquad ②$$

が成り立つことがわかる。すべての実数 α，β に対して

$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=S(\beta)-S(\alpha)$ が成り立つことに注意すれば，

①より，$\int_{1-p}^{1} f(x)dx=S(1)-S(1-p)=\int_m^{m+p} f(x)dx=S(m+p)-S(m)$

したがって，$S(1-p)+S(m+p)=S(1-p)+S(\boxed{ト\ ④})=S(1)+S(m)=\boxed{ニ\ ⓪}$

②より，$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}dx=S(M-q)-S(M)=\int_M^{M+q}\{-f(x)\}dx=S(M)-S(M+q)$

したがって，$2S(M)=S(M+q)+S(M-q)=\boxed{ヌ\ ④}$

以上から，すべての正の実数 p に対して，2点$(1-p, S(1-p))$，$(ト, S(ト))=(m+p, S(m+p))$を結ぶ線分の中点について，

中点の x 座標は $\dfrac{(1-p)+(m+p)}{2}=\dfrac{1+m}{2}=M$

中点の y 座標は $\dfrac{S(1-p)+S(m+p)}{2}=\dfrac{S(1)+S(m)}{2}=\dfrac{S(M+q)+S(M-q)}{2}=S(M)$

ただし，$1=M+q$，$m=M-q$ より，$q=\dfrac{1-m}{2}$

したがって，中点の記述として最も適当なものは ネ ② である。

テ の解答群

⓪ m　① $\frac{m}{2}$　② $m+1$　③ $\frac{m+1}{2}$

ト の解答群

⓪ $1-p$　① p　② $1+p$　③ $m-p$　④ $m+p$

ナ の解答群

⓪ $M-q$　① M　② $M+q$　③ $M+m-q$　④ $M+m$　⑤ $M+m+q$

ニ の解答群

⓪ $S(1)+S(m)$　① $S(1)+S(p)$　② $S(1)-S(m)$

③ $S(1)-S(p)$　④ $S(p)-S(m)$　⑤ $S(m)-S(p)$

ヌ の解答群

⓪ $S(M-q)+S(M+m-q)$　① $S(M-q)+S(M+m)$　② $S(M-q)+S(M)$

③ $2S(M-q)$　④ $S(M+q)+S(M-q)$　⑤ $S(M+m+q)+S(M-q)$

ネ の解答群

⓪ x 座標は p の値によらず一つに定まり，y 座標は p の値により変わる。

① x 座標は p の値により変わり，y 座標は p の値によらず一つに定まる。

② 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=S(x)$のグラフ上にある。

③ 中点は p の値によらず一つに定まり，関数 $y=f(x)$のグラフ上にある。

④ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=S(x)$のグラフ上にある。

⑤ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=f(x)$のグラフ上にある。

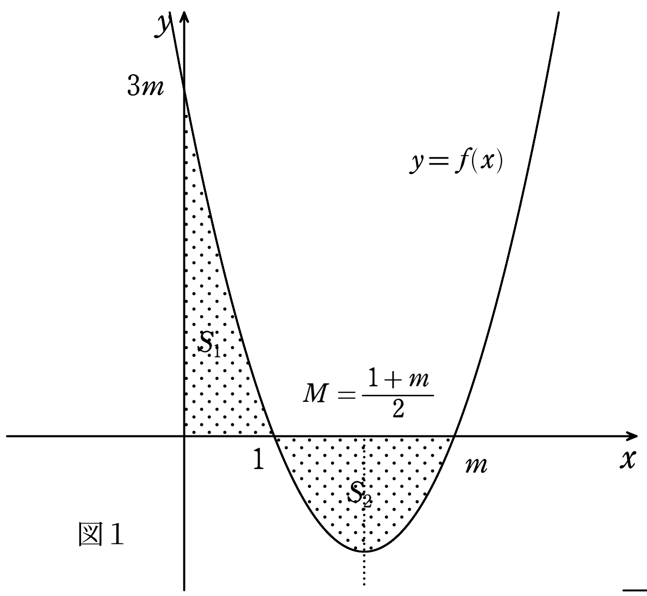

図1

x	0		1		m	
$S'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	0	↗		↘		↗

図2

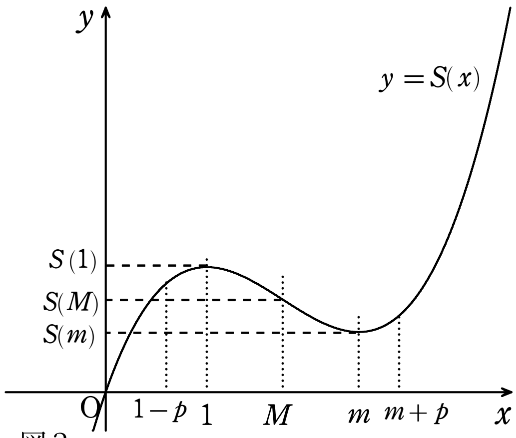

図３

コメント：

導関数が一次関数の積として与えられる原始関数と導関数の特徴に関する問題。(2)では，$S_1-S_2=S(m)$（極小値）に等しいことを着想することが重要。

$S_1=S_2 \to S(m)=0$，$S_1>S_2 \to S(m)>0$，によってS_1，S_2の大小関係変化による$y=S(x)$のグラフの変化を理解することができる。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) ア 0　イ 3　ウ 1　エ 2　オ 0

(2) カ 3　キク 33　ケコ 21　サ 8

＜解説＞

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 47 ページの正規分布表を用いてもよい。

(1)

表１より，X の平均（期待値）$m=0\times(1-p)+1\times p=p=\boxed{ア\ ⓪}$

母標準偏差を σ とすると，$n=300$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布

$N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)=N(m, \boxed{イ\ ③})$ に従う。

