令和７年度（2025年度）共通テスト　数学Ⅱ・数学Ｂ・数学C　解説

数学　②　[数学Ⅱ，数学Ｂ，数学C]　（100点，70分）

数学Ⅱ，数学Ｂ，数学C　（注）この科目には，選択問題があります。（3ページ参照）

第１問（必答問題）（配点　15）

＜解答＞

(1) ア 6　イ 3　ウ 2　エ 2　オ 2　カ 5　キク 18　ケ 6　コサ 17　シス 18

(2) セ 6　ソタ 11　チツ 18

＜解説＞

[1] (1)

$0 \leqq \theta < \pi$のとき，方程式

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\theta \quad ①$$

の解を求める。$\alpha = \theta + \dfrac{\pi}{6}$，$\beta = 2\theta$ とおけば，① は $\sin\alpha = \sin\beta$　②

(i)

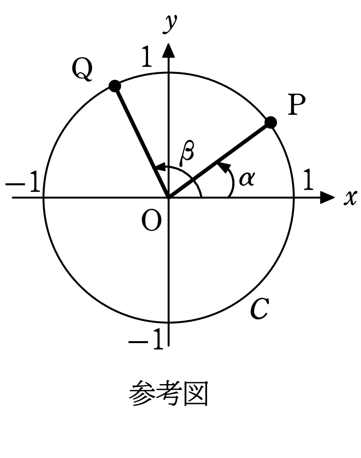
$\alpha = \beta$ を満たす θ は $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{ア}$ であり，これは ① の解の一つである。$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{イ}}{ウ}$

(ii)

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 以外の ① の解を求める方法を考える。

参考図を参照すると，② が成り立つとき，点 Pと点 Q の y 座標は等しい（ $\boxed{エ\ ②}$ ）。



参考図

(iii)

$\theta \neq \dfrac{\pi}{6}$ とする。

・$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の場合

$0 \leqq \beta \leqq \pi$ であるので，② が成り立つとき，(ii) の考察により，

$\alpha+\beta=\pi=\boxed{\text{オ ②}}$ を満たす。$\alpha+\beta=3\theta+\frac{\pi}{6}=\pi$より，$\theta=\frac{5}{18}\pi=\frac{\text{カ}}{\text{キク}}\pi$

・$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$の場合

$\pi<\beta<2\pi$であるので，②が成り立つとき，(ii)の考察により，$\alpha-\pi=2\pi-\beta$であるから

$\alpha+\beta=3\pi=\boxed{\text{ケ ⑥}}$ を満たす。$\alpha+\beta=3\theta+\frac{\pi}{6}=3\pi$より，$\theta=\frac{17}{18}\pi=\frac{\text{コサ}}{\text{シス}}\pi$

(2)

$0\leqq\theta<\pi$のとき，方程式

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2\theta$$ の解は

$\alpha=\beta$すなわち $\theta+\frac{\pi}{6}=2\theta$より，$\theta=\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{\text{セ}}$

$\alpha\neq\beta$の場合，参考図と同様の考え方により，点 Pと点 Q の x 座標が等しいので，

$\alpha-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}-\beta$すなわち $\theta+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}-2\theta$ より，$\theta=\frac{11}{18}\pi=\frac{\text{ソタ}}{\text{チツ}}\pi$

コメント：

三角関数の値が等しい場合，その変数値の関係に関する問題。ここでは，参考図のように，単位円の円周上の点の座標の関係によって，考察すると良いことが示されている。

第２問（必答問題）（配点　15）

＜解答＞

(1) ア 3　イ 1　ウエオカ 0402

(2) キ 3　クケ 60　コ 3　サシ 16

＜解説＞

(1)

水草Aの量は 3 日ごとに 1.32倍 に増える。1日ごとに r 倍に増えるとすれば r は

$r^3=\boxed{\text{ア ③}}=1.32$ を満たす。12，13 ページの常用対数表より，$\log_{10}1.32=0.1206=\boxed{\text{イ ①}}$

