

数学（全問必答）

第1問

[1] ア5 イウ21 エ2 オ1 カ6 キ1 ク

$\alpha = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$  とする。 $\alpha$ の分母を有理化すると

$$\alpha = \frac{\text{ア} - \sqrt{\text{イウ}}}{\text{エ}} \text{となる。}$$

$$\alpha = \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \frac{7 + 3 - 2\sqrt{21}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$$

2次方程式 $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{\text{オ}}{\text{カ}}, \text{キである。}$$

$$6x^2 - 7x + 1 = (6x - 1)(x - 1) = 0 \text{だから, } x = \frac{1}{6}, 1$$

次の ~ の数のうち最も小さいものはクである。

$\frac{\text{ア} - \sqrt{\text{イウ}}}{\text{エ}}$	$\frac{\text{エ}}{\text{ア} - \sqrt{\text{イウ}}}$
$\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$	キ

コメント：無理式の変形の問題。分母を有理化するには，無理数を2乗するような式を乗ずること。

難易度C

[2] ケ3 コ2 サ3 シ1 ス3 セ0 ソ3 タ3 チ1 ツ4 テ3 ト8 ナ3 ニ9 ノ2

$n$ を整数とし， $x$ の連立不等式

$$6x^2 - 11nx + 3n^2 \leq 0$$

$$|3x - 2n| \geq 2$$

を考える。

の左辺は

$$6x^2 - 11nx + 3n^2 = (\text{ケ}x - n)(\text{コ}x - \text{サ}n)$$

と因数分解される。

$x = 1$ が を満たすような整数 $n$ の範囲は

$$\text{シ} \leq n \leq \text{ス}$$

である。

$x=1$ が を満たすような整数 $n$ の範囲は

$$n \leq \text{セ}, \quad \text{ソ} \leq n$$

である。

よって、 $x=1$ が上の連立不等式を満たすとき、 $n = \text{タ}$ である。

$n = \text{タ}$ のとき、連立不等式の解は

$$\text{チ} \leq x \leq \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}, \quad \frac{\text{ト}}{\text{ナ}} \leq x \leq \frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$$

である。

$$6x^2 - 11nx + 3n^2 = (3x - n)(2x - 3n)$$

$x=1$ では、 $6x^2 - 11nx + 3n^2 = (3-n)(2-3n) \leq 0$ となるから、 $1 \leq n \leq 3$

を変形し $x=1$ とすれば、 $3-2n \geq 2$ 、あるいは $3-2n \leq -2$ 、したがって

$$n \leq 0, \quad 3 \leq n$$

、 によって、 $n=3$

$n=3$ とすれば、連立不等式、 は

$$6x^2 - 33x + 27 \leq 0, \quad (2x - 9)(x - 1) \leq 0, \quad \text{したがって}, \quad 1 \leq x \leq \frac{9}{2}$$

$$|3x - 6| \geq 2, \quad 3x - 6 \geq 2, \quad x \geq \frac{8}{3}$$

$$\text{あるいは}, \quad 3x - 6 \leq -2, \quad x \leq \frac{4}{3}$$

、 、 より $n=3$ のとき、連立不等式の解は

$$1 \leq x \leq \frac{4}{3}, \quad \frac{8}{3} \leq x \leq \frac{9}{2}$$

コメント：2次式の連立不等式の問題。因数分解と絶対値の理解を必要とする。難易度B。

第2問 ア4 イ2 ウ1 エ3 オ1 カキ-1 ク3 ケコ-4 サ3 シ1 ス3 セ1 ソ2  
タ3 チ3 ツ1 テト-3 ナ2 ニ3

$a, b$ を実数とし、 $x$ の二つの2次関数

$$y = 3x^2 - 2x - 1$$

$$y = x^2 + 2ax + b$$

のグラフをそれぞれ $G_1, G_2$ とする。

以下では、 $G_2$ の頂点は $G_1$ 上にあるとする。

このとき

$$b = \text{ア}a^2 + \text{イ}a - \text{ウ}$$

であり、 $G_2$ の頂点の座標を $a$ を用いて表すと

$$(-a, \text{エ}a^2 + 2a - \text{オ})$$

となる。

$$\text{を变形すると, } y = x^2 + 2ax + b = (x + a)^2 + b - a^2,$$

したがって $G_2$ の頂点の座標は $(-a, b - a^2)$ , これが $G_1$ 上にあるので, に代入すると,

$$b - a^2 = 3a^2 + 2a - 1, \text{ したがって } b = 4a^2 + 2a - 1$$

$$G_2 \text{の頂点の座標は } (-a, 3a^2 + 2a - 1)$$

- (1)  $G_2$ の頂点の $y$ 座標は,  $a = \frac{\text{カキ}}{\text{ク}}$  のとき, 最小値  $\frac{\text{ケコ}}{\text{サ}}$  をとる。

