数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔1〕 O を原点とする座標平面上の 2 点 $P(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $Q(2\cos\theta + \cos 7\theta,\ 2\sin\theta + \sin 7\theta)$ を考える。ただし，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ とする。

(1) $OP = \boxed{\text{ア}}$，$PQ = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$OQ^2 = \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}(\cos 7\theta\cos\theta + \sin 7\theta\sin\theta)$$
$$= \boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}}\cos\left(\boxed{\text{オ}}\,\theta\right)$$

である。

よって，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，OQ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(2)　3点O，P，Qが一直線上にあるようなθの値を求めよう。

直線OPを表す方程式は $\boxed{\text{ク}}$ である。$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 0$　　①　$(\sin\theta)x + (\cos\theta)y = 0$

②　$(\cos\theta)x - (\sin\theta)y = 0$　　③　$(\sin\theta)x - (\cos\theta)y = 0$

このことにより，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，3点O，P，Qが一直線上にあるのは $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときであることがわかる。

(3)　∠OQPが直角となるのは $\mathrm{OQ} = \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ のときである。したがって，$\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，∠OQPが直角となるのは $\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ のときである。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 a, b を正の実数とする。連立方程式

$$(\ast)\ \begin{cases} x\sqrt{y^3} = a \\ \sqrt[3]{x}\ y = b \end{cases}$$

を満たす正の実数 x, y について考えよう。

(1) 連立方程式($\ast$)を満たす正の実数 x, y は

$$x = a^{\boxed{\text{ス}}}\, b^{\boxed{\text{セソ}}}, \quad y = a^{p}\, b^{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。ただし

$$p = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

⑵ $b = 2\sqrt[3]{a^4}$ とする。a が $a > 0$ の範囲を動くとき，連立方程式(＊)を満たす正の実数 x，y について，$x + y$ の最小値を求めよう。

$b = 2\sqrt[3]{a^4}$ であるから，(＊)を満たす正の実数 x，y は，a を用いて

$$x = 2^{\boxed{\text{セソ}}} a^{\boxed{\text{トナ}}}, \quad y = 2^{\boxed{\text{タ}}} a^{\boxed{\text{ニ}}}$$

と表される。したがって，相加平均と相乗平均の関係を利用すると，$x + y$ は $a = 2^q$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}$ をとることがわかる。ただし

$$q = \frac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

(1) 関数$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$の$x=a$における微分係数$f'(a)$を求めよう。hが0でないとき，xがaから$a+h$まで変化するときの$f(x)$の平均変化率は$\boxed{\text{ア}}+\dfrac{h}{\boxed{\text{イ}}}$である。したがって，求める微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to\boxed{\text{ウ}}}\left(\boxed{\text{ア}}+\frac{h}{\boxed{\text{イ}}}\right)=\boxed{\text{エ}}$$

である。

(2) 放物線$y=\dfrac{1}{2}x^2$をCとし，C上に点$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$をとる。ただし，$a>0$とする。点Pにおける$C$の接線$\ell$の方程式は

$$y=\boxed{\text{オ}}\,x-\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}a^2$$

である。直線ℓとx軸との交点Qの座標は$\left(\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\ 0\right)$である。点Qを通り$\ell$に垂直な直線を$m$とすると，$m$の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}x+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

直線 m と y 軸との交点をAとする。三角形APQの面積を S とおくと

$$S = \frac{a\left(a^2 + \boxed{\text{セ}}\right)}{\boxed{\text{ソ}}}$$

となる。また，y 軸と線分APおよび曲線 C によって囲まれた図形の面積を T とおくと

$$T = \frac{a\left(a^2 + \boxed{\text{タ}}\right)}{\boxed{\text{チツ}}}$$

となる。

$a > 0$ の範囲における $S - T$ の値について調べよう。

$$S - T = \frac{a\left(a^2 - \boxed{\text{テ}}\right)}{\boxed{\text{トナ}}}$$

である。$a > 0$ であるから，$S - T > 0$ となるような a のとり得る値の範囲は $a > \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$ である。また，$a > 0$ のときの $S - T$ の増減を調べると，$S - T$ は $a = \boxed{\text{ヌ}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ネノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとることがわかる。