一般に，母標準偏差 σ がわからないとき，標本の大きさ n が大きければ，σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いてもよいことが知られている。S は

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\left\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\dots+(X_n-\overline{X})^2\right\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}(X_1{}^2+X_2{}^2+\dots+X_n{}^2)-\frac{2}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n)\overline{X}+(\overline{X})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}(X_1{}^2+X_2{}^2+\dots+X_n{}^2)-2\overline{X}\cdot\overline{X}+(\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{1}{n}(X_1{}^2+X_2{}^2+\dots+X_n{}^2)-(\overline{X})^2}$$

$= \sqrt{\dfrac{1}{n}(X_1{}^2 + X_2{}^2 + \ldots + X_n{}^2) - ウ⓪}$ 　で計算できる。

ここでは，$X_1{}^2 = X_1$，$X_2{}^2 = X_2$，…，$X_n{}^2 = X_n$ であることに着目し，整理すると

$S = \sqrt{\dfrac{1}{n}(X_1{}^2 + X_2{}^2 + \ldots + X_n{}^2) - (\overline{X}\,)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - (\overline{X}\,)^2}$

$= \sqrt{\overline{X} - (\overline{X})^2} = \sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})} = \sqrt{エ②}$ と表されることがわかる。

表2から$\overline{X} = \dfrac{75}{300} = \dfrac{1}{4}$，したがって$S = \sqrt{\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いて$\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \dfrac{\overline{X} - m}{S/\sqrt{n}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとして良い。$|Z| \leqq z_0$ である確率 $P(|Z| \leqq z_0) = 2u(z_0)$，ただし $u(z_0)$ は標準正規分布 $p(z)$ により，$u(z_0) = \int_0^{z_0} p(z)dz$

$2u(z_0)=0.95$とすれば，$u(z_0) = 0.475$，与えられた正規分布表から $z_0 = 1.96$

したがって，$\left| Z = \dfrac{\overline{X} - m}{S/\sqrt{n}} \right| \leqq 1.96$であれば，$P(|Z| \leqq z_0) = 0.95$ となって 95% の Z が $|Z| \leqq z_0 = 1.96$ を満たす。

すなわち$\left| \dfrac{\overline{X} - m}{S/\sqrt{n}} \right| \leqq 1.96$，$\therefore\ -1.96 \times \dfrac{S}{\sqrt{n}} \leqq \overline{X} - m \leqq 1.96 \times \dfrac{S}{\sqrt{n}}$，

$\therefore\ \overline{X} - 1.96 \times \dfrac{S}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \times \dfrac{S}{\sqrt{n}}$

$\overline{X} = \dfrac{1}{4}$，$S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$n = 300$ として，$\dfrac{1}{4} - 1.96 \times \dfrac{1}{40} = 0.201 \leqq m \leqq \dfrac{1}{4} + 1.96 \times \dfrac{1}{40} = 0.299$

