令和2年度（2020年度）センター試験　数学Ⅰ　数学Ⅰ･数学A　解説

数学　①　[数学Ⅰ　数学Ⅰ･数学A]　（いずれか選択　100点，60分）

数　学　Ⅰ（全問必答）

第１問（配点　25）

＜解答＞

［１］ アイ -2　ウ 4　エ 0　オ 4　カキ -2　ク 5　ケ 3　コ 6　サシ 13　スセ -1　ソ 2

タチツ -14　テト 13

［２］ ナ 2　ニ 5　ヌネ 12　ノ 4　ハ 3

＜解説＞

［１］

aを定数とする。

(1)

直線l：$y=(a^2-2a-8)x+a$の傾きが負となるのは，$a^2-2a-8=(a-4)(a+2)<0$によって，

aの範囲が　アイ＝ $-2<a<4$ ＝ウ　のときである。

(2)

$a^2-2a-8\fallingdotseq 0$とし，(1)の直線lとx軸の交点のx座標をbとする。

$(a^2-2a-8)b+a=0$だから，$b=\dfrac{-a}{a^2-2a-8}$

$a>0$の場合，$b>0$となるのは

$b=\dfrac{-a}{a^2-2a-8}>0$，$\therefore\ a^2-2a-8=(a-4)(a+2)<0$，$\therefore$ エ$=0<a<4=$オ

$a\leqq 0$の場合，$b>0$となるのは

$b=\dfrac{-a}{a^2-2a-8}>0$，$\therefore\ a^2-2a-8=(a-4)(a+2)>0$，$\therefore\ a<-2=$カキ

また，$a=\sqrt{3}$のとき

$$b=\frac{-a}{a^2-2a-8}=\frac{-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}-8}=\frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{(5-2\sqrt{3})\sqrt{3}}{(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}=\frac{5\sqrt{3}-6}{13}=\frac{\text{ク}\sqrt{\text{ケ}}-\text{コ}}{\text{サシ}}$$

(3)

$f(x)=(a^2-2a-8)x+a$とおく。

$a<0$ かつ $|f(1)+f(-1)|=|a^2-a-8+(-a^2+2a+8)+a|=|2a|=1$を満たす a の値は

$a=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{\text{スセ}}{\text{ソ}}$。また，このとき$-2\leqq x\leqq 2$における$f(x)$のとり得る値の範囲は

$f(x)=(a^2-2a-8)x+a=\left(\dfrac{1}{4}+1-8\right)x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-27}{4}x-\dfrac{1}{2}$だから，

$f(-2)=\dfrac{27}{2}-\dfrac{1}{2}=13$，$f(2)=\dfrac{-27}{2}-\dfrac{1}{2}=-14$，$\therefore$ タチツ$=-14\leqq f(x)\leqq=13$テト

コメント：

直線の傾きが2次式になるので，2次方程式，2次不等式の取り扱いに関する問題。特段，難しい考察が必要ではないが，正負などミスが誘発されやすいので，注意しよう。

［2］

自然数に関する３つの条件p，q，rを次のように定める。

p：nは4 の倍数である。

q：nは6 の倍数である。

r：nは24 の倍数である。

条件p，q，rの否定をそれぞれ$\overline{p}$，$\overline{q}$，$\overline{r}$で表す。

条件pを満たす自然数全体の集合をPとし，条件qを満たす自然数全体の集合をQとし，条件rを満たす自然数全体の集合をRとする。自然数全体の集合を全体集合とし，集合P，Q，Rの補集合をそれぞれ$\overline{P}$，$\overline{Q}$，$\overline{R}$で表す。

(1)

次の ナ，ニ に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

32は4の倍数であり，6の倍数ではないから，$32 \in P \cap \overline{Q} =$ ナ②

50は4の倍数でなく，6の倍数でなく，24の倍数でない。したがって，$50 \in \overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R} =$ ニ⑤

⓪　$P \cap Q \cap R$　　①　$P \cap Q \cap \overline{R}$　　②　$P \cap \overline{Q}$

③　$\overline{P} \cap Q$　　④　$\overline{P} \cap \overline{Q} \cap R$　　⑤　$\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}$

(2)

次のノに当てはまるものを，下の⓪～④のうちから一つ選べ。

$P \cap Q$に属する自然数のうち最小のものは，4と6の最小公倍数だから12＝ヌネである。

また，12は24の倍数ではないから，ヌネ＝12 $\boxed{\text{ノ ④ } \notin}$ R

⓪　$=$　　①　$\subset$　　②　$\supset$　　③　$\in$　　④　$\notin$

(3)

次の $\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

自然数 ヌネ＝12 はpかつqであるが，rではない。したがって命題 $\boxed{\text{ハ ③}}$ の反例である。

⓪　「(pかつq) $\Longrightarrow \overline{r}$」　　①　「($p$または$q$) $\Longrightarrow \overline{r}$」

②　「$r \Longrightarrow$ (pかつq) 」　　③　「(pかつq) $\Longrightarrow r$」

コメント：

集合と命題の問題は，論理的思考を強く要求するので，苦手とする読者が多いかも知れない。しかし，センター試験 数学Ⅰ･A では，複雑ではない基本的な問題を扱うので，苦手意識をもつことなく，題意を的確に読み込めば，自ずと正答にたどり着くと思って，取り組もう。

第２問（配点 25）

＜解答＞

［１］

(1)　ア１　イ３　（解答の順序は問わない）　(2)　ウ６

［２］

(1)　エ２　オ４　カ１　キ４　クケ -4　コ１　サ０　シ２　ス３

(2)　セ３　ソ３　タチ -4　ツ８　テ６　ト３

＜解説＞

［１］(1)

a，bを定数とし，2次関数 $y=x^2+ax+b$のグラフをFとする。次の$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

