数学Ⅰ・数学A

（全　問　必　答）

第１問　（配点　20）

〔1〕　$a = 3 + 2\sqrt{2}$，$b = 2 + \sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a} = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$\frac{1}{b} = \boxed{\text{エ}} - \sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。このとき，不等式

$$|2abx - a^2| < b^2$$

を満たす x の値の範囲は

$$\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} - \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}} < x < \boxed{\text{セ}} - \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。

（数学Ⅰ・数学A第１問は次ページに続く。）

〔2〕 実数 a，b に関する条件 p，q を次のように定める。

p： $(a+b)^2+(a-2b)^2<5$

q： $|a+b|<1$ または $|a-2b|<2$

(1) 次の⓪～③のうち，命題「$q \Longrightarrow p$」に対する反例になっているのは **チ** である。

⓪ $a=0$，$b=0$　　① $a=1$，$b=0$

② $a=0$，$b=1$　　③ $a=1$，$b=1$

(2) 命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は「 **ツ** $\Longrightarrow$ **テ** 」である。

ツ ，テ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。

⓪ $|a+b|<1$ かつ $|a-2b|<2$　　① $(a+b)^2+(a-2b)^2<5$

② $|a+b|<1$ または $|a-2b|<2$　　③ $(a+b)^2+(a-2b)^2\leqq 5$

④ $|a+b|\geqq 1$ かつ $|a-2b|\geqq 2$　　⑤ $(a+b)^2+(a-2b)^2>5$

⑥ $|a+b|\geqq 1$ または $|a-2b|\geqq 2$　　⑦ $(a+b)^2+(a-2b)^2\geqq 5$

(3) p は q であるための **ト** 。

ト に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

第2問 (配点 25)

a, b, c を定数とし, $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。x の2次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のグラフを G とする。G が $y = -3x^2 + 12bx$ のグラフと同じ軸をもつとき

$$a = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。さらに, G が点$(1, 2b-1)$を通るとき

$$c = b - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

以下, ②, ③ のとき, 2次関数 ① とそのグラフ G を考える。

(数学Ⅰ・数学A第2問は次ページに続く。)

(1) G と x 軸が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$b < \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \qquad \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} < b$$

である。さらに，G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるような b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} < b < \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

(2) $b > 0$ とする。

$0 \leqq x \leqq b$ における 2 次関数 ① の最小値が $-\dfrac{1}{4}$ であるとき，

$b = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。一方，$x \geqq b$ における 2 次関数 ① の最大値が 3 であるとき，$b = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

$b = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$，$b = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のときの ① のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。G_1 を x 軸方向に $\boxed{\text{テ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{ト}}$ だけ平行移動すれば，G_2 と一致する。

第3問 （配点　30）

点Oを中心とする円Oの円周上に4点A，B，C，Dがこの順にある。四角形ABCDの辺の長さは，それぞれ

$$AB = \sqrt{7}\,,\ BC = 2\sqrt{7}\,,\ CD = \sqrt{3}\,,\ DA = 2\sqrt{3}$$

であるとする。

(1) $\angle ABC = \theta$，$AC = x$ とおくと，$\triangle ABC$ に着目して

$$x^2 = \boxed{\text{アイ}} - 28\cos\theta$$

となる。また，$\triangle ACD$ に着目して

$$x^2 = 15 + \boxed{\text{ウエ}}\cos\theta$$

となる。よって，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$x = \sqrt{\boxed{\text{キク}}}$ であり，円Oの半径は $\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

また，四角形ABCDの面積は $\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

（数学Ⅰ・数学A第3問は次ページに続く。）

(2) 点Aにおける円Oの接線と点Dにおける円Oの接線の交点をEとすると，∠OAE = $\boxed{\text{シス}}$° である。また，線分OEと辺ADの交点をFとすると，∠AFE = $\boxed{\text{セソ}}$° であり，

$$\mathrm{OF}\cdot\mathrm{OE} = \boxed{\text{タ}}$$

である。

さらに，辺ADの延長と線分OCの延長の交点をGとする。点Eから直線OGに垂線を下ろし，直線OGとの交点をHとする。

4点E，G，$\boxed{\text{チ}}$ は同一円周上にある。$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを次の⓪～④から一つ選べ。

⓪ C，F　　① H，D　　② H，F　　③ H，A　　④ O，A

したがって

$$\mathrm{OH}\cdot\mathrm{OG} = \boxed{\text{ツ}}$$

である。

第4問 （配点 25）

1個のさいころを投げるとき，4以下の目が出る確率 p は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，5以上の目が出る確率 q は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

以下では，1個のさいころを8回繰り返して投げる。

(1) 8回の中で4以下の目がちょうど3回出る確率は $\boxed{\text{オカ}}\,p^3q^5$ である。

第1回目に4以下の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど2回出る確率は $\boxed{\text{キク}}\,p^3q^5$ である。

第1回目に5以上の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど3回出る確率は $\boxed{\text{ケコ}}\,p^3q^5$ である。

（数学Ⅰ・数学A第4問は次ページに続く。）

(2) 次の⓪〜⑦のうち $\boxed{\text{オカ}}$ に等しいものは $\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{サ}}$ と $\boxed{\text{シ}}$ は解答の順序を問わない。

⓪ ${}_7C_2 \times {}_7C_3$　① ${}_8C_1 \times {}_8C_2$　② ${}_7C_2 + {}_7C_3$　③ ${}_8C_1 + {}_8C_2$

④ ${}_7C_4 \times {}_7C_5$　⑤ ${}_8C_6 \times {}_8C_7$　⑥ ${}_7C_4 + {}_7C_5$　⑦ ${}_8C_6 + {}_8C_7$

(3) 得点を次のように定める。

8回の中で4以下の目がちょうど3回出た場合，

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ について，第 n 回目に初めて4以下の目が出たとき，得点は n 点とする。

また，4以下の目が出た回数がちょうど3回とならないときは，得点を0点とする。

このとき，得点が6点となる確率は $p^{\boxed{\text{ス}}}q^{\boxed{\text{セ}}}$ であり，得点が3点となる確率は $\boxed{\text{ソタ}}\,p^{\boxed{\text{ス}}}q^{\boxed{\text{セ}}}$ である。また，得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{チツテ}}}{\boxed{\text{トナニ}}}$ である。