したがって，母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は $\boxed{オ ⓪}$ となる。

$\boxed{ア}$ の解答群

⓪ p　　① p^2　　② $1 - p$　　③ $(1 - p)^2$

$\boxed{イ}$ の解答群

⓪ σ　　① σ^2　　② $\dfrac{\sigma}{n}$　　③ $\dfrac{\sigma^2}{n}$　　④ $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\overline{X}$　　① $(\overline{X})^2$　　② $\overline{X}(1 - \overline{X})$　　③ $1 - \overline{X}$

$\boxed{オ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $0.201 \leqq m \leqq 0.299$　　① $0.209 \leqq m \leqq 0.291$　　② $0.225 \leqq m \leqq 0.250$

③ $0.225 \leqq m \leqq 0.275$　　④ $0.247 \leqq m \leqq 0.253$　　⑤ $0.250 \leqq m \leqq 0.275$

(2)

ある期間において，「ちょうど 3 週続けて日曜日の天気が晴れになること」がどのくらいの頻度で起こり得るのかを考察しよう。以下では，連続する k 週の日曜日の天気について，(1)の太郎さん

が考えた確率変数のうち X_1，X_2，$\cdots$，X_k を用いて調べる。ただし，k は 3 以上 300 以下の自然数とする。

X_1，X_2，$\cdots$，X_k の値を順に並べたときの 0 と 1 からなる列において，「ちょうど三つ続けて 1 が現われる部分」を A とし，A の個数を確率変数 U_k で表す。例えば，$k=20$とし，X_1，X_2，$\cdots$，X_{20} の値を順に並べたとき

$$1, 1, 1, 1, 0, \underbrace{1, 1, 1}_{\text{A}}, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \underbrace{1, 1, 1}_{\text{A}}$$

であったとする。この例では，下線部分は A を示しており，1 が四つ以上続く部分は A とみなさないので，$U_{20}=2$ となる。

$k=4$ のとき，X_1，X_2，X_3，X_4 のとり得る値と，それに対応した U_4 の値を書き出すと，表３のようになる。

表３

X_1	X_2	X_3	X_4	U_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0

U_k の期待値を求める。(1)における p の値を $p=\dfrac{1}{4}$ とする。

$k=4$ のとき，表３から確率変数 U_4 は 0 または 1 をとる。

$U_4=1$ となるのは 1 1 1 0，0 1 1 1の場合で，その確率は

それぞれ$p^3(1-p)=\dfrac{3}{4^4}$，

したがって，$E(U_4)=\dfrac{3}{4^4}\times 2=\dfrac{3}{128}=\boxed{\dfrac{\text{カ}}{128}}$

$k=5$ のとき，1 がちょうど三つ続けて現れる部分は一つしかないから，確率変数 U_5 は 0 または 1 をとる。

$U_5=1$ となるのは，

1 1 1 0 0，0 1 1 1 0，0 0 1 1 1：確率 $p^3(1-p)^2=\dfrac{3^2}{4^5}$

1 1 1 0 1，1 0 1 1 1：確率 $p^4(1-p)=\dfrac{3}{4^5}$

したがって，$E(U_5)=\dfrac{3^2}{4^5}\times 3+\dfrac{3}{4^5}\times 2=\dfrac{33}{1024}=\boxed{\dfrac{\text{キク}}{1024}}$

$(4, E(U_4))$，$(5, E(U_5))$，$\cdots$，$(300, E(U_{300}))$ は一つの直線上にあるとすると，

$$\frac{E(U_{300})-E(U_4)}{300-4}=\frac{E(U_{300})-E(U_5)}{300-5}，\ \therefore E(U_{300})=\frac{21}{8}=\boxed{\dfrac{\text{ケコ}}{\text{サ}}}$$

コメント：

数学Ｂの「確率分布と統計的な推測」分野の問題。信頼度区間の推定の問題は基本的な問題で，毎年のように出題されるから，教科書を熟読して，例題を解いて理解を深めよう。

(2)は工夫された面白い問題である。$U_5=1$となる数列の場合の数を正しく把握しよう。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) アイ 24　ウエ 38　オカ 14