2次方程式$y=x^2+ax+b=0$の解の判別式は$D=a^2-4b$。

F について述べた文として正しいものは$\boxed{ア\ ①}$，$\boxed{イ\ ③}$である。

⓪　Fは，上に凸の放物線である。

①　Fは，下に凸の放物線である。

②　$a^2>4b$ のとき，Fと x 軸は共有点をもたない。

③　$a^2<4b$ のとき，Fと x 軸は共有点をもたない。

④　$a^2>4b$ のとき，Fと y 軸は共有点をもたない。

⑤　$a^2<4b$ のとき，Fと y 軸は共有点をもたない。

(2)

次の$\boxed{ウ}$に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

2次関数$y=x^2+2x-1$の，$-3\leqq x\leqq 2$ における最小値と最大値の組合せとして正しいものは$\boxed{ウ\ ⑥}$である。

$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$，したがって$x=-1$で最小値-2，$x=2$で最大値7

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
最大値	4	2	0	0	-1	-1	-2	-2
最大値	9	7	9	4	8	7	7	2

［２］

cを定数とする。2次関数$y=x^2$のグラフを，2点$(c\,,0)$，$(c+4\,,0)$を通るように平行移動して得られるグラフをGとする。

(1)

Gをグラフにもつ2次関数は，cを用いて

$y=(x-c)(x-c-4)=x^2-2(c+2)x+c(c+4)=x^2-2(c+\text{エ})x+c(c+\text{オ})$

と表せる。Gが点$(3\,,k)$を通るとき，k はc を用いて，

$k=9-6(c+2)+c(c+4)=c^2-2c-3=(c-1)^2-4=(c-\text{カ})^2-\text{キ}$

と表せる。したがって，c が実数全体を動くとき，k の取り得る値の最小値は$-4=$ クケである。

また，$-3\leqq k\leqq 0$であるような cの値の範囲は

$-3\leqq c^2-2c-3\leqq 0$だから，

$c^2-2c=c(c-2)\geqq 0$ から，$c\leqq 0$，$c\geqq 2$　①

$c^2-2c-3=(c-3)(c+1)\leqq 0$から，$-1\leqq c\leqq 3$　②

①，②から，$-\text{コ}=-1\leqq c\leqq 0=\text{サ}$，$\text{シ}=2\leqq c\leqq 3=\text{ス}$

(2)

$\text{シ}=2\leqq c\leqq 3=\text{ス}$の場合を考える。$G$が点$(3\,,-1)$を通るとき，

$y=(x-c)(x-c-4)=x^2-2(c+2)x+c(c+4)=\{x-(c+2)\}^2-(c+2)^2+c(c+4)=\{x-(c+2)\}^2-4$

$-1=c^2-2c-3$，$\therefore c^2-2c-2=0$，$\therefore c=1\pm\sqrt{3}$，$\therefore c=1+\sqrt{3}$

したがって，Gは2次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $c+2=3+\sqrt{3}=\text{セ}+\sqrt{\text{ソ}}$，

y 軸方向に $-4=$ タチだけ平行移動したものである。

また，このときGとy軸との交点のy座標は

$y=c(c+4)=(1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})=8+6\sqrt{3}=\text{ツ}+\text{テ}\sqrt{\text{ト}}$

コメント：

2次関数のグラフに関する問題。2点$(c\,,0)$，$(c+4\,,0)$を通ることから，$x=c$，$c+4$ が2次方程式$y=0$の解であることに速やかに気がつきたい。

第３問 (配点 30)

<解答>

(1)　ア 2　イ 3　ウ 5　エ 3　オ 5　カ 5

(2)　キ 3　ク 1　ケ 1　コ 3　サ 5　シ 3　ス 5　セ 5

(3)　ソタ 20　チ 5　ツ 8　テ 5　ト 5

<解説>

(1)

△ABC において，AB=5，BC=6，CA=$\sqrt{21}$とする。

余弦定理から，$\cos\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{(AB)^2+(BC)^2-(AC)^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{25+36-21}{2\times 5\times 6}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}$

$\sin\angle \mathrm{ABC}=\sqrt{1-(\cos\angle ABC)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{\sqrt{\text{ウ}}}{\text{エ}}$

△ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\times(\mathrm{AB}\sin\angle \mathrm{ABC})=\dfrac{1}{2}\times 6\times 5\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=5\sqrt{5}=\text{オ}\sqrt{\text{カ}}$

(2)

１辺の長さが8 の正方形 DEFG において，辺 EF 上の点 H と辺 FG 上の点 I は

$\cos\angle \mathrm{DIG}=\dfrac{3}{5}$，$\tan\angle \mathrm{FIH}=2$を満たすとする。

(ｉ) 次のキ，クに当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰

り返し選んでもよい。

$\cos\angle DIG=\dfrac{3}{5}$から，$\sin\angle DIG=\dfrac{4}{5}=\dfrac{DG}{DI}=\dfrac{8}{DI}$，∴ DI＝10＝③＝キ

GI＝6 だから，IF＝2，∴ HF＝4，∴ $HI=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$＝①＝ク

⓪ $\sqrt{5}$　① $2\sqrt{5}$　② 5　③ 10

(ii) 次のケ，コに当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。

△DEH，△DGI，△DHIのうち△HFIと相似なものは，図２に示すような各辺の長さになるので，ケ＝① △DEHと△DHI の二つのみである。

また，$\sin\angle DIG=\dfrac{4}{5}$，$\sin\angle DIH=\dfrac{4\sqrt{5}}{10}=\dfrac{2\sqrt{5}}{10}>\dfrac{4}{5}=\sin\angle DIG$だから，