であるので，$3\log_{10}r=0.1206$ より $\log_{10}r=0.0402=0.\boxed{\text{ウエオカ}}$

(2)

作業の後に残す水草 Aの量を a %としたとき，(1)の定数 r を用いると，14日目の正午に水草 Aの量は a の $r^{14}=\boxed{\text{キ ③}}$ 倍になるので

$a\times r^{14}=60=\boxed{\text{クケ}}$　①

両辺の常用対数をとって，$\log_{10}a+14\log_{10}r=1+\log_{10}6$ より

$\log_{10}a=1.2154=\boxed{\text{コ ③}}$

常用対数表より，$a=10^{1.2154}=10\times10^{0.2154}=16.45$

a の決め方から，作業の後に残す水草 Aの量を a %以下にすれば，次回の作業までの間に水草 Aの量がつねに 60% を超えないことがわかる。a 以下で最大の整数は $16=\boxed{\text{サシ}}$ であることから

作業の後に残す水草 Aの量を 16% にすることとした。

コメント：

対数表の見方，使い方は知っておかなければならない。 例えば， $x = 10^{0.2154} = 1.645$ を12ページの常用対数表から求める方法を確認してみる。 x は 10 を底とする対数 0.2154 の真数だから，常用対数表記載の対数値 **0.2148** と **0.2175** の間（$0.2148 < 0.2154 < 0.2175$）にある真数である。

すなわち，対数値 0.2148 に対応する真数値 1.64 と対数値 0.2175 に対応する真数値 1.65 の間にある真数だから $1.64 < x < 1.65$ となる。ここでは， 簡単のため $x \fallingdotseq 1.645$ としたが，厳密には

$x = 1.64 + (1.65-1.64)\times\dfrac{0.2154-0.2148}{0.2175-0.2148} = 1.64 + 0.01\times\dfrac{2}{9} \fallingdotseq 1.642$ となる。

第３問（必答問題）（配点　22）

<解答>

(1) ア 6　イ 6　ウエ −1　オ 2　カ 3　キ 0　クケ −1

(2) コ 0　サ 0　シ 0　ス 1　セ 3　ソ 3　タ 0　チ 2　ツ 0　テ 0　ト 0　ナ 2

<解説>

(1)

$F(x) = 2x^3 + 3x^2$ の場合

$F(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから

$f(x) = F'(x) = 6x^2 + 6x = \boxed{ア}x^2 + \boxed{イ}x = 6x(x+1)$

$F(x)$ は $x = -1 = \boxed{ウエ}$ で極大値をとる。また， $G(x)$ の導関数が $f(x)$ であることから

$G'(x) = f(x) = 6x^2 + 6x$ より， $G(x) = = 2x^3 + 3x^2 + C = \boxed{オ}x^3 + \boxed{カ}x^2 + C$

$G(x)$ は $x = 0 = \boxed{キ}$ で極小値をとる。 さらに $G(x)$ は $x = k$ で極大値 0 をとるから， $k = -1$

$2x^3 + 3x^2 + C = 2k^3 + 3k^2 + C = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 + C = -2 + 3 + C = 0,$

$\therefore C = -1 = \boxed{クケ}$

(2)

$k > 0$ の場合

(ⅰ)

$F(x)$ が $x = 0$ で極小値をとることから，$f(0) = 0 = \boxed{コ}$ であり， $x = 0$ の前後で $f(x)$ の符号は $\boxed{\text{負から正に変わる}} = \boxed{サ\ ⓪}$ 。

さらに， $G(x)$ が $x = k$ で極大値 をとることから， $f(k) = 0 = \boxed{シ}$ であり，

$x = k$ の前後で $f(x)$ の符号は $\boxed{\text{正から負に変わる}} = \boxed{ス\ ①}$ 。

したがって，$F(x)$ の導関数が $f(x)$ であることに注意すると，$y = F(x)$ が $x = k$ (>0) で極大値，$x = 0$ で極小値 0 をとることから，座標平面において $y = F(x)$ のグラフの概形は，$\boxed{セ\ ③}$ である。