$$a = \frac{\text{カキ}}{\text{ク}} \text{ のとき, } G_2 \text{の軸は直線 } x = \frac{\text{シ}}{\text{ス}} \text{ であり, } G_2 \text{と} x \text{軸との交点の} x \text{座標は}$$
$$\frac{\text{セ} \pm \sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}} \text{ である。}$$

$$G_2 \text{の頂点の} y \text{座標は } 3a^2 + 2a - 1 = 3\left(a + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \text{ だから,}$$

$$a = \frac{-1}{3} \text{ のとき, 最小値 } \frac{-4}{3} \text{ をとる。}$$

$$a = \frac{-1}{3} \text{ のとき, } G_2 \text{の頂点の座標は } \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ だから, } G_2 \text{の軸は直線 } x = \frac{1}{3} \text{ である。}$$

このとき は  $y = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{11}{9}$  となるので,  $x$ 軸との交点の $x$ 座標は $y = 0$ として

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{11}{9} = 0 \text{ より, } x = \frac{1 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

- (2)  $G_2$ が点 $(0, 5)$ を通るとき,  $a = \text{ツ}$ ,  $\frac{\text{テト}}{\text{ナ}}$  である。

$a = \text{ツ}$  のとき,  $G_2$ を $x$ 軸方向に $\text{ニ}$ ,  $y$ 軸方向にも同じく $\text{ニ}$ だけ平行移動しても頂点は $G_1$ 上にある。  
ただし,  $\text{ニ}$ は $0$ でない数とする。

$$G_2 \text{に } \text{を代入すると } y = x^2 + 2ax + b = x^2 + 2ax + 4a^2 + 2a - 1$$

$$x = 0, y = 5 \text{を代入すると, } 5 = 4a^2 + 2a - 1, \text{ これを解いて } a = 1, \frac{-3}{2}$$

$a = 1$ とすれば,  $G_2$ の頂点の座標は $(-a, 3a^2 + 2a - 1) = (-1, 4)$ , この頂点を $x$ 軸,  $y$ 軸に $s$ 平行移動すると $(-1 + s, 4 + s)$ , これが $G_1$ 上にあるので, に代入すると

$$4 + s = 3(s - 1)^2 - 2(s - 1) - 1, \text{ これを解いて } s = 0, 3. s = 0 \text{は題意から棄却されるので } s = 3.$$

コメント: 2次関数の処理に関わる問題。頂点の座標の算出, 平行移動などの基礎知識を必要とする。

難易度 B。

第3問 ア2 イウ10 エ7 オ2 カキ10 ク7 ケ2 コサ90 シ5 スセ26 ソ7 タ5  
チツ13 テ7 ト1 ナ2 ニ3 ヌ6 ネ7

△ABCにおいて、 $AB=\sqrt{5}$ 、 $BC=\sqrt{13}$ 、 $CA=\sqrt{10}$ とする。

このとき

$$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{\text{ア}}}{\text{イウ}}, \quad \sin \angle BAC = \frac{\text{エ}\sqrt{\text{オ}}}{\text{カキ}}$$

である。また△ABCの面積は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である。

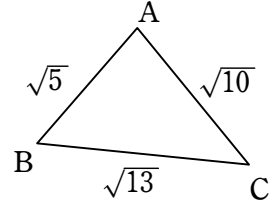


図1を参照しながら考える。

$$\text{余弦定理により, } \cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BAC)} = \sqrt{1 - \frac{2}{100}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\triangle ABC \text{の面積は } \frac{AB \cdot BC \sin \angle BAC}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}{2} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{2}$$

- (1) 円Oを△ABCの外接円とする。円Oの点Aを含まない弧BC上に点Sを $\angle BAS=45^\circ$ となるようにとる。また、円Oの点Bを含まない弧AC上に点Tを $\angle BCT=45^\circ$ となるようにとる。

このとき、 $\angle SCT = \text{コサ}^\circ$ であり、 $ST = \frac{\text{シ}\sqrt{\text{スセ}}}{\text{ソ}}$ である。また、 $BT = \frac{\text{タ}\sqrt{\text{チツ}}}{\text{テ}}$ である。

$$\angle SCT = \angle SCB + \angle BCT = \angle SAB + 45^\circ = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

