数　学　Ⅱ

(全　問　必　答)

第１問　(配点　30)

〔１〕 O を原点とする座標平面において，点 P$(p,\ q)$を中心とする円 C が，方程式 $y = \frac{4}{3}x$ で表される直線 ℓ に接しているとする。

(1) 円 C の半径 r を求めよう。

点 P を通り直線 ℓ に垂直な直線の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(x - p) + q$$

なので，P から ℓ に引いた垂線と ℓ の交点 Q の座標は

$$\left(\frac{3}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p + \boxed{\text{エ}}\,q\right),\quad \frac{4}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p + \boxed{\text{エ}}\,q\right)\right)$$

となる。

求める C の半径 r は，P と ℓ の距離 PQ に等しいので

$$r = \frac{1}{5}\left|\boxed{\text{オ}}\,p - \boxed{\text{カ}}\,q\right| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

である。

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

(2) 円 C が，x 軸に接し，点 R(2，2)を通る場合を考える。このとき，$p > 0$，$q > 0$ である。C の方程式を求めよう。

C は x 軸に接するので，C の半径 r は q に等しい。したがって，① により，$p = \boxed{\text{キ}}\, q$ である。

C は点 R を通るので，求める C の方程式は

$$\left(x - \boxed{\text{ク}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{ケ}}\right)^2 = \boxed{\text{コ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

または

$$\left(x - \boxed{\text{サ}}\right)^2 + \left(y - \boxed{\text{シ}}\right)^2 = \boxed{\text{ス}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

であることがわかる。ただし，$\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{ス}}$ とする。

(3) 方程式 ② の表す円の中心を S，方程式 ③ の表す円の中心を T とおくと，直線 ST は原点 O を通り，点 O は線分 ST を $\boxed{\text{セ}}$ する。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 1：1 に内分	① 1：2 に内分	② 2：1 に内分
③ 1：1 に外分	④ 1：2 に外分	⑤ 2：1 に外分

(数学Ⅱ第１問は次ページに続く。)

〔2〕 自然数 m, n に対して，不等式

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leqq 3 \quad \cdots\cdots ④$$

を考える。

$m = 2$, $n = 1$ のとき，$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{ソ}}$ であり，この m, n の値の組は ④ を満たす。

$m = 4$, $n = 3$ のとき，$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{タ}}$ であり，この m, n の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数 m, n の組の個数を調べよう。④ は

$$\log_2 m + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\log_3 n \leqq \boxed{\text{テ}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

と変形できる。

n が自然数のとき，$\log_3 n$ のとり得る最小の値は $\boxed{\text{ト}}$ であるから，⑤ により，$\log_2 m \leqq \boxed{\text{テ}}$ でなければならない。$\log_2 m \leqq \boxed{\text{テ}}$ により，$m = \boxed{\text{ナ}}$ または $m = \boxed{\text{ニ}}$ でなければならない。ただし，$\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

$m=\boxed{\text{ナ}}$ の場合，⑤は，$\log_3 n \leqq \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ となり，$n^2 \leqq \boxed{\text{ノハ}}$ と変形できる。よって，$m=\boxed{\text{ナ}}$ のとき，⑤を満たす自然数 n のとり得る値の範囲は $n \leqq \boxed{\text{ヒ}}$ である。したがって，$m=\boxed{\text{ナ}}$ の場合，④を満たす自然数 m，n の組の個数は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

同様にして，$m=\boxed{\text{ニ}}$ の場合，④を満たす自然数 m，n の組の個数は $\boxed{\text{フ}}$ である。

以上のことから，④を満たす自然数 m，n の組の個数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

p を実数とし，$f(x) = x^3 - px$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう。$f(x)$ の導関数は，$f'(x) = \boxed{\text{ア}}\, x^{\boxed{\text{イ}}} - p$ である。したがって，$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるならば，$\boxed{\text{ア}}\, a^{\boxed{\text{イ}}} - p = \boxed{\text{ウ}}$ が成り立つ。さらに，$x = a$ の前後での $f'(x)$ の符号の変化を考えることにより，p が条件 $\boxed{\text{エ}}$ を満たす場合は，$f(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $p = 0$　① $p > 0$　② $p \geqq 0$　③ $p < 0$　④ $p \leqq 0$