(2) キ 3　ク 1　ケ 2　コ 3

(3) サ 1　シス −3　セソ − 3　タ 1　チツ 40　テ 3　ト 4

＜解説＞

(1)

数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} - a_n = 14$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとする。$\therefore a_{n+1} = 14 + a_n$

$a_1 = 10$ のとき，$a_2 = 14 + a_1 = 24 = \boxed{\text{アイ}}$，$a_3 = 14 + a_2 = 38 = \boxed{\text{ウエ}}$

数列 $\{a_n\}$ は公差 14 の等差数列だから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，初項 a_1 を用いて

$a_n = a_1 + 14(n-1) = a_1 + \boxed{\text{オカ}}(n-1)$

(2)

数列 $\{b_n\}$ が

$2b_{n+1} - b_n + 3 = 0$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとする。

$b_{n+1} + 3 = \dfrac{1}{2}(b_n + 3)$ と変形できるから，

$$b_n + 3 = \frac{1}{2}(b_{n-1} + 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2(b_{n-2} + 3) = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b_1 + 3)$$

$$\therefore b_n = (b_1 + 3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 3 = (b_1 + \boxed{\text{キ}})\boxed{\left(\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}\right)^{n-1}} - \boxed{\text{コ}}$$

(3)

太郎さんは

$(c_n + 3)(2c_{n+1} - c_n + 3) = 0$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$　①

を満たす数列 $\{c_n\}$ について調べることにした。

① より，$c_n = -3$　②，または $2c_{n+1} - c_n + 3 = 0$　③

(ｉ)

- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_1 = 5$ のとき，③ より $c_2 = 1 = \boxed{\text{サ}}$
- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3 = -3$ のとき，②，③より，$c_2 = -3 = \boxed{\text{シス}}$，$c_1 = -3 = \boxed{\text{セソ}}$

(ii)

太郎さんは，数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3 = -3$ となる場合について考えている。

$c_3 = -3$ のとき，c_4 がどのような値でも，$(c_3 + 3)(2c_4 - c_3 + 3) = 0$

- 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3 = -3$，$c_4 = 5$ のとき，

$n = 2$ のとき，$(c_2 + 3)(2c_3 - c_2 + 3) = (c_2 + 3)(-6 - c_2 + 3) = 0$，$\therefore c_2 = -3$

$n = 1$ のとき，$(c_1 + 3)(2c_2 - c_1 + 3) = (c_1 + 3)(-6 - c_1 + 3) = 0$，$\therefore c_1 = -3$

$n=3$ のとき，① は成立する。$n=4$ のとき ② が成立しないので，③ が成立する必要あり。

$2c_5 - c_4 + 3 = 2c_5 - 5 + 3 = 0$，∴ $c_5 = 1$

以上により，$c_1 = -3 = \boxed{セソ}$，$c_2 = -3 = \boxed{シス}$，$c_3 = -3$，$c_4 = 5$，$c_5 = 1 = \boxed{タ}$

・数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_3 = -3$，$c_4 = 83$ のとき，

$c_1 = -3 = \boxed{セソ}$，$c_2 = -3 = \boxed{シス}$，$c_3 = -3$，$c_4 = 83$，③ より $c_5 = 40 = \boxed{チツ}$

(iii)

太郎さんは (i) と (ii) から，$c_n = -3$ となることがあるかどうかに着目し，次の命題 A が成り立つのではないかと考えた。

$\boxed{命題\ A}$ 数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_1 \fallingdotseq -3$ であるとする。このとき，すべての自然数 n について $c_n \fallingdotseq -3$ である。

命題 A が真であることを証明するには，命題 A の仮定を満たす数列 $\{c_n\}$ について，$\boxed{テ}$ を示せばよい。

①より，$c_1 \fallingdotseq -3$ であれば，$2c_2 - c_1 + 3 = 0$，∴ $c_2 = \dfrac{c_1 - 3}{2} \fallingdotseq -3$

同様に，$c_2 \fallingdotseq -3$ であれば，$2c_3 - c_2 + 3 = 0$，∴ $c_3 = \dfrac{c_2 - 3}{2} \fallingdotseq -3$

これらのことから，$n = k$ のとき $c_n \fallingdotseq -3$ が成り立つと仮定すると，$n = k+1$ のときも $c_n \fallingdotseq -3$ が成り立つ，ものと推定される。

