平成25年度（2013年度）センター試験　数学Ⅰ　数学Ⅰ・数学A　解説

数学　①　[数学Ⅰ　数学Ⅰ・A]　（100点，60分）

数　学　Ⅰ（全問必答）

第１問（配点　25）

［１］　$A=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$，$B=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$とする。

このとき$AB=\dfrac{1}{(1+\sqrt{6})^2-ア}=\dfrac{\sqrt{6}-イ}{ウ}$であり，

また$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=エ+オ\sqrt{6}$である。

以上により$A+B=\dfrac{カ-\sqrt{6}}{キ}$となる。

［２］ aを定数とし，二つの不等式

$|2x+13|\geqq 3$　①

$x^2-2ax+2a^2+10a+15\leqq 0$　②

を考える。

下のタには，次の⓪～③のうちから当てはまるものを一つ選べ。

⓪　＞　　①　＜　　②　≧　　③　≦

不等式①の解は

$x\leqq$クケ，コサ$\leqq x$

であり，これと次の2次不等式

x^2+シス$x+$セソ　タ　0

の解は一致する。

次に，不等式②を満たす実数xが存在するようなaの値の範囲は

チツ$-\sqrt{テト}\leqq a\leqq$チツ$+\sqrt{テト}$

であり，この範囲にある最小の整数はナニである。

$a=$ナニのとき，二つの不等式①と②をともに満たすxの値の範囲は

マネ$\leqq x\leqq$ノハ

である。

＜解説＞

［１］ ア３　イ２　ウ４　エ２　オ２　カ４　キ２

$$AB=\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\times\frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-3}=\frac{1}{1+6+2\sqrt{6}-3}=\frac{1}{4+2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-2}{2(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}=\frac{\sqrt{6}-2}{4}$$

$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=\dfrac{A+B}{AB}=(1+\sqrt{3}+\sqrt{6})+(1-\sqrt{3}+\sqrt{6})=2+2\sqrt{6}$

以上により$A+B=(2+2\sqrt{6})AB=\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-2)=\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}$

［2］ クケ -8　コサ -5　シス 13　セソ 40　タ ②　チツ -5　テト 10　ナニ -8　ヌネ -9
ノハ -8

不等式①の絶対値記号を外す。$2x+13\geqq 3$または$2x+13\leqq -3$,
したがって，$x\leqq -8$，$-5\leqq x$，であり，これと次の2次不等式
$(x+5)(x+8)=x^2+13x+40\geqq 0$
の解は一致する。

②の不等式 $x^2-2ax+2a^2+10a+15=(x-a)^2+a^2+10a+15\leqq 0$
を満たす実数xが存在するためには，$a^2+10a+15\leqq 0$ が必要である。

したがって，$-5-\sqrt{10}\leqq a\leqq -5+\sqrt{10}$

この範囲にある最小の整数は-8である。

$a=-8$のとき②の不等式は，$(x+8)^2-1\leqq 0$だから，$-9\leqq x\leqq -7$

①を考慮して，$-9\leqq x\leqq -8$

コメント：［1］は無理数の分数の計算である。スムーズに解けるようでありたい。［2］は1次式と2次式の不等式の問題で，式の変形や因数分解をスムーズに行えること。

第2問（配点 25）

座標平面上にある点Pは，点A$(-8,8)$から出発して，直線$y=-x$上をx座標が1秒あたり2増加するように一定の速さで動く。また，同じ座標平面上にある点Qは，点PがAを出発すると同時に原点Oから出発して，直線$y=10x$上をx座標が1秒あたり1増加するように一定の速さで動く。出発してからt秒後の2点P，Qを考える。点PがOに到達するのは$t=$アのときである。以下，$0<t<$アで考える。

(1)　点Pとx座標が等しいx軸上の点をP’，点Qとx座標が等しいx軸上の点をQ’とおく。△OPP’と△OQQ’の面積の和Sをtで表せば

$S=$イt^2-ウエ$t+$オカ

となる。これより$0<t<$アにおいては，$t=\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$で$S$は最小値$\dfrac{\text{ケコサ}}{\text{シ}}$をとる。