ただし、ここで弧BC上の円周角として、 $\angle SCB = \angle SAB$

$\angle SCT = 90^\circ$ だから、STは外接円Oの直径である。

正弦定理によって、外接円の直径は

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{10\sqrt{13}}{7\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{26}}{7} \text{ だから, } ST = \frac{5\sqrt{26}}{7}$$

また、同じく正弦定理により、

$$\frac{BT}{\sin \angle BCT} = \frac{BT}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} BT = \frac{5\sqrt{26}}{7}, \quad BT = \frac{5\sqrt{13}}{7}$$

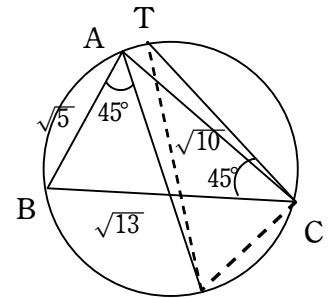


図1

- (2) △ABCを底面としPを頂点とする三角錐を考える。

三辺PA、PB、PCが互いに直交しているときPA=ト、PB=ナ、PC=ニ である。

また、点Pから△ABCに下ろした垂線の長さは $\frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}$ である。

$$PA^2 + PB^2 = AB^2 = 5$$

$$PB^2 + PC^2 = BC^2 = 13$$

$$PC^2 + PA^2 = CA^2 = 10$$

これらより,  $PA=1, PB=2, PC=3$

三角錐の体積を考える。点Pから△ABCに下ろした垂線の長さを $h$ とすれば, 三角錐の体積は

$$V = \frac{h}{3} \times ABC\text{の面積} = \frac{7h}{6}$$

一方, APは PBCに垂直だから,  $V = \frac{AP}{3} \times PBC\text{の面積} = \frac{1}{3} \times 3 = 1$

したがって,  $h = \frac{6}{7}$

コメント: 図形の問題。正弦定理, 余弦定理, 円周角の同一性などの基礎知識と応用力を必要とする。  
図を描いて考察する必要がある。三角錐の問題には着想が必要である。難易度B+。

第4問 ア2 イ3 ウ2 エ6 オカ12 キ2 クケ12 コ2 サ6 シ3 ス4 セ3 ソタ13

$m, n$ を自然数とし,  $1 < m < n$ とする。

$$\alpha = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}, \quad \beta = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \quad \text{とおく。さらに}$$

$$S = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} \quad \text{とおく。}$$

(1)  $m=3, n=6$ のとき

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \text{ア}\sqrt{\text{イ}}, \quad \beta + \frac{1}{\beta} = \text{ウ}\sqrt{\text{エ}}$$

であり,  $S = \text{オカ}\sqrt{\text{キ}}$  である。

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = \frac{2m - 2\sqrt{m(m-1)}}{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}} = \frac{2\sqrt{m}(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})}{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}} = 2\sqrt{m} = 2\sqrt{3}$$

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta^2 + 1}{\beta} = \frac{2n - 2\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{2\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = 2\sqrt{n} = 2\sqrt{6}$$

$$S = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} = \beta\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{\beta}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = 12\sqrt{2}$$

(2)  $S = 8\sqrt{3}$ ならば,  $mn = \text{クケ}$ である。このとき

$$m = \text{コ}, n = \text{サ}$$

または

$$m = \text{シ}, n = \text{ス}$$

である。ただし,  $\text{コ} < \text{シ}$ とする。

$$, \quad , \quad \text{より } S = 4\sqrt{mn} = 8\sqrt{3} = 4\sqrt{12}, \text{ したがって } mn = 12$$

したがって,  $m=2, n=6$

または,  $m=3, n=4$

(3) 等式

$$\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = 500$$

が成り立つのは、 $m = 3$ 、 $n = 13$ のときである。

$$\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = \alpha^2\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{1}{\alpha^2}\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) = \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}\right) = 500$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2 = 4m - 2, \quad \beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 - 2 = 4n - 2$$

$$\text{したがって, } (4m - 2)(4n - 2) = 500, \quad (2m - 1)(2n - 1) = 125 = 5^3$$

$$\text{したがって, } 2m - 1 = 5, \quad m = 3$$

$$2n - 1 = 25, \quad n = 13$$

コメント：因数分解等を用いた分数式の変形の問題。紛れの少ない問題だから、素直に丁寧に扱えば良い。難易度C+。

## 数学 ・ 数学 A ( 全問必答 )

### 第 1 問

[ 1 ] 数学 第 1 問 [ 1 ] に同じ

[ 2 ] ケ コ サ シ

次のケ～サに当てはまるものを、下の ~ のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。また、シに当てはまるものを、下の ~ のうちから一つ選べ。

