数学Ⅱ・数学B

問　題	選　択　方　法
第1問	必　　答
第2問	必　　答
第3問	いずれか2問を選択し，解答しなさい。
第4問	
第5問	

第1問　（必答問題）（配点　30）

〔1〕　関数 $f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$ を考える。

(1)　$f(0) = \boxed{\text{アイ}}$，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2)　2倍角の公式を用いて計算すると，$\cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる。さらに，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{キ}}\sin 2\theta - \boxed{\text{ク}}\cos 2\theta + \boxed{\text{ケ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

（数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。）

(3) θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲を動くとき，関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m とそのときの θ の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると，① は

$$f(\theta) = \boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right) + \boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって，$m = \boxed{\text{ス}}$ である。

また，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において，$f(\theta) = \boxed{\text{ス}}$ となる θ の値は，小さい順に，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$，$\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

〔2〕 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^y - 11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を満たす実数 x，y を求めよう。

真数の条件により，x，y のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{タ}}$ である。$\boxed{\text{タ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

⓪ $x > 0$，$y > 0$　　① $x > 2$，$y > 3$　　② $x > -2$，$y > -3$

③ $x < 0$，$y < 0$　　④ $x < 2$，$y < 3$　　⑤ $x < -2$，$y < -3$

底の変換公式により

$$\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。よって，② から

$$y = \boxed{\text{ツ}}\,x + \boxed{\text{テ}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

が得られる。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）

次に，$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ とおき，④ を用いて ③ を t の方程式に書き直すと

$$t^2-\boxed{\text{トナ}}\,t+\boxed{\text{ニヌ}}=0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

が得られる。また，x が $\boxed{\text{タ}}$ における x の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ネ}}<t<\boxed{\text{ノ}} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

である。

⑥ の範囲で方程式 ⑤ を解くと，$t=\boxed{\text{ハ}}$ となる。したがって，連立方程式 ②，③ を満たす実数 x，y の値は

$$x=\log_3\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}},\qquad y=\log_3\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$

であることがわかる。

第2問 （必答問題）（配点　30）

p，q を実数とし，関数 $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ は $x = -1$ で極値 2 をとるとする。また，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C，放物線 $y = -kx^2$ を D，放物線 D 上の点 $(a,\ -ka^2)$ を A とする。ただし，$k > 0$，$a > 0$ である。

(1)　関数 $f(x)$ が $x = -1$ で極値をとるので，$f'(-1) = \boxed{\text{ア}}$ である。これと $f(-1) = 2$ より，$p = \boxed{\text{イ}}$，$q = \boxed{\text{ウエ}}$ である。よって，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カキ}}$ をとる。

(2)　点Aにおける放物線 D の接線を ℓ とする。D と ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積 S を a と k を用いて表そう。

ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{クケ}}\,kax + ka^{\boxed{\text{コ}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表せる。ℓ と x 軸の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，D と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{k}{\boxed{\text{ス}}}a^{\boxed{\text{セ}}}$ である。よって，

$S = \dfrac{k}{\boxed{\text{ソタ}}}a^{\boxed{\text{セ}}}$ である。

（数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。）

(3) さらに，点Aが曲線 C 上にあり，かつ(2)の接線 ℓ が C にも接するとする。このときの(2)の S の値を求めよう。

Aが C 上にあるので，$k = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}}$ である。

ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ の方程式は b を用いて

$$y = \boxed{\text{ト}}\left(b^2 - \boxed{\text{ナ}}\right)x - \boxed{\text{ニ}}\,b^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

と表される。② の右辺を $g(x)$ とおくと

$$f(x) - g(x) = \left(x - \boxed{\text{ヌ}}\right)^2\left(x + \boxed{\text{ネ}}\,b\right)$$

と因数分解されるので，$a = -\boxed{\text{ネ}}\,b$ となる。① と ② の表す直線の傾きを比較することにより，$a^2 = \dfrac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

したがって，求める S の値は $\dfrac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ である。

第3問　（選択問題）（配点　20）

初項が3，公比が4の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。また，数列 $\{T_n\}$ は，初項が -1 であり，$\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であるような数列とする。

(1)　$S_2 = \boxed{\text{アイ}}$，$T_2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　$\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ の一般項は，それぞれ

$$S_n = \boxed{\text{エ}}^{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}$$

$$T_n = \frac{\boxed{\text{キ}}^{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}} - n - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$n-1$　　①　n　　②　$n+1$　　③　$n+2$　　④　$n+3$

（数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。）

(3) 数列$\{a_n\}$は，初項が-3であり，漸化式

$$na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする。$\{a_n\}$の一般項を求めよう。

そのために，$b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$により定められる数列$\{b_n\}$を考える。$\{b_n\}$の初項は$\boxed{\text{シス}}$である。

$\{T_n\}$は漸化式

$$T_{n+1} = \boxed{\text{セ}}\,T_n + \boxed{\text{ソ}}\,n + \boxed{\text{タ}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすから，$\{b_n\}$は漸化式

$$b_{n+1} = \boxed{\text{チ}}\,b_n + \boxed{\text{ツ}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすことがわかる。よって，$\{b_n\}$の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{テト}} \cdot \boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ニ}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{ナ}}$については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $n-1$　① n　② $n+1$　③ $n+2$　④ $n+3$

したがって，$\{T_n\}$，$\{b_n\}$の一般項から$\{a_n\}$の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ヌ}}\left(\boxed{\text{ネ}}\,n + \boxed{\text{ノ}}\right)\boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ナ}}} + \boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。