次に，aを$0<a<$ア-1を満たす定数とする。以下，$a\leqq t\leqq a+1$におけるSの最小・最大について考える。

（i）　Sが$t=\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$で最小となるような$a$の値の範囲は

$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}\leqq a\leqq \dfrac{\text{ソ}}{\text{タ}}$である。

（ii） S が $t=a$ で最大となるような a の値の範囲は $0<a\leqq\dfrac{チ}{ツテ}$ である。

(2) 3点O，P，Qを通る2次関数のグラフが関数 $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものになるのは，

$t=\dfrac{ト}{ナ}$ のときであり，x軸方向に $\dfrac{ニヌ}{ネ}$，y軸方向に $\dfrac{ノハヒ}{フ}$ だけ平行移動すればよい。

<解説>

ア 4

(1) イ 7　ウエ 16　オカ 32　キ 8　ク 7　ケコサ 160　シ 7　ス 1　セ 7　ソ 8　タ 7　チ 9　ツテ 14

図 1 を参照する。

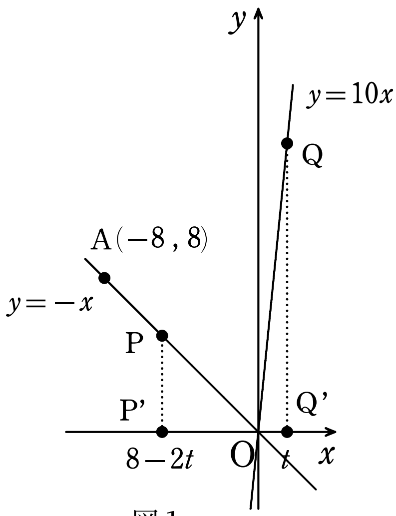

図 1

△OPP' の面積 $=\dfrac{1}{2}(8-2t)^2$，△OQQ' の面積 $=5t^2$

したがって，$S=\dfrac{1}{2}(8-2t)^2+5t^2=7t^2-16t+32$

$$=7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2-\frac{64}{7}+32=7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2+\frac{160}{7}$$

したがって，S は $t=\dfrac{8}{7}$ で最小値 $\dfrac{160}{7}$ をとる。

（i） S が $t=\dfrac{8}{7}$ で最小となるような a の範囲は

$0<a<4-1=3$，$a\leqq t\leqq a+1$ だから，$t=\dfrac{8}{7}$ であれば，

$\dfrac{1}{7}\leqq a\leqq\dfrac{8}{7}$

（ii） $S(t)$ において，$S(a)$ が最大であるためには，$a\leqq t\leqq a+1$ だから，$S(a+1)\leqq S(a)$

したがって，$7(a+1)^2-16(a+1)+32\leqq 7a^2-16a+32$，$a\leqq\dfrac{9}{14}$

(2) ト 5　ナ 2　ニヌ −5　ネ 4　ノハヒ −25　フ 8

$y=2x^2$ のグラフを平行移動した2次関数を $y=2(x-p)^2+q$ とおく。

これが点 $\mathrm{O}(0\,,0)$，$\mathrm{P}(-8+2t\,,8-2t)$，$\mathrm{Q}(t\,,10t)$ を通るのだから，

$0=2p^2+q$　①，$8-2t=2(-8+2t-p)^2+q$　②，$10t=2(t-p)^2+q$　③

①，②，③を解くと，$t=\dfrac{5}{2}$，$p=-\dfrac{5}{4}$，$q=\dfrac{-25}{8}$ を得る。

コメント：図を描いて考える。S を求めるのは容易であろう。2次関数の最小値を求める常套的方法を用いる。(ii)では，下に凸の2次式の最大値は変数の両端のいずれかである。$a\leqq t\leqq a+1$ だから，S は $t=a$ か $a+1$ かいずれかで最大値をとる。

(2)では，$y=2x^2$ のグラフを平行移動した2次関数を $y=2(x-p)^2+q$ とおくのがポイントである。x 方向に p，y 方向に q 平行移動した2次関数を示している。

第3問（配点　30）

△ABCにおいて，AB=6，BC=$2\sqrt{7}$，CA=4とする。∠Aの二等分線と辺BCとの交点をD，∠Aの二等分線と△ABCの外接円との点Aと異なる交点をEとする。辺ACの延長と，2点B，Eを通る直線の交点をPとする。