(ⅱ)

$F(x)$ に関する条件から，すべての実数 x に対して

$$F(x) = \int_{タ}^{ソ} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_0^x = F(x) - F(0) = F(x) \text{ が成り立つ。}$$

すなわち，　$x=$ $\boxed{ソ ③}$，$0=$ $\boxed{タ ⓪}$

　このことと(ⅰ)の考察により，

$F(x)$ の極大値は $F(k)=\int_{ツ}^{チ} f(t)dt=\int_0^k f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_0^k=F(k)-F(0)=F(k)$

すなわち，　$k=$ $\boxed{チ ②}$，$0=$ $\boxed{ツ ⓪}$

　したがって，$F(x)$ の極大値 $F(k)$ は，関数 $y=f(x)=$ $\boxed{テ ⓪}$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積と等しいことがわかる。すなわち，$\boxed{ト ⓪}$

　次に，$F'(x)=G'(x)=f(x)$ より，$G(x)=F(x)+C$　（C は定数）とおける。

すると，$G(0)=F(0)+C=C$，$F(k)=G(k)-C=-C=-G(0)=-1\times G(x)$ の極小値

すなわち $G(x)$ に関する条件から，$F(x)$ の極大値 $F(k)$ は，$G(x)$ の $\boxed{極小値の-1倍}$ $=$ $\boxed{ナ ②}$ と等しいことがわかる。

コメント：

　積分法，微分法における原始関数，導関数，積分定数に関わる基本的な性質と処理に関する問題。基礎的な理解に関わるもので平易な問題だが，受験生の日常の数学の勉強からは遠い可能性もある。問題文をしっかり読み込んで，解答しよう。

　冒頭の問題文「$F(x)$ と $G(x)$ はどちらも導関数が $f(x)$ であるような関数」ということから，$F(x)$ と $G(x)$ の相異は積分定数の違いということを理解しよう。したがって，極小値，極大値をとる変数 x の値は同じということも頭に入れよう。すなわち，両関数とも $x=0$ で極小値，$x=k$ で極大値をとる。

$\boxed{第4問〜第7問は，いずれか3問を選択し，解答しなさい。}$

第4問（選択問題）（配点　16）

＜解答＞

(1) ア 5　イ 8　ウ 0　エ 3　オ 0　カキク 610

(2) ケ 7　コ 1　サ 7

(3)シ 3　スセ −3　ソ 2

＜解説＞

(1)

　直線 $y=3x$ と x 軸，直線 $x=21$ で囲まれた図形を T とし，T の内部にある格子点の個数を考える。

　n を整数とし，直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものの個数を a_n とおく。

すると，$a_n=3n-1$ だから，$a_1=2$ であり，$a_2=5=$ $\boxed{ア}$，$a_3=8=$ $\boxed{イ}$ である。

数列 $\{a_n\}$ は $\boxed{公差}=\boxed{ウ ⓪}$ が $3=\boxed{エ}$ の $\boxed{等差数列}=\boxed{オ ⓪}$ である。

したがって，Tの内部にある格子点の個数は$\sum_{n=1}^{20} a_n = \sum_{n=1}^{20}(3n-1) = 610 = \boxed{カキク}$

(2)

nを自然数とする。関数$y=2^x$のグラフとx軸，y軸および直線$x=n+1$で囲まれた図形をUとする。

kを整数とする。直線$x=k$がUの内部にある格子点を通るとき，直線$x=k$上の格子点でUの内部にあるものの個数は$\boxed{2^k-1} = \boxed{ケ ⑦}$である。

したがって，Uの内部にある格子点の個数は$\sum_{k=1}^{n}(2^k-1) = \sum_{k=1}^{コ}(ケ) = 2^{n+1}-n-2 = \boxed{サ}$