(2) 関数 $f(x)$ が $x = \dfrac{p}{3}$ で極値をとるとする。また，曲線 $y = f(x)$ を C とし，C 上の点 $\left(\dfrac{p}{3},\ f\left(\dfrac{p}{3}\right)\right)$ を A とする。

$f(x)$ が $x = \dfrac{p}{3}$ で極値をとることから，$p = \boxed{\text{オ}}$ であり，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{カキ}}$ で極大値をとり，$x = \boxed{\text{ク}}$ で極小値をとる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

曲線 C の接線で，点Aを通り傾きが0でないものを ℓ とする。ℓ の方程式を求めよう。ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ は点 $(b,\ f(b))$ における C の接線であるから，ℓ の方程式は b を用いて

$$y = \left(\boxed{\text{ケ}}\,b^2 - \boxed{\text{コ}}\right)(x-b) + f(b)$$

と表すことができる。また，ℓ は点Aを通るから，方程式

$$\boxed{\text{サ}}\,b^3 - \boxed{\text{シ}}\,b^2 + 1 = 0$$

を得る。この方程式を解くと，$b = \boxed{\text{ス}}$，$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるが，ℓ の傾きが0でないことから，ℓ の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}x + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

点Aを頂点とし，原点を通る放物線を D とする。ℓ と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x \geqq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう。D の方程式は

$$y = \boxed{\text{ニ}}\,x^2 - \boxed{\text{ヌ}}\,x$$

であるから，定積分を計算することにより，$S = \dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる。

第3問 (配点 20)

関数 $y = \sin x - \cos 2x$ のグラフについて考えよう。ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする。

(1) まず，$y = \sin x - \cos 2x > 0$ となる x の範囲を求めよう。

三角関数の2倍角の公式を利用すれば

$$\sin x - \cos 2x = \boxed{\text{ア}}\sin^2 x + \sin x - \boxed{\text{イ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

$$= \left(\boxed{\text{ア}}\sin x - \boxed{\text{ウ}}\right)\left(\sin x + \boxed{\text{エ}}\right)$$

である。よって，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$\sin x - \cos 2x = 0$ となる x の値は，小さい順に，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$，$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ であることがわかる。また，$y = \sin x - \cos 2x > 0$ となる x の範囲は，$\boxed{\text{コ}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $0 < x < \dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$

① $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}} < x < \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi$

② $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi < x < \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$

③ $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi < x < 2\pi$

(2) 次に，$y = \sin x - \cos 2x$ の最大値と最小値を求めよう。

①から

$$\sin x - \cos 2x = \boxed{\text{ア}}\left(\sin x + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\right)^2 - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \quad \cdots ②$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

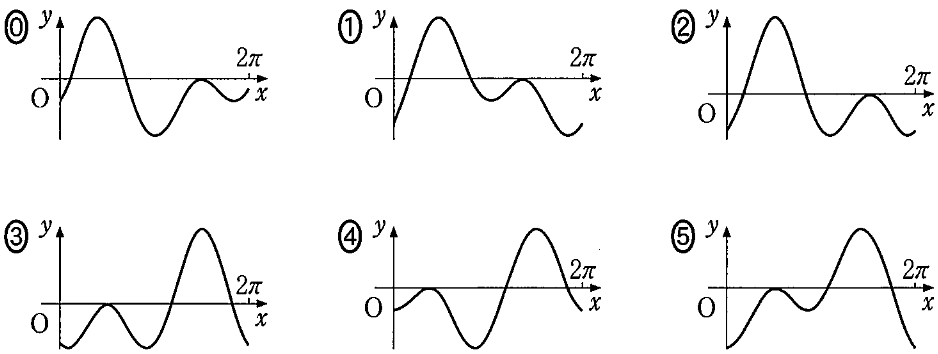
よって，②から，$y = \sin x - \cos 2x$ は，$x = \boxed{\text{ソ}}$ において最大値 $\boxed{\text{タ}}$ をとり，$x = \boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ において最小値 $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとることがわかる。ただし，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。$\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ は解答の順序を問わない。