(1)　cos∠ABC=$\dfrac{ア\sqrt{イ}}{ウ}$である。また，cos∠BAC=$\dfrac{エ}{オ}$であるから，∠BAC=カキ°である。

(2)　点Eから辺BCに引いた垂線と辺BCとの交点をHとすると，

∠ECH＝クケ°，∠EBH＝コサ°であるから，HC=$\sqrt{シ}$である。

したがって，CE=$\dfrac{ス\sqrt{セソ}}{タ}$である。

(3)　△ABPにおいて

∠APB=180°－∠BAP－(∠CBP＋∠ABC)=チツ°－∠ABCである。

したがって，sin∠APB=$\dfrac{テ\sqrt{ト}}{ナ}$である。

(4)　△ECPにおいて，sin∠CEP=$\dfrac{\sqrt{ニ}}{ヌ}$であるから，CP=$\dfrac{ネ}{ノ}$である。

<解説>

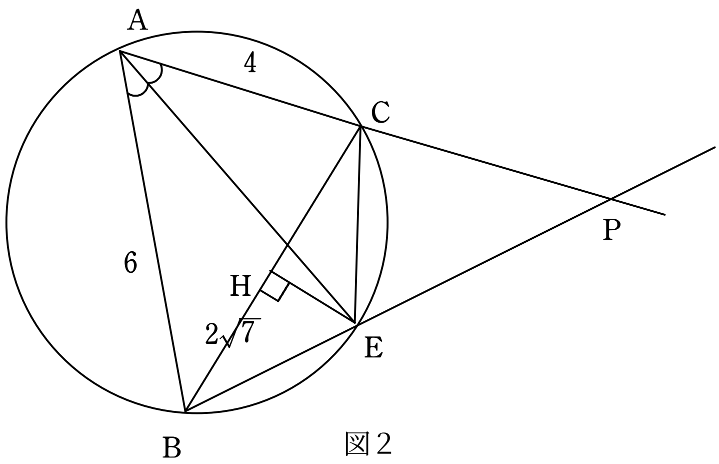

図2

(1)　ア2　イ7　ウ7　エ1　オ2　カキ60

図2を参照する。

余弦定理によって，cos∠ABC=$\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{6^2+(2\sqrt{7})^2-16}{2\times6\times2\sqrt{7}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

cos∠BAC=$\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{6^2+16-(2\sqrt{7})^2}{2\times6\times4}=\dfrac{24}{48}=\dfrac{1}{2}$

したがって，∠BAC=60°

(2)　クケ30　コサ30　シ7　ス2　セソ21　タ3

∠BAE=$\dfrac{1}{2}$∠BAC=30°だから，同じ弧BEに立つ円周角として，∠ECH＝∠BAE=30°,

一方$\angle \mathrm{EAC}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{BAC}=30^\circ$だから，同じ弧CEに立つ円周角として，$\angle \mathrm{EBH}=\angle \mathrm{EAC}=30^\circ$

$\triangle \mathrm{BEC}$は2等辺三角形だから，$\mathrm{BH}=\mathrm{HC}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=\sqrt{7}$

したがって，$\mathrm{CE}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{HC}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\sqrt{7}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

(3)　チツ 90　テ 2　ト 7　ナ 7

$\angle \mathrm{APB}=180^\circ-\angle \mathrm{BAP}-(\angle \mathrm{CBP}+\angle \mathrm{ABC})=180^\circ-60^\circ-(30^\circ+\angle \mathrm{ABC})$

$=90^\circ-\angle \mathrm{ABC}$である。

したがって，$\sin\angle \mathrm{APB}=\sin(90^\circ-\angle \mathrm{ABC})=\cos\angle \mathrm{ABC}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$である。

(4)　ニ 3　ヌ 2　ネ 7　ノ 2

正弦定理により，$\frac{CP}{\sin\angle CEP}=\frac{CE}{\sin\angle CPE}$

$\angle \mathrm{CEP}=\angle \mathrm{BAC}=60^\circ$，$\sin\angle \mathrm{CEP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\angle \mathrm{CPE}=\sin\angle \mathrm{APB}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$であるから，