∠DIG $\boxed{コ\ ③<}$ ∠DIHである。

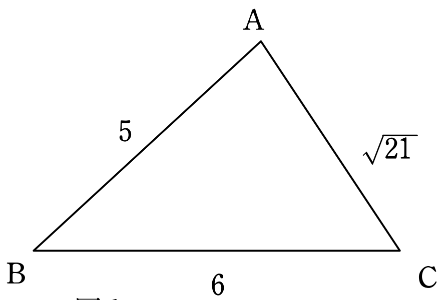

図１

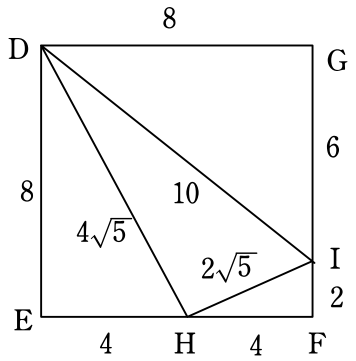

図２

(iii)

△DHIはDIを斜辺とする直角三角形だから，その外接円の半径は，$\dfrac{10}{2}$＝5＝サであり，

その内接円の半径は，△DHIの面積をSとすれば，

$$r=2\times\frac{S}{DH+HI+ID}=2\times\frac{20}{4\sqrt{5}+2\sqrt{5}+10}=\frac{20}{5+3\sqrt{5}}=3\sqrt{5}-5=シ\sqrt{ス}-セ$$

(3)

△DHJは直角三角形だから，$DJ=\sqrt{(4\sqrt{5})^2+8^2}=12$

△IHJは直角三角形だから，$IJ=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+8^2}=2\sqrt{21}$，また DI＝10

したがって△IDJは(1)の△ABCの各辺が2倍の相似形だから，

△IDJの面積は $5\sqrt{5}\times 2^2=20\sqrt{5}$＝ソタ$\sqrt{チ}$である。

三角錐DHIJの体積＝$\dfrac{1}{3}$×△DHIの面積×HJ＝$\dfrac{1}{3}$×△IDJの面積×HK

$$HK=\frac{\triangle DHIの面積\times HJ}{\triangle IDJの面積}=\frac{20\times 8}{20\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{ツ\sqrt{テ}}{ト}$$

コメント：
　三角形ABC，正方形DEFGなどの図を描いて考察する。△IDJは(1)の△ABCと相似であることに気づくことがポイントである。角錐の体積が $\frac{1}{3}\times$（底面積）$\times$（高さ）であることを活用する。

第４問（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア３　イ５（解答の順序は問わない），　(2)　ウ６，　(3)　エ４，　(4)　カ２　キ１　ク０

＜解説＞

(1)

　次のア，イに当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

　99個の観測値からなるデータがある。四分位数について述べた記述で，どのようなデータでも成り立つものは ア③とイ⑤ である。

⓪　平均値は第１四分位数と第３四分位数の間にある。→　成立しない場合がある。
　　理由：他のデータより著しく大きいデータがあると，平均値が第3四分位範囲を超える。

①　四分位範囲は標準偏差より大きい。→　成立しない場合がある。
　　理由：四分位範囲は，データの大きさの分布に直接関係しない。

②　中央値より小さい観測値の個数は49個である。→　成立しない場合がある。
　　理由：中央値と同じ大きさのデータが複数個ある場合，成立しない。

③　最大値に等しい観測値を1個削除しても第1四分位数は変わらない。→　成立
　　理由：98個のデータの中央値は49個目と50個目のデータの平均値になるので，第1四分位数は小さい順に49個のデータの中央値になることに変わりない。

④　第1四分位数より小さい観測値と，第3四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値の個数は51個である。→　成立しない場合がある。
　　理由：第1四分位数，第3四分位数と同じ大きさのデータが複数個ある場合成立しない。

⑤　第1四分位数より小さい観測値と，第3四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値からなるデータの範囲はもとのデータの四分位範囲に等しい。→　成立
　　理由：四分位数と同じ値のデータが複数個あっても，データの範囲はもとのデータの四分位範囲となる。

(2)

　図１は，平成27年の男の市区町村別平均寿命のデータを47の都道府県 P1，P2，・・・，P47 ごとに箱ひげ図にして，並べたものである。

　次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) は図１に関する記述である。

(Ⅰ)　四分位範囲はどの都道府県においても1以下である。→　P10で1以上だから，誤

(Ⅱ)　箱ひげ図は中央値が小さい値から大きい値の順に上から下へ並んでいる。
　　→　P10からP11では中央値が小さくなっている。誤

(Ⅲ)　P1のデータのどの値とP47のデータのどの値とを比較しても1.5以上の差がある。
　　→　P1の最大値は約79.3歳，P47の最小値は約81.6歳でその差は2.3歳。正

次のウに当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは ウ⑥ である。

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	誤	正	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	正	誤	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	正	誤	誤	正	誤

(3)

次のエに当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

ヒストグラムから，以下のことが解かる。

① 79.5歳以上80.0歳未満の最低平均寿命を含む2個のデータがある。

→ これを満たす箱ひげ図は⓪，③，④，⑤

② 81.5歳以上82.0歳未満の最高平均寿命を含む2個のデータがある。

→ これを満たす箱ひげ図は④，⑥，⑦

③ 中央値は80.5歳以上81.0歳未満である。

→ これを満たす箱ひげ図は④，⑤，⑥

したがって，図２のヒストグラムに対応する箱ひげ図は，すべてを満たす エ④ である。

(4)