⓪ α　　① $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$　　② $\dfrac{\pi}{2}$　　③ $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$　　④ $\pi - \alpha$

⑤ $\pi + \alpha$　　⑥ $\dfrac{3}{2}\pi - \alpha$　　⑦ $\dfrac{3}{2}\pi$　　⑧ $\dfrac{3}{2}\pi + \alpha$　　⑨ $2\pi - \alpha$

ここで，α は，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\sin \alpha = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ を満たすものとする。

(3) 以上のことから，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における関数 $y = \sin x - \cos 2x$ のグラフの概形として適切なものは $\boxed{\text{ニ}}$ であることがわかる。$\boxed{\text{ニ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。



第４問 （配点　20）

c，d を実数とし，x についての３次式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^3 + cx^2 + dx + 2$$

で定める。$P(x)$ は，$P(-1) = 0$，$P(2) < -2$ を満たし，３以上の自然数 n に対しては $P(n) \geqq 0$ であるとする。

$P(-1) = 0$ により

$$d = c + \boxed{\text{ア}}$$

となり，$P(x)$ は c を用いて

$$P(x) = (x + 1)\left\{x^2 + \left(\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}\right)x + \boxed{\text{エ}}\right\} \quad \cdots ①$$

と因数分解される。① を用いて，$P(2) < -2$ を c について解くと

$$c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。

また，n を３以上の自然数とするとき，不等式 $P(n) \geqq 0$ を c について解くと

$$c \geqq -\frac{\boxed{\text{キ}}}{n} + \boxed{\text{ク}} - n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる。$n \geqq 3$ のとき，n の値が大きくなると，③ の右辺の値は小さくなる。したがって，② と ③ により，c のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \leqq c < -\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

となる。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

3次関数 $y = P(x)$ のグラフを考えると，$P(0) = 2 > 0$ かつ $P(2) < 0$ であるから，方程式 $P(x) = 0$ は0と2の間に実数解 α をもつ。α のとり得る値の範囲を求めよう。

①により，この α は，2次方程式

$$x^2 + \left(\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}\right)x + \boxed{\text{エ}} = 0$$

の解である。この方程式の他の解を β とすると，解と係数の関係により，$\alpha + \beta$ は c を用いて

$$\alpha + \beta = \boxed{\text{サ}} - \boxed{\text{シ}}$$

と表される。したがって，④により

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}} < \alpha + \beta \leqq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

が得られる。解と係数の関係により，$\alpha\beta = \boxed{\text{テ}}$ であり，また，$\alpha > 0$ であるから，⑤は

$$\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\alpha < \alpha^2 + \boxed{\text{テ}} \leqq \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\alpha$$

と変形できる。この不等式を α について解いて，$0 < \alpha < 2$ に注意すると，α のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq \alpha < \frac{\boxed{\text{ニ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

であることがわかる。

数学Ⅱ・数学B

問　題	選　択　方　法
第１問	必　　答
第２問	必　　答
第３問	いずれか２問を選択し，解答しなさい。
第４問	
第５問	
第６問	

第1問 （必答問題）（配点　30）

〔1〕 Oを原点とする座標平面において，点P(p，q)を中心とする円Cが，方程式$y=\frac{4}{3}x$で表される直線ℓに接しているとする。

(1) 円Cの半径rを求めよう。

点Pを通り直線ℓに垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}(x-p)+q$$

なので，Pからℓに引いた垂線とℓの交点Qの座標は

$$\left(\frac{3}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}\,q\right),\quad \frac{4}{25}\left(\boxed{\text{ウ}}\,p+\boxed{\text{エ}}\,q\right)\right)$$

となる。

求めるCの半径rは，Pとℓの距離PQに等しいので

$$r=\frac{1}{5}\left|\boxed{\text{オ}}\,p-\boxed{\text{カ}}\,q\right| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(2) 円 C が，x 軸に接し，点 R(2，2)を通る場合を考える。このとき，$p>0$，$q>0$ である。C の方程式を求めよう。