第4問 （選択問題）（配点　20）

四角形ABCDを底面とする四角錐(すい)OABCDを考える。四角形ABCDは，辺ADと辺BCが平行で，AB＝CD，∠ABC＝∠BCDを満たすとする。さらに，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として

$$|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=\sqrt{3},\quad |\vec{c}|=\sqrt{5}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=3,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

であるとする。

(1)　$\angle AOC=\boxed{アイ}°$により，三角形OACの面積は$\dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$である。

(2)　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\boxed{オカ}$，$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{\boxed{キ}}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\boxed{ク}}$であるから，$\angle ABC=\boxed{ケコサ}°$である。さらに，辺ADと辺BCが平行であるから，$\angle BAD=\angle ADC=\boxed{シス}°$である。よって，$\overrightarrow{AD}=\boxed{セ}\overrightarrow{BC}$であり

$$\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\boxed{ソ}\vec{b}+\boxed{タ}\vec{c}$$

と表される。また，四角形ABCDの面積は$\dfrac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$である。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(3) 三角形 OAC を底面とする三角錐 BOAC の体積 V を求めよう。

3 点 O，A，C の定める平面 α 上に，点 H を $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \vec{c}$ が成り立つようにとる。$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|$ は三角錐 BOAC の高さである。H は α 上の点であるから，実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\vec{a} + t\vec{c}$ の形に表される。

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \vec{a} = \boxed{\text{ト}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{ト}}$ により，$s = \boxed{\text{ナ}}$，$t = \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$

である。よって，$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ が得られる。したがって，(1)により，

$V = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ であることがわかる。

(4) (3)の V を用いると，四角錐 OABCD の体積は $\boxed{\text{フ}}$ V と表せる。さらに，四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD の高さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

第5問 （選択問題）（配点　20）

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて29ページの正規分布表を用いてもよい。

(1) ある食品を摂取したときに，血液中の物質Aの量がどのように変化するか調べたい。食品摂取前と摂取してから3時間後に，それぞれ一定量の血液に含まれる物質Aの量(単位はmg)を測定し，その変化量，すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数をXとする。Xの期待値(平均)は$E(X) = -7$，標準偏差は$\sigma(X) = 5$とする。

このとき，X^2の期待値は$E(X^2) = \boxed{\text{アイ}}$である。

また，測定単位を変更して$W = 1000X$とすると，その期待値は$E(W) = -7 \times 10^{\boxed{\text{ウ}}}$，分散は$V(W) = 5^{\boxed{\text{エ}}} \times 10^{\boxed{\text{オ}}}$となる。

（数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。）

(2) (1)のXが正規分布に従うとするとき，物質Aの量が減少しない確率$P(X \geqq 0)$を求めよう。この確率は

$$P(X \geqq 0) = P\left(\frac{X+7}{5} \geqq \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}}\right)$$

であるので，標準正規分布に従う確率変数をZとすると，正規分布表から，次のように求められる。

$$P\left(Z \geqq \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}}\right) = 0.\boxed{\text{クケ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

無作為に抽出された50人がこの食品を摂取したときに，物質Aの量が減少するか，減少しないかを考え，物質Aの量が減少しない人数を表す確率変数をMとする。Mは二項分布$B\left(50,\ 0.\boxed{\text{クケ}}\right)$に従うので，期待値は$E(M) = \boxed{\text{コ}}.\boxed{\text{サ}}$，標準偏差は$\sigma(M) = \sqrt{\boxed{\text{シ}}.\boxed{\text{ス}}}$となる。ただし，$0.\boxed{\text{クケ}}$は①で求めた小数第2位までの値とする。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

(3) (1)の食品摂取前と摂取してから3時間後に，それぞれ一定量の血液に含まれる別の物質Bの量(単位はmg)を測定し，その変化量，すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数をYとする。Yの母集団分布は母平均m，母標準偏差6をもつとする。mを推定するため，母集団から無作為に抽出された100人に対して物質Bの変化量を測定したところ，標本平均$\overline{Y}$の値は-10.2であった。

このとき，$\overline{Y}$の期待値は$E(\overline{Y})=m$，標準偏差は$\sigma(\overline{Y})=\boxed{セ}.\boxed{ソ}$である。$\overline{Y}$の分布が正規分布で近似できるとすれば，$Z=\dfrac{\overline{Y}-m}{\boxed{セ}.\boxed{ソ}}$は近似的に標準正規分布に従うとみなすことができる。

正規分布表を用いて$|Z| \leqq 1.64$となる確率を求めると$0.\boxed{タチ}$となる。このことを利用して，母平均mに対する信頼度$\boxed{タチ}$%の信頼区間，すなわち，$\boxed{タチ}$%の確率でmを含む信頼区間を求めると，$\boxed{ツ}$となる。$\boxed{ツ}$に当てはまる最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $-11.7 \leqq m \leqq -8.7$

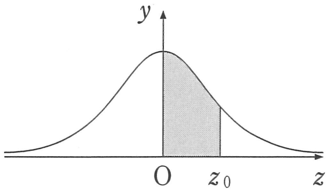
① $-11.4 \leqq m \leqq -9.0$

② $-11.2 \leqq m \leqq -9.2$

③ $-10.8 \leqq m \leqq -9.6$

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

正 規 分 布 表



次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。

z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990