すなわち，$n = \boxed{コ ①}$，$2^{n+1}-n-2 = \boxed{サ ⑦}$

(3)

a，b，cは整数で，$a>0$，$b^2-4ac<0$を満たす。放物線$y=ax^2+bx+c$とx軸，y軸および直線$x=n+1$で囲まれた図形をVとする。

$x=k$の直線上の格子点の個数は$(ak^2+bk+c-1)$個

したがって，Vの内部にある格子点の個数は$\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c-1)$個

すべての自然数nに対して，これがn^3となるa，b，cの値を求める。

$$\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c-1) = a\sum_{k=1}^{n}k^2 + b\sum_{k=1}^{n}k + n(c-1)$$

$$= \frac{1}{6}an(n+1)(2n+1) + \frac{bn(n+1)}{2} + n(c-1) = n^3$$

上式をnのべき乗の式に整理すれば,

$$\frac{1}{3}an^3 + \frac{1}{2}(a+b)n^2 + \left(\frac{a}{6}+\frac{b}{2}+c-1\right)n = n^3$$

したがって，$\frac{1}{3}a=1$，$a+b=0$，$\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{2}+c-1\right)=0$

$a=3=\boxed{シ}$，$b=-3=\boxed{スセ}$，$c=2=\boxed{ソ}$

コメント：

数列の応用の問題。変数$x=k$の直線上の格子点の数から図形の中の格子点の数を数列の公式を利用して求める。直線の上限値yは(1)では$y<3x$，(2)では$y<2^x$，(3)では$y<ak^2+bk+c$

$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$の公式を覚えていなければならない。むろん，この公式の導出方法を理解していることの方が価値が高いが，迅速に公式を導くことには無理があろう。

第４問～第７問は，いずれか３問を選択し，解答しなさい。

第５問（選択問題）（配点　16）

＜解答＞

(1) アイウエ 4332　オ 4

(2) カ 6　キ 5　クケコ 385

(3) サ 0　シ 5　スセソタ 0359　チ 1　ツ 0

＜解説＞

(1)

$x=\dfrac{X-\overline{X}}{\sigma}=\dfrac{X-110}{20}$ なる変換を行うと，x は標準正規分布に従う。

$110\leqq X\leqq 140$　のとき，$0\leqq x\leqq 1.5$だから，31ページの正規分布表から

$P(110\leqq X<140)=P(0\leqq x<1.5)=0.4332=$　0. $\boxed{\text{アイウエ}}$

レモンがＬサイズである確率は 0.4332 だから，レモン 20 万個中のＬサイズのレモンの個数を確率変数 Y とすれば，Y は二項分布に従い，Y の期待値は $200{,}000\times 0.4332=86440=$ $\boxed{\text{オ ④}}$

(2)

標本数 n の標本平均 $\overline{W}$ は近似的に平均 m，標準偏差 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の正規分布 $N\left(m,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)=N(m,\text{カ})$ に従う。ただし m と σ は母集団の平均と標準偏差である。すなわち $\boxed{\text{カ ⑥}}$

$\overline{w}=\dfrac{\overline{W}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ とすれば，$\overline{w}$ は標準正規分布 $N(0,1)$に従う。

$\overline{w}$ が 存在する確率が 95 ％ に入る範囲は，標準正規分布表から $-1.96\leqq\overline{w}\leqq 1.96$ であることがわかる。したがって，m が存在する確率が 95 ％ に入る範囲は

$-1.96\leqq\dfrac{\overline{W}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\leqq 1.96$ より，$\overline{W}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{W}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

すなわち，m に対する信頼度 95％ の信頼区間を $A\leqq m\leqq B$ で表すと，信頼区間の幅は

$B-A=3.92\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{\text{キ}}{\sqrt{n}}$，すなわち $\boxed{\text{キ ⑤}}$

したがって，母標準偏差を過去と同じ$\sigma=20$として母平均に対する信頼度 95 ％ の信頼区間の幅を 4ｇ以下にするための必要な標本の大きさ n は，$\dfrac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{\text{キ}}{\sqrt{n}}\leqq 4$　①