C は x 軸に接するので，C の半径 r は q に等しい。したがって，①により，$p=\boxed{\text{キ}}\,q$ である。

C は点 R を通るので，求める C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{ク}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ケ}}\right)^2=\boxed{\text{コ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

または

$$\left(x-\boxed{\text{サ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{シ}}\right)^2=\boxed{\text{ス}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

であることがわかる。ただし，$\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{ス}}$ とする。

(3) 方程式②の表す円の中心を S，方程式③の表す円の中心を T とおくと，直線 ST は原点 O を通り，点 O は線分 ST を $\boxed{\text{セ}}$ する。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ 1：1に内分　　① 1：2に内分　　② 2：1に内分
③ 1：1に外分　　④ 1：2に外分　　⑤ 2：1に外分

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

〔2〕 自然数 m，n に対して，不等式

$$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leqq 3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

を考える。

$m=2$，$n=1$ のとき，$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{ソ}}$ であり，この m，n の値の組は ④ を満たす。

$m=4$，$n=3$ のとき，$\log_2 m^3 + \log_3 n^2 = \boxed{\text{タ}}$ であり，この m，n の値の組は ④ を満たさない。

不等式 ④ を満たす自然数 m，n の組の個数を調べよう。④ は

$$\log_2 m + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\log_3 n \leqq \boxed{\text{テ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

と変形できる。

n が自然数のとき，$\log_3 n$ のとり得る最小の値は $\boxed{\text{ト}}$ であるから，⑤ により，$\log_2 m \leqq \boxed{\text{テ}}$ でなければならない。$\log_2 m \leqq \boxed{\text{テ}}$ により，$m = \boxed{\text{ナ}}$ または $m = \boxed{\text{ニ}}$ でなければならない。ただし，$\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

$m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合，⑤は，$\log_3 n \leqq \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ となり，$n^2 \leqq \boxed{\text{ノハ}}$ と変形できる。よって，$m = \boxed{\text{ナ}}$ のとき，⑤を満たす自然数 n のとり得る値の範囲は $n \leqq \boxed{\text{ヒ}}$ である。したがって，$m = \boxed{\text{ナ}}$ の場合，④を満たす自然数 m，n の組の個数は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

同様にして，$m = \boxed{\text{ニ}}$ の場合，④を満たす自然数 m，n の組の個数は $\boxed{\text{フ}}$ である。

以上のことから，④を満たす自然数 m，n の組の個数は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

第2問 （必答問題）（配点　30）

p を実数とし，$f(x)=x^3-px$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための p の条件を求めよう。$f(x)$ の導関数は，$f'(x)=\boxed{ア}x^{\boxed{イ}}-p$ である。したがって，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$\boxed{ア}a^{\boxed{イ}}-p=\boxed{ウ}$ が成り立つ。さらに，$x=a$ の前後での $f'(x)$ の符号の変化を考えることにより，p が条件 $\boxed{エ}$ を満たす場合は，$f(x)$ は必ず極値をもつことがわかる。$\boxed{エ}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $p=0$　① $p>0$　② $p \geqq 0$　③ $p<0$　④ $p \leqq 0$

(2) 関数 $f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとるとする。また，曲線 $y=f(x)$ を C とし，C 上の点 $\left(\dfrac{p}{3},\ f\left(\dfrac{p}{3}\right)\right)$ を A とする。

$f(x)$ が $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとることから，$p=\boxed{オ}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{カキ}$ で極大値をとり，$x=\boxed{ク}$ で極小値をとる。

（数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。）

曲線 C の接線で，点Aを通り傾きが0でないものを ℓ とする。ℓ の方程式を求めよう。ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ は点 $(b,\ f(b))$ における C の接線であるから，ℓ の方程式は b を用いて

$$y=\left(\boxed{\text{ケ}}\,b^2-\boxed{\text{コ}}\right)(x-b)+f(b)$$

と表すことができる。また，ℓ は点Aを通るから，方程式

$$\boxed{\text{サ}}\,b^3-\boxed{\text{シ}}\,b^2+1=0$$

を得る。この方程式を解くと，$b=\boxed{\text{ス}}$，$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるが，ℓ の傾きが0でないことから，ℓ の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}x+\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