$\mathrm{CP}=\sin\angle \mathrm{CEP}\times\frac{CE}{\sin\angle CPE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{21}}{3}\times\frac{7}{2\sqrt{7}}=\frac{7}{2}$

コメント：図を描いて考える。外接円は先に円を描いてから三角形を描いた方が容易だろう。三角形の三辺の長さが与えられているのだから，(1)は余弦定理とピーンとくるようでありたい。(2)は同じ弧に立つ円周角は等しいことを利用する。(3)は三角関数の加法定理が基礎になる。(4)では，正弦定理，$\angle \mathrm{CEP}=\angle \mathrm{BAC}=60^\circ$がポイントである。

この問題は余弦定理、正弦定理、円周角，円に内接する四角形の関係，など図形の基本的事項の知識と応用を問う。

第４問（配点 20）

a，bは$a>0$，$b\leqq0$である定数とし，tの2次方程式

$t^2+4at+b=0$　①

を考える。方程式①を$(t+$ア$a)^2=$イa^2-bと書き直す。

$b\leqq0$であるから，方程式①の実数解は

$t=$ウエ$a\pm\sqrt{\text{オ}a^2-b}$

である。

方程式①と同じa，bに対して，xの方程式

$(x-2)^2+4a|x-2|+b=0$　②

を考える。

(1)　$b=0$の場合，方程式①の解は$t=$カ，キクaである。このとき，方程式②の実数解の個数はケ個である。

(2)　$b<0$の場合，方程式①の0以上である実数解は

$$t=ウエa+\sqrt{オa^2-b}$$

である。このとき，方程式②の実数解の個数はコ個である。

<解説>

ア 2　イ 4　ウエ −2　オ 4

$t^2+4at+b=(t+2a)^2-4a^2+b=0$，したがって$(t+2a)^2=4a^2-b$

$b \leqq 0$だから，$4a^2-b \geqq 0$なので，①の実数解は$t=-2a \pm \sqrt{4a^2-b}$　③

(1)　カ 0　キク −4　ケ 1

$b=0$のとき，方程式①の解である③は，$t=0$，$-4a$となる。このとき，方程式②の実数解は

$x=2$である。なぜなら，$a>0$，$(x-2)^2 \geqq 0$，$4a|x-2| \geqq 0$だから，$(x-2)^2+4a|x-2| \geqq 0$

$(x-2)^2+4a|x-2|=0$となるのは，$x=2$のときである。

(2)　コ 2

$b<0$の場合，方程式①の0以上の解は③により，$t=-2a+\sqrt{4a^2-b}$である。

$p=x-2$とおく。すると，②の方程式は，$p \geqq 0$のとき，$p^2+4ap+b=0$，$p=-2a \pm \sqrt{4a^2-b}$

$p \geqq 0$の実数解は$p=-2a+\sqrt{4a^2-b}$，したがって，$x=2-2a+\sqrt{4a^2-b}$

$p<0$のとき，②の方程式は，$p^2-4ap+b=0$，$p=2a \pm \sqrt{4a^2-b}$

$p<0$の実数解は$p=2a-\sqrt{4a^2-b}$，したがって，$x=2+2a-\sqrt{4a^2-b}$

以上によって，方程式②の実数解の個数は2個である。

コメント：2次方程式の解法の問題。ア～オは解を得るための常套的な式の変形だから，すらすら解けるようでありたい。(1)は②の方程式の解の個数を問う。

$x>2$では，②は　$(x-2)^2+4a|x-2|=0$，$(x-2)+4a=0$，$x=2-4a<2$となり矛盾

$x<2$では，②は　$(x-2)^2+4a|x-2|=0$，$2-x-4a=0$，$x=2-4a<2$となり矛盾

したがって，②の実数解の個数は$x=2$の1個だけである。

(2)では，$p=x-2$とおいて，pの実数解を考えるのがポイントである。xの実数解の個数はpの実数解の個数と同じである。xの方程式として考えると，実数解の条件が煩瑣になる。