第3問 (配点 20)

Oを原点とする座標平面において，点A$(p,\ q)$と直線$y = 2x$を考える。ただし，$q \neq 0$，$q \neq 2p$とする。x軸に関してAと対称な点をB，直線$y = 2x$に関してAと対称な点をCとし，線分BCを1：3に内分する点をDとする。

(1) 点Bの座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $(p,\ q)$　　① $(p,\ -q)$　　② $(-p,\ q)$　　③ $(-p,\ -q)$

(2) 点Cの座標を$(r,\ s)$とおくとき，rとsを，pとqを用いて表そう。

直線ACが直線$y = 2x$と垂直であるから，$s - q = \dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}(r - p)$が成り立つ。また，線分ACの中点$\left(\dfrac{p + r}{\boxed{\text{オ}}},\ \dfrac{q + s}{\boxed{\text{オ}}}\right)$は直線$y = 2x$上にある。これらのことにより

$$r = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}p + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{ク}}}q,\quad s = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}p + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{サ}}}q$$

であることがわかる。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(3) 点Dは線分BCを1：3に内分するので，(1)と(2)で求めたBとCの座標を用いると，Dの座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}p+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{セ}}}q,\ \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}p-\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{チ}}}q\right)$$

となる。これにより

$$\mathrm{OD}^2=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\mathrm{OA}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つことがわかる。

(4) ①により，AがOを中心とする半径2の円の周上にあるとき，DはOを中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ の円の周上にあることがわかる。

第4問 (配点 20)

(1) a, b を実数として, $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 5$ とする。虚数 $1 + 2i$ が方程式 $P(x) = 0$ の解であるとき, a, b の値と他の解を求めよう。

$$P(1 + 2i) = \boxed{\text{アイウ}} - \boxed{\text{エ}}\,a + b + \left(\boxed{\text{オカ}} + \boxed{\text{キ}}\,a + 2b\right)i$$

となる。$P(1 + 2i) = 0$ であるから, $a = -\boxed{\text{ク}}$, $b = \boxed{\text{ケ}}$ であり

$$P(x) = x^3 - \boxed{\text{ク}}\,x^2 + \boxed{\text{ケ}}\,x - 5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。

このとき, ① により, $P\left(\boxed{\text{コ}}\right) = 0$ であるから, 因数定理により

$$P(x) = \left(x - \boxed{\text{コ}}\right)\left(x^2 - \boxed{\text{サ}}\,x + \boxed{\text{シ}}\right)$$

が成り立つ。したがって, $P(x) = 0$ の $1 + 2i$ 以外の解は, $\boxed{\text{コ}}$ と $1 - \boxed{\text{ス}}\,i$ である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2) pを実数として，$Q(x) = x^3 + px^2 + px + 1$とする。方程式$Q(x) = 0$は，異なる三つの負の実数解$\alpha$，$\beta$，$\gamma$をもつとする。ただし，$\alpha < \beta < \gamma$とする。$\alpha$，$\beta$，$\gamma$が条件

$$(\beta - \alpha) : (\gamma - \beta) = 3 : 2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たすとき，三つの解α，β，γとpの値を求めよう。

$Q\left(-\boxed{\text{セ}}\right) = 0$であるから，因数定理により

$$Q(x) = \left(x + \boxed{\text{セ}}\right)\left\{x^2 + \left(p - \boxed{\text{ソ}}\right)x + 1\right\}$$

が成り立つ。

2次方程式

$$x^2 + \left(p - \boxed{\text{ソ}}\right)x + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

が異なる二つの負の実数解をもつときのpのとり得る値の範囲は，$p > \boxed{\text{タ}}$である。

解と係数の関係から，方程式③の解の一つは絶対値が1より大きく，他の解の絶対値は1より小さい。したがって，$\beta = -\boxed{\text{セ}}$であり，$\alpha$と$\gamma$は方程式③の解であることがわかる。解と係数の関係と条件②により

$$\alpha = -\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}},\quad \gamma = -\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}},\quad p = \frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$
である。