点Aを頂点とし，原点を通る放物線を D とする。ℓ と D で囲まれた図形のうち，不等式 $x\geqq 0$ の表す領域に含まれる部分の面積 S を求めよう。D の方程式は

$$y=\boxed{\text{ニ}}\,x^2-\boxed{\text{ヌ}}\,x$$

であるから，定積分を計算することにより，$S=\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{24}$ となる。

第３問　（選択問題）（配点　20）

数列$\{a_n\}$の初項は６であり，$\{a_n\}$の階差数列は初項が９，公差が４の等差数列である。

(1)　$a_2 = \boxed{\text{アイ}}$，$a_3 = \boxed{\text{ウエ}}$である。数列$\{a_n\}$の一般項を求めよう。$\{a_n\}$の階差数列の第n項が$\boxed{\text{オ}}\,n + \boxed{\text{カ}}$であるから，数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{キ}}\,n^{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{ケ}}\,n + \boxed{\text{コ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

である。

(2)　数列$\{b_n\}$は，初項が$\dfrac{2}{5}$で，漸化式

$$b_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1} - 1}\,b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ②$$

を満たすとする。$b_2 = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$である。数列$\{b_n\}$の一般項と初項から第$n$項までの和$S_n$を求めよう。

①，②により，すべての自然数nに対して

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{タ}}}\,b_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ③$$

が成り立つことがわかる。

（数学Ⅱ・数学Ｂ第３問は次ページに続く。）

ここで

$$c_n = \left(\boxed{\text{セ}}\, n + \boxed{\text{ソ}} \right) b_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

とするとき，③を c_n と c_{n+1} を用いて変形すると，すべての自然数 n に対して

$$\left(\boxed{\text{セ}}\, n + \boxed{\text{チ}} \right) c_{n+1} = \left(\boxed{\text{セ}}\, n + \boxed{\text{ツ}} \right) c_n$$

が成り立つことがわかる。これにより

$$d_n = \left(\boxed{\text{セ}}\, n + \boxed{\text{テ}} \right) c_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

とおくと，すべての自然数 n に対して，$d_{n+1} = d_n$ が成り立つことがわかる。$d_1 = \boxed{\text{ト}}$ であるから，すべての自然数 n に対して，$d_n = \boxed{\text{ト}}$ である。したがって，④と⑤により，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\left(\boxed{\text{セ}}\, n + \boxed{\text{ソ}} \right)\left(\boxed{\text{セ}}\, n + \boxed{\text{テ}} \right)}$$

である。また

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{セ}}\, n + \boxed{\text{ソ}}} - \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{セ}}\, n + \boxed{\text{テ}}}$$

が成り立つことを利用すると，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{\boxed{\text{ヌ}}\, n}{\boxed{\text{ネ}}\, n + \boxed{\text{ノ}}}$$

であることがわかる。

第4問 （選択問題）（配点　20）

座標空間において，立方体 OABC−DEFG の頂点を

O(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 3, 0), C(0, 3, 0),

D(0, 0, 3), E(3, 0, 3), F(3, 3, 3), G(0, 3, 3)

とし，OD を 2 : 1 に内分する点を K，OA を 1 : 2 に内分する点を L とする。BF 上の点 M，FG 上の点 N および K，L の4点は同一平面上にあり，四角形 KLMN は平行四辺形であるとする。

(1) 四角形 KLMN の面積を求めよう。ベクトル $\overrightarrow{LK}$ を成分で表すと

$$\overrightarrow{LK} = \left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$$

となり，四角形 KLMN が平行四辺形であることにより，$\overrightarrow{LK} = \boxed{\text{オ}}$ である。$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $\overrightarrow{ML}$　① $\overrightarrow{LM}$　② $\overrightarrow{NM}$　③ $\overrightarrow{MN}$