<総評>

受験者の学力を問うためには，難易と分野をバランス良く配して，程よく得点がばらつくように試験問題を構成しなければならない。そんな出題者の苦労が偲ばれる。

第１問　[1]　無理数の分数の変形の問題。難易度はＣ。

[2]　1次，2次関数の不等式の問題。難易度はＢ。

第２問　図形の面積を2次関数で表し，最小値，最大値を求める問題。

[1]　2次関数の最小値を求める。常套的方法によるものだから，すらすら解きたい。
下に凸の2次関数では変数の両端のどちらかで最大値となる。難易度Ｂ−。

[2]　2次関数のグラフの平行移動の表式は理解していなければならない。難易度はＢ。

第３問　三角関数とその応用，円周角など図形の基本知識と応用を問う問題。難易度はＢ。

第４問　2次方程式の問題。難易度はＣ，(1)はＣ＋，(2)はＢ

数学Ⅰ・数学Ａ（全問必答）

第１問（配点　20）

[１]　数学Ⅰ第１問[１]に同じ

[２]　三角形に関する条件p，q，rを次のように定める。

p：三つの内角がすべて異なる

q：直角三角形でない

r：45°の内角は一つもない

条件pの否定を$\overline{p}$で表し，同様に$\overline{q}$，$\overline{r}$はそれぞれ条件q，rの否定を表すものとする。

(1)　命題「$r \Longrightarrow$（pまたはq）」の対偶は「ク $\Longrightarrow \overline{r}$」である。

クに当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　（pかつq）　①　（$\overline{p}$かつ$\overline{q}$）

②　（$\overline{p}$またはq）　③　（$\overline{p}$または$\overline{q}$）

(2)　次の⓪～④のうち，命題「（pまたはq）$\Longrightarrow$ r」に対する反例となっている三角形はケとコである。

ケとコに当てはまるものを，⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，ケとコの解答の順序は問わない。

⓪　直角二等辺三角形

①　内角が30°，45°，105°の三角形

②　正三角形

③　三辺の長さが3，4，5の三角形

④　頂角が45°の二等辺三角形

(3)　rは（pまたはq）であるためのサ。

サに当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　必要十分条件である。

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

＜解説＞

(1)　ク ①

二つの条件a，bとその否定$\overline{a}$，$\overline{b}$には，4個の命題が存在する。教科書に掲載されている。

命題$a \Longrightarrow b$の対偶は命題$\overline{b} \Longrightarrow \overline{a}$である。すると，命題「$r \Longrightarrow$（$p$または$q$）」の対偶は命題「（$p$または$q$）でない$\Longrightarrow \overline{r}$」である。条件「（$p$または$q$）でない」ということは，「$p$でも$q$でもない」ということだから「（$\overline{p}$かつ$\overline{q}$）」である。

⑵　ケ ①　コ ④

命題「（pまたはq）$\Longrightarrow$ r」は「（三つの内角がすべて異なる）あるいは（直角三角形でない）ならば（45°の内角は一つもない）」ということである。これの反例を探す。

⓪は直角三角形だから反例にならない。①は「（三つの内角がすべて異なる）あるいは（直角三角形でない）」を満たす。しかるに，一つの内角が45°であるから，反例である。

②は45°の内角をもたないから反例ではない。③も45°の内角をもたないから反例ではない。なぜなら，三辺の長さが3，4，5の三角形は直角三角形だから，もし45°の内角をもてば，直角二等辺三角形になるが，そうではないからである。

④は「（三つの内角がすべて異なる）あるいは（直角三角形でない）」を満たす。しかるに，一つの内角が45°であるから，反例である。

⑶　サ ②

⑵で命題「（pまたはq）$\Longrightarrow r$」には反例があった。したがって，rは（pまたはq）であるための必要条件ではない。

それでは，「r：45°の内角は一つもない」であれば「（p：三つの内角がすべて異なる）または（q：直角三角形でない）」かどうか。これはやや難しい。

次のように考えると良い。この命題の対偶が成立すれば，この命題も成立することを学んだはずだ。対偶は「（$\overline{p}$：三つの内角がすべて異なるわけではない）かつ（$\overline{q}$：直角三角形である）」すなわち「（$\overline{p}$かつ$\overline{q}$：直角2等辺三角形である）」である。すると，「$\overline{r}$：45°の内角は少なくも一つある」が成立する。すなわち，命題「$r \Longrightarrow$（pまたはq）」が成立する。したがって，rは（pまたはq）であるための十分条件である。

