数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔１〕　$a>0$，$a \neq 1$として，不等式

$$2\log_a(8-x)>\log_a(x-2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすxの値の範囲を求めよう。

真数は正であるから，$\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$が成り立つ。ただし，対数$\log_a b$に対し，$a$を底といい，$b$を真数という。

底aが$a<1$を満たすとき，不等式①は

$$x^2-\boxed{\text{ウエ}}x+\boxed{\text{オカ}}\ \boxed{\text{キ}}\ 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$については，当てはまるものを，次の⓪〜②のうちから一つ選べ。

⓪　$<$　　　　①　$=$　　　　②　$>$

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

したがって，真数が正であることと②から，$a<1$ のとき，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ク}}<x<\boxed{\text{ケ}}$ である。

同様にして，$a>1$ のときには，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{コ}}<x<\boxed{\text{サ}}$ であることがわかる。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$として

$$\sin\alpha = \cos 2\beta$$

を満たすβについて考えよう。ただし，$0 \leqq \beta \leqq \pi$とする。

たとえば，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$のとき，βのとり得る値は$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}$と$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$の二つである。

このように，αの各値に対して，βのとり得る値は二つある。そのうちの小さい方をβ_1，大きい方をβ_2とし

$$y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$$

が最大となるαの値とそのときのyの値を求めよう。

β_1，β_2をαを用いて表すと，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$のときは

$$\beta_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}} - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}},\quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となり，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$のときは

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{\boxed{\text{チ}}} + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}},\quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

したがって，$\alpha + \dfrac{\beta_1}{2} + \dfrac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\pi \leqq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leqq \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\pi$$

である。よって，y が最大となる α の値は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}\pi$ であり，そのときの y の値は $\boxed{\text{フ}}$ であることがわかる。$\boxed{\text{フ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{1}{2}$　　① 1　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

第2問 (配点 30)

座標平面上で曲線 $y=x^3$ を C とし，放物線 $y=x^2+px+q$ を D とする。

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における C の接線の方程式は

$$y=3a^{\boxed{ア}}x-\boxed{イ}\,a^{\boxed{ウ}}$$

である。放物線 D は点Pを通り，D のPにおける接線と，C のPにおける接線が一致するとする。このとき，p と q を a を用いて表すと

$$\begin{cases} p=3a^{\boxed{エ}}-\boxed{オ}\,a \\ q=\boxed{カキ}\,a^3+a^{\boxed{ク}} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

以下，p，q は ① を満たすとする。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2) 放物線 D が y 軸上の与えられた点 Q$(0, b)$ を通るとき

$$b = \boxed{\text{ケコ}}\,a^3 + a^{\boxed{\text{サ}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ。与えられた b に対して，② を満たす a の値の個数を調べよう。

そのために，関数

$$f(x) = \boxed{\text{ケコ}}\,x^3 + x^{\boxed{\text{サ}}}$$

の増減を調べる。関数 $f(x)$ は，$x = \boxed{\text{シ}}$ で極小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとり，

$x = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ をとる。

関数 $y = f(x)$ のグラフをかくことにより，$\boxed{\text{ス}} < b < \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ のとき，② を満たす a の値の個数は $\boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

(3) 放物線 D の頂点が x 軸上にあるのは，$a = \boxed{\text{ト}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ の二つの場合である。$a = \boxed{\text{ト}}$ のときの放物線を D_1，$a = \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のときの放物線を D_2 とする。D_1，D_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{2^{\boxed{\text{ヌ}}}}{3^{\boxed{\text{ネノ}}}}$ である。

第3問 （配点　20）

Oを原点とする座標平面上に2点A(1, a)，B(0, 2)をとる。三角形OABの重心をG，直線AGと辺OBとの交点をLとおく。Lの座標は$\left(0,\ \boxed{\text{ア}}\right)$である。線分OL上に点P(0, t)をとり，直線PGと直線ABとの交点をQとする。Pが線分OL上を動くとき，三角形BPQの面積Sの最小値を求めよう。

Gの座標は$\left(\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)$であるから，PGの方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{キ}}-\boxed{\text{ク}}\,t\right)x+t$$

となる。ただし，$\boxed{\text{エ}}$と$\boxed{\text{オ}}$の解答の順序，および$\boxed{\text{カ}}$と$\boxed{\text{キ}}$の解答の順序は問わない。

また，ABの方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}}\right)x+\boxed{\text{サ}}$$

であるから，Qのx座標は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}-t}{\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}}\,t}$$

である。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

したがって，三角形 BPQ の面積 S を t を用いて表すと

$$S=\frac{\left(\boxed{\text{ソ}}-t\right)^2}{\boxed{\text{タ}}\left(\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}}\,t\right)}$$