ここで，M(3, 3, s)，N(t, 3, 3) と表すと，$\overrightarrow{LK} = \boxed{\text{オ}}$ であるので，$s = \boxed{\text{カ}}$，$t = \boxed{\text{キ}}$ となり，N は FG を 1 : $\boxed{\text{ク}}$ に内分することがわかる。

また，$\overrightarrow{LK}$ と $\overrightarrow{LM}$ について

$$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM} = \boxed{\text{ケ}},\quad |\overrightarrow{LK}| = \sqrt{\boxed{\text{コ}}},\quad |\overrightarrow{LM}| = \sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$$

となるので，四角形 KLMN の面積は $\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(2) 四角形KLMNを含む平面をαとし，点Oを通り平面αと垂直に交わる直線をℓ，αとℓの交点をPとする。$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$と三角錐(すい)OLMNの体積を求めよう。

P$(p,\ q,\ r)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は$\overrightarrow{\mathrm{LK}}$および$\overrightarrow{\mathrm{LM}}$と垂直であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LK}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LM}} = \boxed{\text{ソ}}$ となるので，$p = \boxed{\text{タ}}\,r$，$q = \dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\,r$

であることがわかる。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PL}}$が垂直であることにより$r = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$とな

り，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$を求めると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \frac{\boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$$

である。$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$は三角形LMNを底面とする三角錐OLMNの高さであるから，三角錐OLMNの体積は$\boxed{\text{フ}}$である。

第5問 (選択問題)(配点 20)

次の表は，あるクラスの生徒9人に対して行われた英語と数学のテスト(各20点満点)の得点をまとめたものである。ただし，テストの得点は整数値である。また，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

	英　語	数　学
生徒1	9	15
生徒2	20	20
生徒3	18	14
生徒4	18	17
生徒5	A	8
生徒6	18	C
生徒7	14	D
生徒8	15	14
生徒9	18	15
平均値	16.0	15.0
分　散	B	10.00
相関係数	0.500	

以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

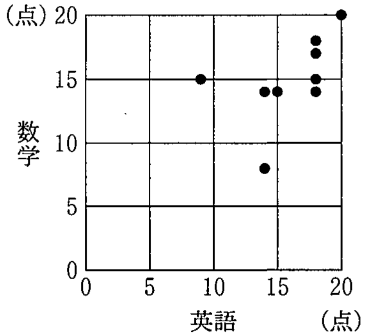
(1) 生徒5の英語の得点Aは $\boxed{\text{アイ}}$ 点であり，9人の英語の得点の分散Bの値は $\boxed{\text{ウエ}}$．$\boxed{\text{オカ}}$ である。また，9人の数学の得点の平均値が15.0点であることと，英語と数学の得点の相関係数の値が0.500であることから，生徒6の数学の得点Cと生徒7の数学の得点Dの関係式

$$C + D = \boxed{\text{キク}}$$
$$C - D = \boxed{\text{ケ}}$$

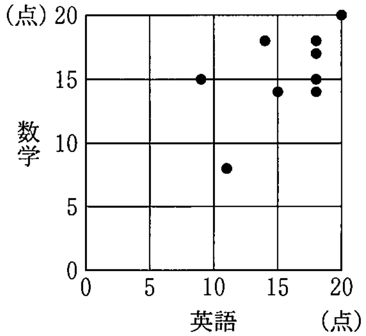
が得られる。したがって，Cは $\boxed{\text{コサ}}$ 点，Dは $\boxed{\text{シス}}$ 点である。

(2) 9人の英語と数学の得点の相関図(散布図)として適切なものは $\boxed{\text{セ}}$ である。$\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

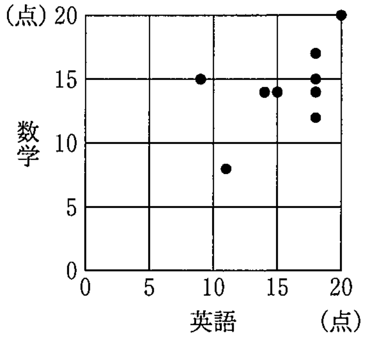
⓪



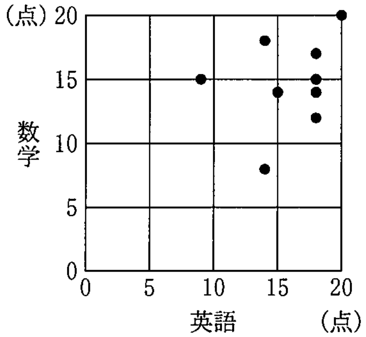
①



②



③



(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(3) 生徒10が転入したので，その生徒に対して同じテストを行った。次の表は，はじめの9人の生徒に生徒10を加えた10人の得点をまとめたものである。ただし，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