コメント：命題と条件に関する問題。決して難しい命題を上げているわけではない。しかし，センター試験という時間の限られた緊張した環境下では，間違え易いかも知れない。教科書に記載されている基本事項を理解し（特に対偶の命題の関係），いくつかの例題をこなして，命題と条件の問題を扱う感覚を身につけておくことが迅速な対応につながるだろう。

第２問（配点　25）

数学Ⅰ第２問に同じ

第３問（配点　30）

点Oを中心とする半径3の円Oと，点Oを通り，点Pを中心とする半径1の円Pを考える。円Pの点Oにおける接線と円Oとの交点をA，Bとする。また，円Oの周上に，点Bと異なる点Cを，弦ACが円Pに接するようにとる。弦ACと円Pの接点をDとする。このとき

$\mathrm{AP}=\sqrt{\text{アイ}}$，$\mathrm{OD}=\dfrac{\text{ウ}\sqrt{\text{エオ}}}{\text{カ}}$である。さらに，$\cos\angle\mathrm{OAD}=\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$であり，

$\mathrm{AC}=\dfrac{\text{ケコ}}{\text{サ}}$である。△ABCの面積は$\dfrac{\text{シスセ}}{\text{ソタ}}$であり，△ABCの内接円の半径は$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$である。

(1)　円Oの周上に，点Eを線分CEが円Oの直径となるようにとる。△ABCの内接円の中心をQとし，△CEAの内接円の中心をRとする。このとき，

$\mathrm{QR}=\dfrac{\text{テト}}{\text{ナ}}$である。したがって，内接円Qと内接円Rはニ。

ニに当てはまるものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　内接する　　①　異なる2点で交わる

②　外接する　　③　共有点を持たない

(2)　$\mathrm{AQ}=\dfrac{\text{ヌ}\sqrt{\text{ネノ}}}{\text{ハ}}$であるから，$\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{\text{ヒフ}}}{\text{ヘ}}$となる。　したがって，ホ。

ホに当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　点Pは内接円Qの周上にある

①　点Qは円Pの周上にある

②　点Pは内接円Qの内部にあり，点Qは円Pの内部にある

③　点Pは内接円Qの内部にあり，点Qは円Pの外部にある

＜解説＞

アイ 10　ウ 3　エオ 10　カ 5　キ 4　ク 5　ケコ 24　サ 5

シスセ 216　ソタ 25　チ 6　ツ 5

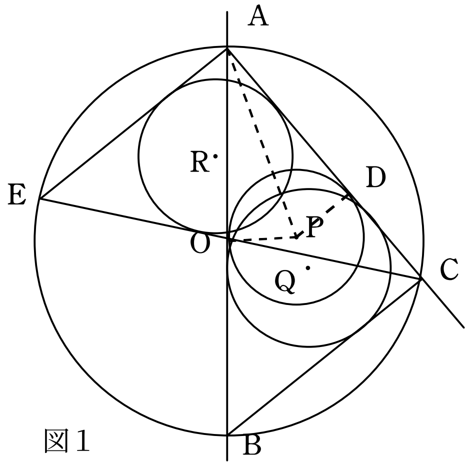

図１

図１を参照して考える。

OAは円Pの接線だから，△OAPは直角三角形。

$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OP}=1$だから，$\mathrm{AP}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

APとODは直交するから，

AP×OD＝四辺形AOPDの面積×2

＝(△AOPの面積＋△APDの面積)×2

＝(AO×OP＋AD×PD)＝6。

したがって，$\mathrm{OD}=\dfrac{6}{AP}=\dfrac{6}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$である。

$\cos\angle\mathrm{OAD}=\cos 2\angle\mathrm{OAP}=2(\cos\angle\mathrm{OAP})^2-1=2\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2-1=\dfrac{4}{5}$

$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{OAD}=6\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{5}$

$\sin\angle\mathrm{OAD}=2\sin\angle\mathrm{OAP}\cos\angle\mathrm{OAP}=2\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3}{5}$

したがって$\mathrm{BC}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{OAD}=6\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}$