となる。ここで，式を簡単にするために，$u=\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}}\,t$ とおくと

$$S=\frac{1}{\boxed{\text{チツ}}}\left(u+\frac{\boxed{\text{テ}}}{u}+\boxed{\text{ト}}\right)$$

となる。

P が線分 OL 上を動くとき，u のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ナ}} \leqq u \leqq \boxed{\text{ニ}}$ である。相加平均と相乗平均の関係により

$$u+\frac{\boxed{\text{テ}}}{u} \geqq \boxed{\text{ヌ}}$$

となり，等号は $u=\boxed{\text{ネ}}$ のときに成り立つ。したがって，$u=\boxed{\text{ネ}}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ をとる。また，このときの PG の傾きは $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

第4問 (配点 20)

a を実数とし，次数が3以下の整式 $P(x)$ は

$$P(1)=0,\quad P(2)=a,\quad P(3)=2,\quad P(4)=6$$

を満たすとする。$P(1)=0$ であるので，因数定理から，$P(x)$ は $x-\boxed{\text{ア}}$ で割り切れ，次数が2以下の整式 $Q(x)$ で

$$P(x)=\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)Q(x)$$

を満たすものがある。$Q(x)$ を求めるために

$$Q(x)=r(x-2)(x-3)+s(x-2)+t$$

とおいて，定数 r，s，t を a を用いて表してみよう。$P(2)=a$ から $t=\boxed{\text{イ}}$ となり，次に，$P(3)=2$ から $s=\boxed{\text{ウエ}}+\boxed{\text{オ}}$ となる。さらに，$P(4)=6$ から $r=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる。したがって，$Q(x)$ は

$$\frac{1}{\boxed{\text{キ}}}\left\{\boxed{\text{カ}}\,x^2+\left(\boxed{\text{クケ}}\,a+\boxed{\text{コ}}\right)x+\boxed{\text{サシ}}\,a-\boxed{\text{ス}}\right\}$$

である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような a の値の範囲は

$$\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}<a<\boxed{\text{セ}}+\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

である。この範囲にある最小の整数は $\boxed{\text{チ}}$ である。$a=\boxed{\text{チ}}$ のとき，方程式 $P(x)=0$ の虚数解は

$$\frac{\boxed{\text{ツ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{テ}}}\,i}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

数　学　Ⅱ　(100点満点)

Ⓕ

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点
第1問 (30)	ア	2	1
	イ	8	1
	ウエ, オカ	17, 66	2
	キ	0	3
	ク	6	2
	ケ	8	2
	コ	2	2
	サ	6	2
	シ	6	1
	ス	5	1
	セ, ソ	4, 2	2
	タ	3	1
	チ, ツ	4, 2	2
	テ	5	1
	$\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}$	$\frac{3}{8}$	2
	$\frac{\text{ニヌ}}{\text{ネ}}$	$\frac{11}{8}$	2
	$\frac{\text{ノ}}{\text{ハヒ}}$	$\frac{3}{22}$	2
	フ	1	1
第2問 (30)	ア, イ, ウ	2, 2, 3	3
	エ, オ	2, 2	2
	カキ, ク	−2, 2	3
	ケコ, サ	−2, 2	1
	シ	0	2
	ス	0	2
	$\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$	$\frac{1}{3}$	2
	$\frac{\text{タ}}{\text{チツ}}$	$\frac{1}{27}$	2
	テ	3	3
(第2問)	ト	0	2
	$\frac{\text{ナ}}{\text{ニ}}$	$\frac{4}{9}$	3
	ヌ, ネノ	4, 10	5
第3問 (20)	ア	1	1
	$\frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$	$\frac{1}{3}$	1
	エ + オ	a + 2 または 2 + a	1
	カ + キ − ク t	a + 2 − 3t または 2 + a − 3t	2
	(ケ − コ)x + サ	(a − 2)x + 2	2
	$\frac{\text{シ} - t}{\text{ス} - \text{セ}\,t}$	$\frac{2 - t}{4 - 3t}$	2
	ソ, タ	2, 2	2
	チツ, テ, ト	18, 4, 4	2
	ナ, ニ	1, 4	1
	ヌ	4	2
	ネ	2	1
	$\frac{\text{ノ}}{\text{ハ}}$	$\frac{4}{9}$	2
	ヒ	a	1
第4問 (20)	ア	1	1
	イ	a	2
	ウエ + オ	−a + 1	2
	$\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$	$\frac{a}{2}$	2
	クケ a + コ	−7a + 2	2
	サシ a − ス	12a − 4	2
	セ − ソ $\sqrt{\text{タ}}$	$6 - 4\sqrt{2}$	4
	チ	1	2
	$\frac{\text{ツ} \pm \sqrt{\text{テ}}\,i}{\text{ト}}$	$\frac{5 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$	3