を満たす自然数を求めればよい。

①より，$(3.92\sigma)^2=(3.92\times 20)^2\leqq 16n$ を満たす最小の自然数 $n_0=385=$ $\boxed{\text{クケコ}}$

ゆえに，m に対する信頼度 95 ％ の信頼区間の幅を4ｇ以下にするための必要な標本の大きさ n のうち最小のものは 385 であることがわかる。

(3)

対立仮説は「今年収穫されるレモンの重さの母平均 m ｇが過去の平均110ｇより軽い」→ $\boxed{\text{サ ⓪}}$

帰無仮説は「$m=110$」

帰無仮説が正しいとすれば，標本の大きさ $n=400$ は十分に大きいので，(2) の標本平均 $\overline{W}$ は近似

的に正規分布 $N\left(110, \dfrac{\sigma^2}{n}\right) = N(110, 1) = \boxed{シ\ ⑤}$ に従う。

無作為抽出した400個のレモンの重さの平均が108.2 g となったとき，$\overline{W} \leqq 108.2$ g となる確率 $P(\overline{W} \leqq 108.2)$ は $108.2-110 = -1.8$ だから，標準正規分布表より，

$P(\overline{W} \leqq 108.2) = P(\overline{w} \leqq -1.8) = P(\overline{w} \geqq 1.8) = 0.0359 = \boxed{0.スセソタ}$ 。

この値をパーセント表示した値3.6% は有意水準5% より

$\boxed{\text{小さいから，帰無仮説は棄却される}} = \boxed{チ\ ①}$ 。

したがって，有意水準5% で今年収穫されるレモンの重さの母平均は110g より軽いと

$\boxed{\text{判断できる}} = \boxed{ツ\ ⓪}$ 。

コメント：

(1) では標準正規分表の見方，利用の仕方を理解していなければならない。

(2) では母集団平均の推定を行う。信頼度95% で母集団平均を推定できる幅を求める。解説では，$\overline{w}$ が 存在する確率が95 % に入る範囲は，標準正規分布表から $-1.96 \leqq \overline{w} \leqq 1.96$ であると記載した。　教科書には，母平均 m に対する信頼度95% の信頼区間として，

$\overline{X} - 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ，と公式化されている。これを覚えていればスムーズに解答できる。

(3) では，2023年度からの新課程の数学Bの統計的な推測における仮説検定の問題である。帰無仮説「$m = 110$」が正しいと仮定すると，「無作為抽出した400個のレモンの重さの平均が108.2g 以下となる確率は3.6% となり，有意水準5% より小さいので，稀にしか起きないこと」となる。すなわち，稀にしか起きないことが起きたことは，帰無仮説「$m = 110$」が正しくないと判断される。すなわち，この帰無仮説は棄却される。

第4問～第7問は，いずれか3問を選択し，解答しなさい。

第6問（選択問題）（配点　16）

＜解答＞

(1) ア1　イ4　ウ0　エ0　オ5

(2) カ3　キ5　ク3　ケコ10　サ2　シ0

(3) ス3　セ4

＜解説＞

(1)

点Cの座標を (x, y, z) とする。Cが半径1の球面 S 上にあるとき

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1 = \boxed{ア} \quad ①$$

さらに，△ABCが正三角形であるとする。△OACと△OABは，対応する三組の辺の長さがそれぞれ等しいから合同である。したがって，対応する角の大きさも等しいから

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \boxed{イ\ ④}$ が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと

$(1, 0, 0)\cdot(x, y, z) = (1, 0, 0)\cdot(a, \sqrt{1-a^2}, 0)$,　$\therefore x = a = \boxed{ウ\ ⓪}$　②

同様に △OBC と △OAB も合同であるから

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = (a, \sqrt{1-a^2}, 0)\cdot(x, y, z) = ax + \sqrt{1-a^2}\,y = \boxed{エ\ ⓪}\,x + \boxed{オ\ ⑤}\,y$

$= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = a$　③

(2)

(i) $a = \dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 x，y は

② より $x = \dfrac{3}{5} = \dfrac{カ}{キ}$，　$y = \dfrac{3}{10} = \dfrac{ク}{ケコ}$

この x，y に対して，① を満たす実数 z は $z^2 = 1 - x^2 - y^2 = \dfrac{11}{20}$，　$\therefore z = \pm\dfrac{\sqrt{55}}{10}$

すなわち，実数 z は $\boxed{ちょうど二つある}$ $= \boxed{サ\ ②}$。

したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{ちょうど二つある}$ 。

(ii) $a = -\dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 x，y は

②より $x = -\dfrac{3}{5}$，③より $y = \dfrac{a-a^2}{\sqrt{1-a^2}} = -\dfrac{6}{5}$

この x，y に対して，① を満たす実数 z は $z^2 = 1 - x^2 - y^2 = -\dfrac{4}{5}$ となって，存在しない。

したがって，△ABC が正三角形となる S 上の点 C は $\boxed{ない}$ $= \boxed{シ\ ⓪}$。

(3)

△ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための，a に関する条件を見つけよう。

実数 x，y，z は①，②，③ を満たすとする。② と ③ から，　$x = a$，　$y = \dfrac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$

① から，　$z^2 = 1 - x^2 - y^2 = \dfrac{(1+2a)(1-a)}{1+a} = \dfrac{ス}{1+a}$

$z^2 \geqq 0$，$1+a > 0$ であるから ス $= (1+2a)(1-a) \geqq 0$ である。

逆に，$\boxed{ス\ ③} = (1+2a)(1-a) \geqq 0$ のとき，①，②，③ を満たす実数 x，y，z があることがわかる。

以上のことから，　$-\dfrac{1}{2} \leqq a < 1 = \boxed{セ\ ④}$

コメント：

問題文の参考図に，補助線や座標の値を記入するなどして，題意を速やかに読み込みつつ，思考を進めれば，難しい問題ではないことに気づくであろう。ベクトルの内積演算の方法と意味を的確に理解していることが必要である。

ここでは，ベクトルの内積を $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = (a, \sqrt{1-a^2}, 0)\cdot(x, y, z)$ のように表現した。

第4問～第7問は，いずれか3問を選択し，解答しなさい。

第7問（選択問題）（配点 16）

＜解答＞

(1) ア4 イ8 ウ4 エ2 オ3 カ4

(2) キ2 ク0 (3) ケ6 コ0 サ0 シ1

＜解説＞

(1)

複素平面上の点 A(α)，B(β)，C(γ)，$\alpha = 3 + 2\,i$，$\beta = 7$，$\gamma = 7 + 10\,i$ のとき

$\gamma - \alpha = 4+8\,i = \boxed{ア} + \boxed{イ}\,i$， $\beta - \alpha = 4-2\,i = \boxed{ウ} - \boxed{エ}\,i$，したがって，

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \dfrac{4+8i}{4-2i} = \dfrac{(4+8i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = 2\,i = \boxed{オ\ ③}$ であり，$2\,i$ の偏角は $\dfrac{\pi}{2} = \boxed{カ\ ④}$ である。

(2)

$w = \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ とおく。直線 AB の偏角は $\arg(\beta-\alpha)$，直線 AC の偏角は $\arg(\gamma-\alpha)$だから，

直線 AB に対して直線 AC がなす角は，$\arg(\gamma-\alpha) - \arg(\beta-\alpha) = \arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \arg w$

したがって，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるのは，w の偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3\pi}{2}$ のときである。

このとき，w は $\boxed{純虚数（実部が0である虚数）} = \boxed{キ\ ②}$ であるから

$w + \overline{w} = 0 = \boxed{ク\ ⓪}$

逆に，$w \fallingdotseq 0$ に注意すると，$w + \overline{w} = 0$ のとき w は純虚数（実部が0である虚数）であるので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