	英　語	数　学
生徒1	9	15
生徒2	20	20
生徒3	18	14
生徒4	18	17
生徒5	A	8
生徒6	18	C
生徒7	14	D
生徒8	15	14
生徒9	18	15
生徒10	6	F
平均値	E	14.0
分　散	18.00	18.00
相関係数	0.750	

10人の英語の得点の平均値Eは $\boxed{ソタ}$. $\boxed{チ}$ 点であり，生徒10の数学の得点Fは $\boxed{ツ}$ 点である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(4) 生徒10が転入した後で1人の生徒が転出した。残った9人の生徒について，英語の得点の平均値は10人の平均値と同じ $\boxed{\text{ソタ}}$. $\boxed{\text{チ}}$ 点，数学の得点の平均値は10人の平均値と同じ14.0点であった。転出したのは生徒 $\boxed{\text{テ}}$ である。また，英語について，10人の得点の分散の値を v，残った9人の得点の分散の値を v' とすると

$$\frac{v'}{v} = \boxed{\text{ト}}$$

が成り立つ。さらに，10人についての英語と数学の得点の相関係数の値を r，残った9人についての英語と数学の得点の相関係数の値を r' とすると

$$\frac{r'}{r} = \boxed{\text{ナ}}$$

が成り立つ。$\boxed{\text{ト}}$ ， $\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ -1	① 1	② $\frac{9}{10}$
③ $\left(\frac{9}{10}\right)^2$	④ $\frac{10}{9}$	⑤ $\left(\frac{10}{9}\right)^2$

第6問 （選択問題）（配点　20）

2以上の自然数Nに対して，1からNまでの自然数の積

$$N\,! = 1 \times 2 \times \cdots \times N$$

の素因数分解を考える。

(1)　$N = 6$のとき，$N\,!$の素因数分解は$6\,! = 2^{\boxed{ア}} \times 3^{\boxed{イ}} \times 5$である。$6\,!$は，素因数2を$\boxed{\;ア\;}$個，素因数3を$\boxed{\;イ\;}$個，素因数5を1個もつ。

(2)　$N\,!$がもつ素因数2の個数を求める方法について考えよう。

まず，$\dfrac{N}{2}$の整数部分をMとおく。N以下の自然数の中には，M個の偶数2，4，…，$2M$がある。その他の奇数の積をQとおくと，$N\,!$は次のように表すことができる。

$$N\,! = Q \times 2 \times 4 \times \cdots \times 2M = Q \times 2^{M} \times M\,!$$

したがって，$N\,!$は少なくともM個の素因数2をもつことがわかる。さらに，$M\,!$がもつ素因数2の個数を求めるために，$N\,!$に対する手順を$M\,!$に対して再び用いることができる。

つまり，$N\,!$がもつ素因数2の個数を求めるためには，Nから$\dfrac{N}{2}$の整数部分であるMを求め，Mを改めてNと考えて，同じ手順を用いて新しくMを求める，という手順の繰り返しを$M < 2$となるまで行えばよい。この手順の繰り返しで求められたすべてのMの和が，$N\,!$がもつ素因数2の個数である。