次のオに当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

男と女の都道府県別平均寿命の散布図から男女の寿命差の度数として

5.5～6歳：9県，6～6.5歳：20県以上，6.5～7歳：14県，7～7.5歳：3県

これにほぼ該当するヒストグラムはオ③である。

(5)

0または正の値だけとるデータの散らばりの大きさを比較するために

$$\text{変動係数}=\frac{\text{標準偏差}}{\text{平均値}}$$

で定義される「変動係数」を用いる。ただし，平均値は正の値とする。

昭和25年と平成27年の国勢調査の女のデータから表１（下表）を得た。

	人数（人）	平均値（歳）	標準偏差（歳）	変動係数
昭和25年	42,385,487	27.2	20.1	V
平成27年	63,403,994	48.1	24.5	0.509

次のカに当てはまるものを，下の⓪～②のうちから一つ選べ。

昭和25年の変動係数 $V=\dfrac{20.1}{27.2}$，平成27年の変動係数 $V=\dfrac{24.5}{48.1}=0.509$

したがって，両者の大小関係はカ②である。

⓪ $V<0.509$　① $V=0.509$　② $V>0.509$

次のキ，クに当てはまる最も適切なものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。
ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

- 平成27 年の年齢データの値のすべてを100 倍する。このとき，平均値も標準偏差も100倍される。したがって変動係数は変わらない。 キ①。
- 平成27 年の年齢データの値のすべてに100 を加える。このとき，平均値にも標準偏差にも100が加算される。したがって変動係数は小さくなる。ク⓪。

⓪　小さくなる　　①　変わらない　　②　10倍になる　　③　100倍になる

コメント：

(1)は非常に細かい注意を要するもので，大学入試の問題として適切かどうか。反証を考えると，時間が不足する。注意深く問題文を読み込み，考察しよう。(3)では①と②だけで判定できる。

＜総評＞

去年と問題の構成はほとんど同じ。

第１問　[１]は2次関数の値の範囲と変数の範囲の問題。難易度はＢ
　　　　[２]は整数の集合に関する命題と論理の問題。難易度はＣ
第２問　[１]は2次関数のグラフの性質に関する問題。難易度はＣ
　　　　[２]は2次関数のグラフの特徴の変化と係数の変化に関する問題。難易度はＢ
第３問　三角形の正弦，辺長などの諸量，外接円の半径，三角錐の高さなどを求める。難易度はＢ
第４問　データの統計処理の問題。四分位範囲や箱ひげ図に関する適正な記述の選択，ヒストグラム，箱ひげ図，散布図の対応関係などの問題を含む。

数学Ⅰ・数学Ａ　（注）この科目には，選択問題があります。（23ページ参照。）

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

[１]　アイ -2　ウ 4　エ 0　オ 4　カキ -2　ク 5　ケ 3　コ 6　サシ 13
[２]　ス 2　セソ 12　タ 4　チ 3
[３]　ツ 2　テ 4　ト 1　ナ 0　ニ 2　ヌ 3　ネ 3　ノ 3　ハヒ -4　フ 8　ヘ 6　ホ 3

＜解説＞

[１]

aを定数とする。

(1)

直線l：$y=(a^2-2a-8)x+a$の傾きが負となるのは，$a^2-2a-8=(a-4)(a+2)<0$によって，
aの範囲が　アイ＝ $-2 < a < 4$ ＝ウ　のときである。

(2)

$a^2-2a-8\fallingdotseq 0$とし，(1)の直線lとx軸の交点のx座標をbとする。

$(a^2-2a-8)b+a=0$だから，$b=\dfrac{-a}{a^2-2a-8}$

$a>0$の場合，$b>0$となるのは

$b=\dfrac{-a}{a^2-2a-8}>0$，$\therefore\ a^2-2a-8=(a-4)(a+2)<0$，$\therefore$ エ$=0<a<4=$オ

$a\leqq 0$の場合，$b>0$となるのは

$b=\dfrac{-a}{a^2-2a-8}>0$，$\therefore\ a^2-2a-8=(a-4)(a+2)>0$，$\therefore\ a<-2=$カキ

また，$a=\sqrt{3}$のとき

$$b=\frac{-a}{a^2-2a-8}=\frac{-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}-8}=\frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{(5-2\sqrt{3})\sqrt{3}}{(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}=\frac{5\sqrt{3}-6}{13}=\frac{ク\sqrt{ケ}-コ}{サシ}$$

[2]

自然数に関する3つの条件p，q，rを次のように定める。

p：nは4の倍数である。

q：nは6の倍数である。

r：nは24の倍数である。

条件p，q，rの否定をそれぞれ$\overline{p}$，$\overline{q}$，$\overline{r}$で表す。

条件pを満たす自然数全体の集合をPとし，条件qを満たす自然数全体の集合をQとし，条件rを満たす自然数全体の集合をRとする。自然数全体の集合を全体集合とし，集合P，Q，Rの補集合をそれぞれ$\overline{P}$，$\overline{Q}$，$\overline{R}$で表す。

(1)

次の ス に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

32は4の倍数であり，6の倍数ではないから，$32\in P\cap\overline{Q}=$ス②

⓪ $P\cap Q\cap R$　① $P\cap Q\cap\overline{R}$　② $P\cap\overline{Q}$

③ $\overline{P}\cap Q$　④ $\overline{P}\cap\overline{Q}\cap R$　⑤ $\overline{P}\cap\overline{Q}\cap\overline{R}$

(2)

次のタに当てはまるものを，下の⓪～④のうちから一つ選べ。

$P\cap Q$に属する自然数のうち最小のものは，4と6の最小公倍数だから12＝セソである。

また，12は24の倍数ではないから，セソ＝12 $\boxed{タ④\not\in}$ R

⓪ $=$　① $\subset$　② $\supset$　③ $\in$　④ $\not\in$

(3)