これは，命題 A を数学的帰納法によって証明することになる。

すなわち ① より，$c_k \fallingdotseq -3$ であれば，$2c_{k+1} - c_k + 3 = 0$，∴ $c_{k+1} = \dfrac{c_k - 3}{2} \fallingdotseq -3$

以上によって，命題 A が真であることを示すには，$\boxed{テ\ ③}$ を示せばよい。

$\boxed{テ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $c_2 \fallingdotseq -3$ かつ $c_3 \fallingdotseq -3$ であること

① $c_{100} \fallingdotseq -3$ かつ $c_{200} \fallingdotseq -3$ であること

② $c_{100} \fallingdotseq -3$ ならば $c_{101} \fallingdotseq -3$ であること

③ $n = k$ のとき $c_n \fallingdotseq -3$ が成り立つと仮定すると，$n = k+1$ のときも $c_n \fallingdotseq -3$ が成り立つこと

④ $n = k$ のとき $c_n = -3$ が成り立つと仮定すると，$n = k+1$ のときも $c_n = -3$ が成り立つこと

(iv)

次の (I)，(II)，(III) は，数列 $\{c_n\}$ に関する命題である。

(I) $c_1 = 3$ かつ $c_{100} = -3$ であり，かつ ① を満たす数列がある。：命題Aに反するから偽

(II) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = -3$ であり，かつ ① を満たす数列がある。

：すべての n について $c_n = -3$ とすれば，① を満たすので，真

(III) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = 3$ であり，かつ ① を満たす数列がある。

：$n=1$ のとき ① を満たす。$2 \leqq n \leqq 99$のとき，$c_n=-3$ であれば ① を満たす。

$n=100$ のとき，$c_{100}=3$，$c_{101}=0$ とすれば，① を満たす。

$n>101$ のとき，$c_n=-3$ とすれば，① を満たす。したがって真

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ト ④}}$ である。

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(Ⅱ)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(Ⅲ)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

コメント：

(1)，(2)は紛れのない問題であろう。スムーズに解答したい。(3) の (iii)，(iv) は錯綜しかねない問題である。(iii)では，数列 $\{c_n\}$ が ① を満たし，$c_1 \fallingdotseq -3$（すなわち ② を満たさない）のとき，③ を満たす。③ より，命題 A を証明するには数学的帰納法が適当であることに気づきたい。

(iv) では (Ⅲ) の真偽の判断が難しい。$c_1=-3$ かつ $c_{100}=3$ のとき，① を満たす c_n を定めることができるかどうかを考えるとよい。c_{100} とc_{101} 以外の c_n を-3 にすれば ① を満たす。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第５問（選択問題）（配点　20）

<解答>

(1) ア 1　イウ -1　エ 1　オ 0

(2) カ 2　キ 3　クケ 12　コサ 54　シ 1　ス 2

(3) セソ -3　タチ 12　ツテ -6　トナ -7　ニヌ 12　ネノ -2

<解説>

点 O を原点とする座標空間に 4 点 A$(2, 7, -1)$，B$(3, 6, 0)$，C$(-8, 10, -3)$，D$(-9, 8, -4)$ がある。A，B を通る直線を l_1 とし，C，D を通る直線を l_2 とする。

(1)

$\overrightarrow{AB}=(3-2, 6-7, 0-(-1))=(1, -1, 1)=($ア, イウ, エ$)$

であり，$\overrightarrow{CD}=(-1, -2, -1)$だから，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\times(-1)+(-1)\times(-2)+1\times(-1)=0=\boxed{\text{オ}}$ である。

(2)

花子さんと太郎さんは，点 P が l_1 上を動くとき，$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となる P の位置について考えている。P が l_1 上にあるので，$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 s があり，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}=\boxed{\text{カ ②}}$ が成り立つ。

$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となる s の値を求めれば P の位置が求まる。このことについて，花子さんと太郎さんが話をしている。

花子：$|\overrightarrow{OP}|^2$ が最小となる s の値を求めればよいね。

太郎：$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるときの直線 OP と l_1 の関係に着目してもよさそうだよ。

花子さんの考え方で考察する。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ だから，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$

$|\overrightarrow{OP}|^2=\{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}\}^2=(1-s)^2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+2s(1-s)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+s^2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=54(1-s)^2+96s(1-s)+45s^2=3s^2-12s+54=\boxed{キ}s^2-\boxed{クケ}s+\boxed{コサ}$