たとえば，$N = 13$の場合には，$\dfrac{13}{2} = 6.5$であるから，$M = 6$となる。この手順を繰り返してMを求めた結果は，NからMを求める手順を矢印(→)で表すと，次のようにまとめられる。

$$13 \to \mathbf{6} \to \mathbf{3} \to \mathbf{1}$$

太字で表された6，3，1が，この手順を繰り返して求められたMの値である。それらの和$6 + 3 + 1 = 10$が，$13\,!$のもつ素因数2の個数である。

（数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。）

この手順にしたがって，2以上の自然数Nを入力して，N！がもつ素因数2の個数を出力する〔プログラム1〕を作成した。ただし，INT(X)はXを超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム1〕

```
100 INPUT PROMPT "N=":N
110 LET D=2
120 LET C=0
130 LET M=N
140 FOR J=1 TO N
150    LET M=INT(M/D)
160    LET [ ウ ]
170    IF [ エ ] THEN GOTO 190
180 NEXT J
190 PRINT "素因数";D;"は";C;"個"
200 END
```

〔プログラム1〕の $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ C=C+1　　① C=M　　② C=C+M　　③ C=C+M+1

$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ M>=D　　① M=D　　② M<=D　　③ M<D　　④ M>D

〔プログラム1〕を実行し，変数Nに101を入力する。170行の「GOTO 190」が実行されるときの変数Jの値は $\boxed{\text{オ}}$ である。また，190行で出力される変数Cの値は $\boxed{\text{カキ}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第6問は次ページに続く。）

(3) N！がもつ素因数 2 の個数を求める方法は，他の素因数の個数についても同様に適用できる。たとえば，N！がもつ素因数 5 の個数を求める場合は，まず，$\dfrac{N}{5}$ の整数部分を M とおく。N 以下の自然数の中には M 個の 5 の倍数があるので，N！は少なくとも M 個の素因数 5 をもつ。また，これらの M 個の 5 の倍数を 5 で割った商は 1，2，…，M である。M！の中の素因数 5 の個数を求めるためには，M を N と考えて，同じ手順を繰り返せばよい。

したがって，N！がもつ素因数 5 の個数を求めるためには，〔プログラム 1〕の $\boxed{\text{クケコ}}$ 行を $\boxed{\text{サ}}$ に変更すればよい。$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ INPUT PROMPT "N=":N　　① INPUT PROMPT "C=":C
② INPUT PROMPT "M=":M　　③ LET C=5
④ LET D=5　　⑤ LET M=D

変更した〔プログラム 1〕を実行することにより，2014！は素因数 5 を $\boxed{\text{シスセ}}$ 個もつことがわかる。したがって，2014！がもつ素因数 2 の個数と素因数 5 の個数について考えることにより，2014！を 10 で割り切れる限り割り続けると，$\boxed{\text{ソタチ}}$ 回割れることがわかる。

(4) N 以下のすべての素数が，N！の素因数として含まれる。その個数は，素数 2 や素数 5 の場合と同様に求められる。N 以下のすべての素因数について，N！がもつ素因数とその個数を順に出力するように，〔プログラム 1〕を変更して〔プログラム 2〕を作成した。行番号に下線が引かれた行は，変更または追加された行である。

ただし，繰り返し処理「FOR K=A TO B～NEXT K」において，A が B より大きい場合，この繰り返し処理は実行されず次の処理に進む。

(数学Ⅱ・数学B第 6 問は次ページに続く。)

〔プログラム 2〕

```
100 INPUT PROMPT "N=":N
110 FOR D=2 TO N
111     FOR K=2 TO D-1
112         IF ツ THEN テ
113     NEXT K
120     LET C=0
130     LET M=N
140     FOR J=1 TO N
150         LET M=INT(M/D)
160         LET ウ
170         IF エ THEN GOTO 190
180     NEXT J
190     PRINT "素因数";D;"は";C;"個"
191 NEXT D
200 END
```

〔プログラム 2〕の 111 行から 113 行までの処理は，D が素数であるかどうかを判定するためのものである。 ツ ， テ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ INT(D/K)=1	① INT(D/K)>1	② D=INT(D/K)*K
③ D<>INT(D/K)*K	④ GOTO 120	⑤ GOTO 130
⑥ GOTO 180	⑦ GOTO 190	⑧ GOTO 191

〔プログラム 2〕を実行し，変数 N に 26 を入力したとき，190 行は ト 回実行される。 ト 回のうち，変数 C の値が 2 となるのは ナ 回である。