(3)

z は 0，2，-2 でない複素数とする。

(i) $\alpha = z$，$\beta = 2$，$\gamma = \dfrac{4}{z}$ とする。直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための条件について考える。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\frac{4}{z}-z}{2-z} = 1 + \frac{2}{z}$$

が成り立つので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は，上記 (2) で考察したように

$\left(1+\dfrac{2}{z}\right) + \overline{\left(1+\dfrac{2}{z}\right)} = 0$ である。これは $2 + \dfrac{2}{z} + \dfrac{2}{\overline{z}} = 0$ と変形できる。

さらに，この両辺に $z\overline{z}$をかけて整理すると $z\overline{z} + z + \overline{z} = (z+1)(\overline{z}+1) - 1 = 0$

$(z+1)(\overline{z}+1) = (z+1)\overline{(z+1)} = 1$，$\therefore |z+1|^2 = 1$，$\therefore\ |z+1| = 1$

すなわち，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は $\boxed{|z+1| = 1} = \boxed{ケ\ ⑥}$

$|z+1|$ は複素数平面の点 z と点 $(-1\,,\,0)$との距離を示す。

したがって，$|z+1| = 1$ を満たす点 z は複素数平面の点 $(-1\,,\,0)$ からの距離が 1 の円である。

すなわち，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると，

$\boxed{コ\ ⓪}$ である。

(ii)

(i) の α，β，γ をそれぞれ -1 倍した複素数 $\alpha' = -z$， $\beta' = -2$， $\gamma' = -\dfrac{4}{z}$

$\dfrac{\gamma' - \alpha'}{\beta' - \alpha'} = \dfrac{\dfrac{-4}{z} + z}{-2 + z} = 1 + \dfrac{2}{z}$ だから，(i)と同じになるから，

直線 $A'B'$ と直線 $A'C'$ が垂直になるような点 z 全体を複素数平面上に図示すると，(i)と同じく $\boxed{サ\ ⓪}$ である。

(iii)

(i) の α，β，γ における z を $-z$ に置き換えた複素数 $\alpha'' = -z$， $\beta'' = 2$， $\gamma'' = -\dfrac{4}{z}$

$\dfrac{\gamma'' - \alpha''}{\beta'' - \alpha''} = \dfrac{\dfrac{-4}{z} + z}{2 + z} = 1 - \dfrac{2}{z}$，

直線 $A''B''$ と直線 $A''C''$ が垂直になる必要十分条件は，(i)と同様に

$\left(1 - \dfrac{2}{z}\right) + \overline{\left(1 - \dfrac{2}{z}\right)} = 0$ である。したがって，$z\overline{z} - z - \overline{z} = (z-1)(\overline{z}-1) - 1 = 0$,

$(z-1)(\overline{z}-1) = (z-1)\overline{(z-1)} = 1$, $\therefore |z-1|^2 = 1$, $\therefore |z-1| = 1$

直線$A''B''$と直線 $A''C''$が垂直になるような点 z全体を複素数平面上に図示すると， $\boxed{シ\ ①}$ である。

コメント：

これまで数学 III に組み込まれていた複素数平面が新たに数学 C として，平面ベクトル，空間ベクトルに続いて記載されるようになった。(1)，(2)ともに基礎的な問題だからスムーズに解答しよう。(3) は (2) を活用する。

＜総評＞

2022 年度から数学の新課程が学年進行で導入され、2025 年度大学入試に反映された。この共通テストの問題と課程との対応は以下のようである。必答問題は数学Ⅱからである。選択問題は4問中3問選択だから，数学 B と数学 C を少なくも 1 問は選択しなければならない。

第１問　三角関数（数学Ⅱ）
第２問　対数関数（数学Ⅱ）
第３問　微分積分（数学Ⅱ）
第４問　数列（数学B)
第５問　統計的な推測（数学B)
第６問　ベクトル，空間座標（数学C)
第７問　複素数平面（数学C

250403