次の チに当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

自然数 セソ＝12 はpかつqであるが，rではない。したがって命題 $\boxed{チ\ ③}$ の反例である。

⓪ 「$(p$かつ$q)\Longrightarrow\overline{r}$」　① 「$(p$または$q)\Longrightarrow\overline{r}$」

② 「$r\Longrightarrow(p$かつ$q)$」　③ 「$(p$かつ$q)\Longrightarrow r$」

コメント：

集合と命題の問題は，論理的思考を強く要求するので，苦手とする読者が多いかも知れない。しかし，センター試験 数学Ⅰ･A では，複雑ではない基本的な問題を扱うので，苦手意識をもつことなく，題意を的確に読み込めば，自ずと正答にたどり着くと思って取り組もう。

［3］

cを定数とする。2次関数$y=x^2$のグラフを，2点$(c\,,0)$，$(c+4\,,0)$を通るように平行移動して得られるグラフをGとする。

(1)

Gをグラフにもつ2次関数は，cを用いて

$y=(x-c)(x-c-4)=x^2-2(c+2)x+c(c+4)=x^2-2(c+\text{ツ})x+c(c+\text{テ})$

と表せる。

2点$(3\,,0)$，$(3\,,-3)$を両端とする線分とGが共有点をもつようなcの値の範囲を求める。

共有点をもつ条件は，$x=3$のとき$-3\leqq y\leqq 0$,

すなわち$-3\leqq(3-c)(3-c-4)=-(3-c)(c+1)=c^2-2c-3\leqq 0$だから，

$c^2-2c=c\,(c-2)\geqq 0$，$\therefore\ c\leqq 0$，$c\geqq 2$　①

$(c-3)(c+1)\leqq 0$，$\therefore\ -1\leqq c\leqq 3$　②

①，②から $-\text{ト}=-1\leqq c\leqq 0=\text{ナ}$，$\text{ニ}=2\leqq c\leqq 3=\text{ヌ}$

(2)

$\text{ニ}=2\leqq c\leqq 3=\text{ヌ}$の場合を考える。$G$が点$(3\,,-1)$を通るとき，

$-1=(3-c)(3-c-4\,)$，$\therefore\ c^2-2c-2=0$，$\therefore\ c=1\pm\sqrt{3}$，$\therefore\ c=1+\sqrt{3}$

$y=(x-c)(x-c-4)=x^2-2(c+2)x+c(c+4)=\{x-(c+2)\}^2-4$

したがって，Gは2次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $c+2=3+\sqrt{3}=\text{ネ}+\sqrt{\text{ノ}}$，

y 軸方向に $-4=\text{ハヒ}$だけ平行移動したものである。

また，このときGとy軸との交点のy座標は，$x=0$として，

$y=c(c+4)=(1+\sqrt{3}\,)(5+\sqrt{3}\,)=8+6\sqrt{3}=\text{フ}+\text{ヘ}\sqrt{\text{ホ}}$

コメント：

2次関数のグラフに関する問題。2点$(c\,,0)$，$(c+4\,,0)$を通ることから，$x=c$，$c+4$ が2次方程式$y=0$の解であることに速やかに気がつきたい。また，2点$(3\,,0)$，$(3\,,-3)$を両端とする線分は$x=3$，$-3\leqq y\leqq 0$であることにも気がつきたい。

第２問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

［1］ ア２　イウ14　エ４　オ２　カ１　キ４　ク７　ケ７

［2］ コ３　サ５　（解答の順序は問わない），　シ６　ス４　セ３

＜解説＞

［1］

　△ABCにおいて，$BC=2\sqrt{2}$とする。∠ACBの二等分線と辺ABの交点をDとし，$CD=\sqrt{2}$，$\cos\angle BCD=\dfrac{3}{4}$とする。

このとき，余弦定理により，

$(BD)^2=(BC)^2+(CD)^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD=8+2-8\times\dfrac{3}{4}=4$，∴ $BD=2=$ア

$\sin\angle BCD=\sqrt{1-(\cos\angle BCD)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

△BCDにおける正弦定理により，

$\sin\angle ADC=\sin\angle BDC=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sin\angle BCD}{2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}=\dfrac{\sqrt{\text{イウ}}}{\text{エ}}$

△ACDにおける正弦定理により，$\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}\times\dfrac{4}{\sqrt{7}}=\sqrt{2}=\sqrt{\text{オ}}$

△ACDにおける余弦定理により，

$(AD)^2=(DC)^2+(AC)^2-2DC\cdot AC\cos\angle ACD=2+2(AD)^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{2}(AD)\times\dfrac{3}{4}$

$(AD)^2-3AD+2=0$，$(AD-2)(AD-1)=0$，∴ $AD=1$ または 2

しかるに，$AD=2$のとき，△BCD≡△ACDだから，$\angle BDC=\angle ADC=90°$

$\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$だから，$\angle ADC\fallingdotseq 90°$，∴ $AD\fallingdotseq 2$，したがって $AD=1=$カ

△ABCにおける正弦定理により，

△ABCの外接円の直径$2R=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{3}{2\sin\angle BCD\cos\angle BCD}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{16}{3\sqrt{7}}=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

∴ $R=\dfrac{4}{\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}=\dfrac{\text{キ}\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}}$