したがって△ABCの面積は$\frac{1}{2}$AC×BC$=\frac{1}{2}\times\frac{24}{5}\times\frac{18}{5}=\frac{216}{25}$

△ABCの内接円の半径＝2×△ABCの面積÷(AB＋BC＋AC)$=2\times\frac{216}{25}\div(6+\frac{24}{5}+\frac{18}{5})=\frac{6}{5}$

(1)　テト 12　ナ 5　ニ ②

内接円Q，Rとも辺AC に接する。内接円QとRの半径は同じ$\frac{6}{5}$だから，QR∥AC。したがって

QR＝AC−（内接円Qの半径＋内接円Rの半径）$=\frac{24}{5}-\frac{6}{5}\times2=\frac{12}{5}$

したがって，QR＝（内接円Qの半径＋内接円Rの半径）だから，円QとRは外接する。

(2)　ヌ 6　ネノ 10　ハ 5　ヒフ 10　ヘ 5　ホ ②

点P，Qは∠BACの2等分線上にあるから，AP：AQ$=\sqrt{10}$：AQ$=1:\frac{6}{5}$

したがって，AQ$=\frac{6}{5}\sqrt{10}$

PQ＝AQ−AP$=\frac{6}{5}\sqrt{10}-\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

PQ$=\frac{\sqrt{10}}{5}\fallingdotseq0.62<1$だから，点Pは内接円Qの内部にあり，点Qは円Pの内部にある。

コメント：図をていねいに描いて，対象とする図形の特徴を把握する。円の中心と接点とを結ぶ直線は接線に垂直であること，三角形の両辺に内接する円の中心は内角の2等分線上にあること，などの基礎知識をスムーズに活用する。

(1)では△ABCと△CEAが合同の直角三角形であることに気づくこと。すると，内接円の直径は等しいから，両円の中心を結ぶ直線は辺ACに平行になることに気づく。

(2)ではAP，AQが同一の線であることに気づくこと。

第４問（配点 25）

(1)　1から4 までの数字を，重複を許して並べてできる4 桁の自然数は，全部でアイウ個ある。

(2)　(1)のアイウ個の自然数のうちで，1から4までの数字を重複なく使ってできるものはエオ個ある。

(3)　(1)のアイウ個の自然数のうちで，1331のように，異なる二つの数字を2 回ずつ使ってできるものの個数を，次の考え方に従って求めよう。

(ⅰ)　1から4までの数字から異なる二つを選ぶ。この選び方はカ通りある。

(ⅱ)　(ⅰ)で選んだ数字のうち小さい方を，一・十・百・千の位のうち，どの2 箇所に置くか決める。置く2 箇所の決め方はキ通りある。小さい方の数字を置く場所を決めると，大きい方の数字を置く場所は残りの2箇所に決まる。

(ⅲ)　(ⅰ)と(ⅱ)より，求める個数はクケ個である。

(4)　(1)のアイウ個の自然数を，それぞれ別々のカードに書く。できたアイウ枚のカードから1枚引き，

それに書かれた数の四つの数字に応じて，得点を次のように定める。

- 四つとも同じ数字のとき　9 点
- 2 回現れる数字が二つあるとき　3 点
- 3 回現れる数字が一つと，
1 回だけ現れる数字が一つあるとき　2 点
- 2 回現れる数字が一つと
1 回だけ現れる数字が二つあるとき　1 点
- 数字の重複がないとき　0 点

(ⅰ) 得点が9 点となる確率は$\dfrac{コ}{サシ}$，得点が3 点となる確率は$\dfrac{ス}{セソ}$である。

(ⅱ) 得点が2 点となる確率は$\dfrac{タ}{チツ}$，得点が1 点となる確率は$\dfrac{テ}{トナ}$である。

(ⅲ) 得点の期待値は$\dfrac{ニ}{ヌ}$点である。

＜解説＞

(1) アイウ 256

重複を許すのだから，各桁で4つの数字を選ぶことができる。したがって，できる4 桁の自然数は $4\times4\times4\times4=4^4=256$ 個ある。