$=3(s-2)^2+42$，$\therefore s=2$ のとき $|\overrightarrow{OP}|^2$ が最小になる。

太郎さんの考え方で考察する。

$\overrightarrow{OP}$ が最小になるとき，直線 OP と l_1 の関係に着目すると，直線 OP が l_1 への垂線になるから，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，すなわち $\boxed{シ\ ①}$ が成り立つことがわかる。

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}=(2+s, 7-s, s-1)$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=(2+s, 7-s, s-1)(1, -1, 1)=2+s-7+s+s-1=3s-6=0$，$\therefore s=2$

花子さんの考え方でも，太郎さんの考え方でも，$s=2=\boxed{ス}$ のとき $|\overrightarrow{OP}|$ が最小となることがわかる。

$\boxed{カ}$ の解答群

⓪ $s\overrightarrow{AB}$　　① $s\overrightarrow{OB}$

② $\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$　　③ $(1-2s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$

④ $(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$

$\boxed{シ}$ の解答群

⓪ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}>0$　　① $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

② $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}<0$　　③ $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{AB}|$

④ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AP}$　　⑤ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

⑥ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AB}|$

(3)

点 P が l_1 上を動き，点 Q が l_2 上を動くとする。このとき，線分 PQ の長さが最小になる P，Q の座標を求める。

(2) より，$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}=(2+s, 7-s, s-1)$

$\overrightarrow{CQ}=t\overrightarrow{CD}$ なる実数 t があるから，$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}=(-8-t, 10-2t, -3-t)$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(-10-s-t, 3+s-2t, -2-s-t)$

(1)より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ だから，l_1 と l_2 は直交する。 すると図 1 に示すように，l_2 に垂直で l_1 を含

む平面 H が存在する。l_2 とH の交点を Q とし，Q からl_1 へ引いた垂線とl_1 の交点を P とすれば，この PQ が l_1 上の点と l_2 上の点を結ぶ最小の線分である。

したがって，$\overrightarrow{PQ}$ が直線 l_1，l_2 と直交するから，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=(-10-s-t, 3+s-2t, -2-s-t)(1, -1, 1)$

$\quad =-10-s-t-3-s+2t-2-s-t=-15-3s=0,\ \therefore s=-5$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=(-10-s-t, 3+s-2t, -2-s-t)(-1, -2, -1)=6+6t=0,\ \therefore t=-1$

したがって，P の座標は$(-3, 12, -6)=(\boxed{\text{セソ}}, \boxed{\text{タチ}}, \boxed{\text{ツテ}})$

Q の座標は$(-7, 12, -2)=(\boxed{\text{トナ}}, \boxed{\text{ニヌ}}, \boxed{\text{ネノ}})$

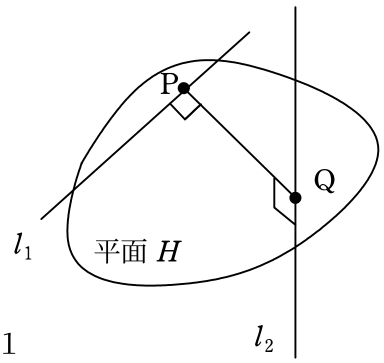

図１

平面 H は点 Q で l_2 と垂直に交わり，直線 l_1 を含む平面

コメント：

空間座標の関係について空間ベクトルによって扱う問題。直線上の点の座標をベクトルの合成によって表現する方法，ベクトルの内積の計算，直交するベクトルの条件などを理解しておくこと。

<総評>

センター試験から大学入学共通テストへ変更となった４年目である。知識，技能の修得に加え，思考力，判断力，表現力を高める教育に対応する，共通テストの問題表現が定着してきたようだ。

長い問題文を速やかに読み込みながら，解答方針を考察し，数学的な結論に至るまでの思考過程に沿って，要所の設問に答えていく。思考過程を追うことに負担はあるが，それだけに数学的な問題としては難解なものではない。

選択問題（３問中２問選択）は，数学 B からの出題で，第３問が「確率分布と統計的な推測」，第４問が「数列」，第５問が「ベクトル」分野の問題である。３問とも人物の思考や会話を通して，問題設定と論証過程を理解し解答するものであった。

240320