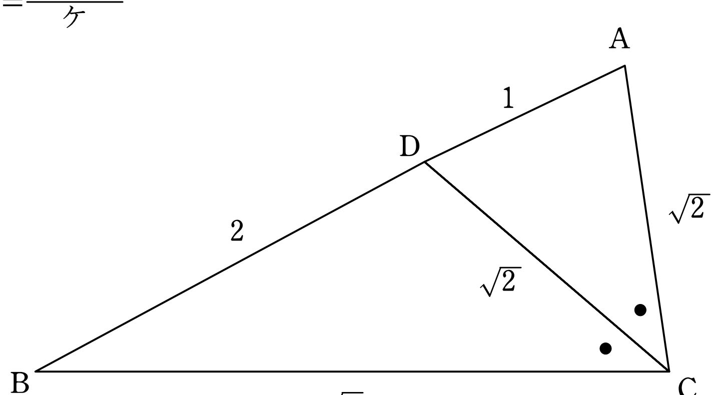

図１

コメント：

　正弦定理，余弦定理を利用する問題。両定理の利用問題は頻出だから，多くの問題をこなして，使いこなせるようにしよう。図１のような図を描いて考察しよう。

［2］

(1)

次のコ，サに当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

99個の観測値からなるデータがある。四分位数について述べた記述で，どのようなデータでも成り立つものは コ③とサ⑤ である。

⓪　平均値は第１四分位数と第３四分位数の間にある。→　成立しない場合がある。

理由：他のデータより著しく大きいデータがあると，平均値が第3四分位範囲を超える。

①　四分位範囲は標準偏差より大きい。→　成立しない場合がある。

理由：四分位範囲は，データの大きさの分布に直接関係しない。

②　中央値より小さい観測値の個数は49個である。→　成立しない場合がある。

理由：中央値と同じ大きさのデータが複数個ある場合，成立しない。

③　最大値に等しい観測値を1個削除しても第1四分位数は変わらない。→　成立

理由：98個のデータの中央値は49個目と50個目のデータの平均値になるので，第1四分位数は小さい順に49個のデータの中央値になることに変わりない。

④　第1四分位数より小さい観測値と，第3四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値の個数は51個である。→　成立しない場合がある。

理由：第1四分位数，第3四分位数と同じ大きさのデータが複数個ある場合成立しない。

⑤　第1四分位数より小さい観測値と，第3四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値からなるデータの範囲はもとのデータの四分位範囲に等しい。→　成立

理由：四分位数と同じ値のデータが複数個あっても，データの範囲はもとのデータの四分位範囲となる。

(2)

図１は，平成27年の男の市区町村別平均寿命のデータを47の都道府県 P1，P2，・・・，P47 ごとに箱ひげ図にして，並べたものである。

次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) は図１に関する記述である。

(Ⅰ)　四分位範囲はどの都道府県においても1以下である。→　P10で1以上だから，誤

(Ⅱ)　箱ひげ図は中央値が小さい値から大きい値の順に上から下へ並んでいる。

→　P10からP11では中央値が小さくなっている。誤

(Ⅲ)　P1のデータのどの値とP47のデータのどの値とを比較しても1.5以上の差がある。

→　P1の最大値は約79.3歳，P47の最小値は約81.6歳でその差は2.3歳。正

次のシに当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは シ⑥ である。

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	誤	正	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	正	誤	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	正	誤	誤	正	誤

(3)

次のスに当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

図２のヒストグラムから，以下のことが解かる。

① 79.5歳以上80.0歳未満の最低平均寿命を含む2個のデータがある。

→ これを満たす箱ひげ図は⓪，③，④，⑤

② 81.5歳以上82.0歳未満の最高平均寿命を含む2個のデータがある。

→ これを満たす箱ひげ図は④，⑥，⑦

③ 中央値は80.5歳以上81.0歳未満である。

→ これを満たす箱ひげ図は④，⑤，⑥

したがって，図２のヒストグラムに対応する箱ひげ図は，すべてを満たす ス④ である。

(4)

次のセに当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

男と女の都道府県別平均寿命の散布図から男女の寿命差の度数として

5.5～6歳：9県，6～6.5歳：20県以上，6.5～7歳：14県，7～7.5歳：3県

これにほぼ該当するヒストグラムはセ③である。

コメント：

(1)は非常に細かい注意を要するもので，大学入試の問題として適切かどうか。反証を考えると，時間が不足する。注意深く問題文を読み込み，考察しよう。(3)では①と②だけで判定できる。

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

［１］ ア０　イ２　（解答の順序は問わない）

［２］ ウ１　エ４　オ１　カ２　キ３　ク３　ケ８　コ７　サシ32　ス４　セ７

＜解説＞

［１］

次のア，イに当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

正しい記述はア⓪とイ②である。

⓪　1枚のコインを投げる試行を5 回繰り返すとき，少なくも1回は表が出る確率をpとすると，$p>0.95$である。

→ 表が全く出ない確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^5$，少なくも1回は表が出る事象と排反事象だから，

$p=1-\left(\frac{1}{2}\right)^5=1-\frac{1}{32}>0.95$，したがって正しい。

① 袋の中に赤球と白球が合わせて8個入っている。球を1個取り出し，色を調べてから袋に戻す試行を行う。この試行を5回繰り返したところ赤球が3回出た。したがって，1回の試行で赤玉が出る確率は$\frac{3}{5}$である。

→ この試行から赤玉が出る確率を決めることはできない。例えば，赤玉が出る確率は$\frac{2}{5}$でも，同じ試行結果になる場合がある。したがって誤り。

② 箱の中に「い」と書かれたカードが 1 枚，「ろ」と書かれたカードが 2 枚、「は」と書かれたカードが 2 枚の合計 5 枚のカードが入っている。同時に 2 枚のカードを取り出すとき，書かれた文字が異なる確率は $\frac{4}{5}$ である。

→ 「ろ」を2枚取り出す確率は$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$，同様に「は」を2枚取り出す確率は$\frac{1}{10}$