(2) エオ 24

重複を許さないのだから，$4\times3\times2\times1=4!=24$ 個ある。

(3) カ 6　キ 6　クケ 36

(ⅰ) 異なる4個の数字から異なる二つを選ぶのだから，${}_4C_2=6$ 通りの選び方がある。

(ⅱ) 四つの位から二つの位を選ぶ選び方は，${}_4C_2=6$ 通りある。

(ⅲ) (ⅰ)，(ⅱ)の結果，異なる二つの数字を2 回ずつ使ってできる数字の個数は，$6\times6=36$通りある。

(4) コ 1　サシ 64　ス 9　セソ 64　タ 3　チツ 16　テ 9　トナ 16　ニ 3　ヌ 2

(ⅰ) 四つとも同じ数字となる場合は4 通りだから，得点が9 点となる確率は$\dfrac{4}{256}=\dfrac{1}{64}$

2 回現れる数字が二つある場合は，(3)の結果により，36 通りである。したがって，得点が3 点となる確率は$\dfrac{36}{256}=\dfrac{9}{64}$である。

(ⅱ) 3 回現れる数字を一つ選ぶ場合の数が4 通り，残り一つを選ぶ場合の数が3 通り，この一つを置く位の数が4 通りある。したがって，3 回現れる数字が一つと，1 回だけ現れる数字が一つある数の場合は，$4\times4\times3=48$ 通り。したがって，得点が2点となる確率は$\dfrac{48}{256}=\dfrac{3}{16}$である。

2 回現れる数字の選び方は4 通り，これを4 桁の位のうち二つの位に置く置きかたは${}_4C_2=6$ 通り，残り3 個の数字から異なる数字の選び方が${}_3C_2=3$ 通り，これを二つの位に置く置きかたは2 通りとなる。したがって，2 回現れる数字が一つと，1 回だけ現れる数字が二つある数の場合は，以上をまとめて，$4\times6\times3\times2=144$ 通りとなる。

したがって，得点が1点となる確率は$\frac{144}{256}=\frac{9}{16}$である。

数字の重複がない場合は(2)のように，24通り。

上記の場合の数を全て加算すると，$4+36+48+144+24=256$通りとなって，当然ながら(1)と一致する。

(iii) 得点の期待値は，（場合に与えられた得点）×（場合の発生する確率）を対象とする場合について加算したものである。

したがって，得点の期待値は，$9\times\frac{1}{64}+3\times\frac{9}{64}+2\times\frac{3}{16}+1\times\frac{9}{16}=\frac{3}{2}$

コメント：確率の問題は落ち着いて問題文を読み，全体として何を問うものなのか，全容を把握することが大事だ。短時間での解答を求められているが，的確な考え方の筋道（論理の展開）が求められるからだ。(4)では，(1)，(2)，(3)の結果を利用する。ある条件を満たす場合が発生する確率は，$\frac{\text{条件を満たす場合の数}}{\text{発生する場合の総数}}$である。

<総評>

問題の分野構成は例年とほぼ同じである。難易に関しては，確率の問題，条件と命題の問題が昨年より少々難しくなったかも知れない。

センター試験は学力を計るものだから，適切な表現ではないかも知れないが，センター試験は「学力を試験の得点という結果によって判断する」ものである。すると，得点が適切にバラツクように，問題を構成しなければならない。このことは，選抜のためのさまざまな試験に共通する課題である。

したがって，学力を判断できるように，問題の難易，分野，分量などの構成によって得点のバラツキを実現する。特に問題の分量は，試験時間という制約があるので，最も容易に得点のバラツキを生むものとなる。問題の分量は，単純に問いの数に限らず，問題文の長さをも含むであろう。問題文を迅速に的確に読み込み，全体として問題がどのように構成され，何が問われているかを判断することが非常に重要となる事を改めて強調したい。

第１問 [1] 数学Ｉの第１問[1]に同じ。

[2] 三角形に関する条件と命題に関する論理問題。(3)を除き難易度はＢ。(3)は対偶での真偽から，命題の真偽を判断するが，迅速で的確な国語表現を必要とするので，難易度はＡ。

第２問 数学Ｉの第２問に同じ。

第３問 三角形と内接円，外接円に関する図形の問題。難易度Ｂ－。

第４問 組み合わせによる場合の数と確率の問題。昨年の確率の問題が易しかったので，やや難しくなったような気がする。難易度Ｂ。

130210