したがって同じカードを2枚取り出す確率は$\frac{1}{5}$，この事象と2枚の異なる文字のカードを取り出す事象は排反事象だから，その確率は $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$，したがって正しい。

③ コインの面を見て「オモテ（表）」または「ウラ（裏）」とだけ発言するロボットが2 体ある。ただし，どちらのロボットも出た面に対して正しく発言する確率が 0.9，正しく発言しない確率が 0.1 であり，これら 2 体は互いに影響されることなく発言するものとする。いま，ある人が 1 枚のコインを投げる。出た面を見た 2 体が，ともに「オモテ」と発言したときに実際に表が出ている確率を p とすると，$p\leqq 0.9$ である。

→ 2 体のロボットが「オモテ」と発言したのだから，実際に表が出ている確率 p は 1 つのロボットが正しく発言する確率 0.9より高いはず。したがって誤り。

コメント：

できるだけ迅速に判断したい。

⓪ は表が全く出ない事象の排反事象として考えると速い。① は直ちに誤りと判断したい。②も同じ文字のカードを取り出す事象の排反事象として，計算すると速い。

こうして⓪と②を正しいとして速やかに選択したい。

③は無視したい選択肢である。上記のような直感的な判断で誤りと速やかに判断し，時間をムダにしない。

実際に表が出ている確率 p を計算してみよう。1体が裏を「オモテ」とする確率は0.1，したがって2体が裏を「オモテ」とする確率は$0.1\times0.1=0.011$だから，「オモテ」と2体が発言したとき，裏である確率は0.011。したがって，表である確率 $p=1-0.011=0.989\geqq 0.9$。ここでの選択判断には，このような計算は必ずしも必要としない。

[2]

1 枚のコインを最大で5 回投げるゲームを行う。このゲームでは，1 回投げるごとに表が出たら持ち点に2 点を加え，裏が出たら持ち点に-1 を加える。はじめの持ち点は0 点とし，ゲーム終了のルールを次のように定める。

- 持ち点が再び 0点になった場合は，その時点で終了する。
- 持ち点が再び 0点にならない場合は，コインを 5 回投げ終わった時点で終了する。

(1)

コインを2 回投げ終わって持ち点が-2点である確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{ウ}{エ}$ である。

またコインを2 回投げ終わって持ち点が1点である場合は，表裏が1 回ずつ出る場合だから，

その確率は，$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{オ}{カ}$

(2)

持ち点が再び 0 点になることが起こるのは，コインを キ＝ 3 回投げ終わったときである。コインを 3 回投げ終わって持ち点が0 になる場合は，表が1 回，裏が2 回でる場合だから，3 通りある。

したがって，その確率は $\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}=\frac{ク}{ケ}$

(3)

ゲームが終了した時点で持ち点が4 点である確率を考える。

再び 0 点になってもゲームを続行したと仮定すると，持ち点が 4 点になる場合は，表が3 回，裏が2 回の場合で ${}_5C_3=10$ 通りある。このうち 3 通りは既にゲームは終了しているから，7 通りである。

したがって，ゲーム終了した時点で持ち点が4 点である確率は $\frac{7}{2^5}=\frac{7}{32}=\frac{コ}{サシ}$

(4)

コインを2 回投げ終わって持ち点が1点である場合は，表，裏が1 回ずつの場合で確率 $\frac{1}{2}$ である。

その後， 3 回目で表，4 回目5回目で表裏または裏表となって持ち点が4点となる確率は

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ である。

したがって，ゲーム終了した時点で持ち点が4 点であるとき，コインを2 回投げ終わって持ち点が1 点である場合の条件付き確率は，(3)の結果を用いて， $\frac{1}{8}\div\frac{7}{32}=\frac{4}{7}=\frac{ス}{セ}$

コメント：

[1]では，速やかに判断するためには，計算に頼るのではなく，それぞれの記述に対して適切な判断方法が必要である。⓪では排反事象を考える。①では，確率的に変動する事象から確率を確定することは明らかな誤り。③は2体のロボットが同じ結果を発言することは，1体のロボットのみの発言より確率が高いはず。

[2] (3)，(4)はやや難しいと感じた。

第４問（選択問題）（配点 20）

<解答>

(1)　アイ 26　ウエ 11

(2)　オカ 96　キク 48　ケ 9　コサ 11　シス 36　セ 5　ソ 1　タ 6

<解説>

(1)

xを循環小数 $2.\dot{3}\dot{6}$とする。すなわち，

$$x=2.363636\cdots\cdot$$

とする。このとき

$$100\times x-x=236.\dot{3}\dot{6}-2.\dot{3}\dot{6},\quad \therefore\ 99x=234$$

であるから，xを分数で表すと

$$x=\frac{234}{99}=\frac{26}{11}=\frac{\text{アイ}}{\text{ウエ}}$$

(2)

有理数yは，7 進法で表すと，二つの数字の並びabが繰り返し現われる循環小数 $2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ になるとする。ただし，a，bは 0 以上 6 以下の異なる整数である。このとき

$$49\times y-y=2ab.\dot{a}\dot{b}_{(7)}-2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$$ であるから，$48y=2ab_{(7)}-2=2\times7^2+7a+b-2$，

$\therefore\ y=\dfrac{96+7\times a+b}{48}=\dfrac{\text{オカ}+7\times a+b}{\text{キク}}$　と表せる。

(ⅰ)

$$y=\frac{96+7\times a+b}{48}=\frac{96+7\times a+b}{12\times4}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}(96+7a+b)=\frac{1}{4}\times\left(8+\frac{7a+b}{12}\right)$$

yが，分子が奇数で分母が4である分数で表されるのは，$7a+b\leqq48$だから，

$y=\dfrac{9}{4}=\dfrac{\text{ケ}}{4}$ または $y=\dfrac{11}{4}=\dfrac{\text{コサ}}{4}$ のときである。

$y=\dfrac{11}{4}$のときは，$7a+b=36=$シスだから，$a=5=$セ，$b=1=$ソ

(ⅱ)

$y-2$は，分子が 1 で分母が 2 以上の整数である分数で表されるとする。

$$y-2=\frac{96+7a+b}{48}-2=\frac{7a+b}{48}=\frac{1}{m},\quad m\geqq2$$

したがって $7a+b$ が $48=2^4\times3$ の約数だから，約数の数は $(4+1)\times(1+1)=10$個

約数のうち $7a+b=48$ は $m=1$ になるから含まれない。

また，$a=b$ になる場合を除く必要がある。したがって，$7a+b=8a=8$，16，24 の場合，

$a=b=1$，2，3 となって含まれない。

したがって，このようなyの個数は，全部で $10-4=6=$ タ 個ある。

コメント：

循環小数の問題。7進法による循環小数の問題だから，より的確な理解を必要とする。

(ⅱ)では，「a，bは0以上6以下の異なる整数である」と問題文にあるように，$a=b$となる場合を除かなければならない。$a=b$であれば，循環小数は$2.\dot{a}\dot{b}_{(7)}$ではなく$2.\dot{a}_{(7)}$となるからである。

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア 1　イ 1　ウ 8　エ 2　オ 7　カ 9　キク 56

(2)　ケコ 12　サシ 72　ス 2

＜解説＞

△ABC において，辺BC を7：1に内分する点をDとし，辺AC を7：1に内分する点をEとする。線分ADと線分BE の交点をFとし，直線CF と辺AB の交点をG とする。

△ABC においてチェバの定理により，$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{1}{7}\cdot7\cdot\dfrac{AG}{GB}=1$，$\therefore\ \dfrac{GB}{AG}=1=$ア

△ABD を直線CG が横切ったとして，メネラウスの定理により，

$\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DF}{FA}\cdot\dfrac{AG}{GB}=8\cdot\dfrac{FD}{AF}\cdot1=1$，$\therefore\ \dfrac{FD}{AF}=\dfrac{1}{8}=\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$

△BGC を直線AD が横切ったとして，メネラウスの定理により，

$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CF}{FG}\cdot\dfrac{GA}{AB}=7\cdot\dfrac{FC}{GF}\cdot\dfrac{1}{2}=1$，$\therefore\ \dfrac{FC}{GF}=\dfrac{2}{7}=\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}}$

△BFG の面積$=\dfrac{7}{9}$△BGC の面積，△CDG の面積$=\dfrac{1}{8}$△BGC の面積

したがって $\dfrac{\triangle CDG\text{の面積}}{\triangle BFG\text{の面積}}=\dfrac{9}{56}=\dfrac{\text{カ}}{\text{キク}}$

4点B，D，F，G が同一円周上にあり，かつ FD ＝ 1のとき

方べきの定理により，$\text{AG}\cdot\text{AB}=\dfrac{1}{2}(\text{AB})^2=\text{AF}\cdot\text{AD}=8\times9$，$\therefore$ AB=12=ケコ

さらに，$\text{AE}=3\sqrt{7}$ とするとき，$\text{AC}=\dfrac{8}{7}\text{AE}=\dfrac{24\sqrt{7}}{7}$だから，AE・AC=72=サシ

すると，AG・AB=AE・AC=72だから，

ほうべきの定理の逆により，4 点 B，C，E，G は同一円周上にある。

したがって，∠AEG ＝∠ABC　②　＝ス

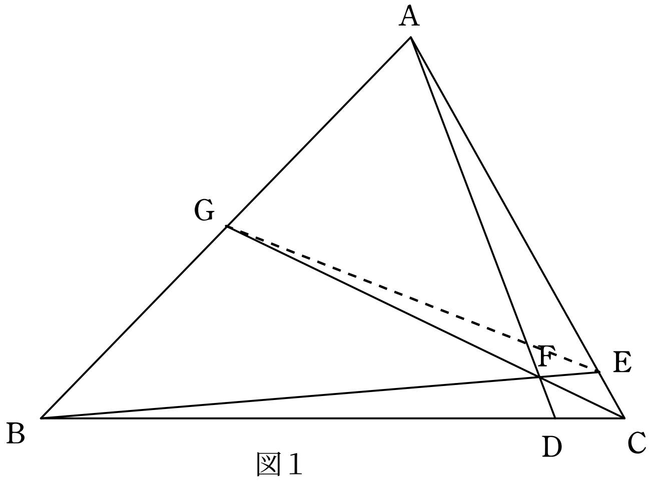

図１

コメント：

図１のような図を描いて考えよう。ア～オはチェバの定理，メネラウスの定理を使えばよい，と気づく。このとき，分母，分子に記載する辺の記号をミスしないように。

「4点B，D，F，Gが同一円周上にあり，」という問題文から，方べきの定理を思い起そう。

＜総評＞

第３～５問から２つを選ぶ。第４問が扱い易いように感じた。

第１問 ［１］ 数学Ⅰ 第１問 ［１］(1)，(2)に同じ

［２］ 数学Ⅰ 第１問 ［２］に同じ

［３］ 数学Ⅰ 第２問 ［２］に同じ

第２問 ［２］ 数学Ⅰ 第４問 (1)～(4)に同じ

第３問 確率の問題。条件付確率等の問題は例年に比して少々難しい。難易度はＢ＋。

第４問 整数，進数の問題。難易度はＢ。

第５問 図形の問題。難易度はＢ。

201024