自然数  $n$  に関する条件  $p, q, r, s$  を次のように定める。

$p$  :  $n$  は 5 で割ると 1 余る数である

$q$  :  $n$  は 10 で割ると 1 余る数である

$r$  :  $n$  は奇数である

$s$  :  $n$  は 2 より大きい素数である

また、条件  $r$  の否定を  $\bar{r}$ 、条件  $s$  の否定を  $\bar{s}$  で表す。このとき

「 $p$ かつ $r$ 」は $q$ であるためのケ。

$\bar{r}$ は $\bar{s}$ であるためのコ。

「 $p$ かつ $s$ 」は「 $q$ かつ $s$ 」であるためのサ

必要十分条件である

必要条件であるが、十分条件ではない

十分条件であるが、必要条件ではない

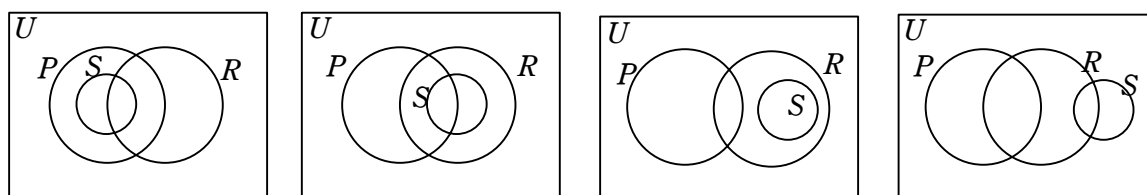
必要条件でも十分条件でもない

「 $p$ かつ $r$ 」であれば、 $n = 2m + 1 = 5k + 1$  ( $m, k$ は0を含む自然数)とおくことができる。すると $2m = 5k$ で、2と5は互いに素だから、 $2m = 5k$ は最小公倍数10の倍数である。したがって、 $n$ は10で割ると1余る数である。すなわち「 $p$ かつ $r$ 」は $q$ であるための十分条件である。一方 $q$ であれば、 $n = 10j + 1$  ( $j$ は0を含む自然数)とおくことができる。すると $n$ は5で割れば1余り、かつ奇数である。したがって、「 $p$ かつ $r$ 」は $q$ であるための必要十分条件 である。

$\bar{r}$ であれば、 $n$ は偶数だから、 $n$ は2より大きい素数ではない。したがって $\bar{r}$ であれば $\bar{s}$ 。一方 $\bar{s}$ であれば、 $n$ は2より大きい素数ではなく、奇数の場合もあれば偶数の場合もある。したがって、 $\bar{s}$ でも $\bar{r}$ とはいえない。したがって、 $\bar{r}$ は $\bar{s}$ であるための十分条件であるが、必要条件ではない。

「 $p$ かつ $s$ 」ならば、 $n = 5k + 1$ である。 $k$ が奇数ならば、 $n$ は偶数となり、素数にはならないので、 $k$ は偶数である。すると、 $n = 10j + 1$ とおくことができる。したがって、「 $p$ かつ $s$ 」であれば「 $q$ かつ $s$ 」である。一方、「 $q$ かつ $s$ 」であれば、 $n = 10j + 1$ の素数であるから、 $n$ は5で割り切れる素数である。したがって「 $q$ かつ $s$ 」であれば「 $p$ かつ $s$ 」である。したがって、「 $p$ かつ $s$ 」は「 $q$ かつ $s$ 」であるための必要十分条件である。

自然数全体の集合を全体集合と $U$ とし、条件 $p$ を満たす自然数全体の集合を $P$ 、条件 $r$ を満たす自然数全体の集合を $R$ 、条件 $s$ を満たす自然数全体の集合を $S$ とすると、 $P, R, S$ の関係を表す図はシである。



素数は奇数でなければならないから、 $S$ は $R$ の中に完全に含まれる。したがって、 $S \subset R$ は棄却される。前問のように、「 $p$ かつ $s$ 」の $n$ が存在するのは明らかだから(例えば11, 31など)、 $S$ の一部は $P$ に含まれる。したがって、 $P, R, S$ の関係を表す図はシである。

コメント：数学的な思考力、論理力、整数とその取扱に関する知識などを問う問題で、良問と感心させられる。上記では、模範解答として解答に至る流れを丁寧に書いたが、限られた時間の中で、選択する場合には、このような思考過程で解答できないかも知れない。このような問題は、解答の正否よりも、思考過程が重要なのだが、そこが分からないのが、マークシート方式の大なる問題である。さて、迅速に答えようとする、具体的な数字をあげるのが速い。5で割って1余る整数で素数となるのは、11, 31, 41, 51, ..など。これらは、10で割ると1余る。つまり、5で割って1余る素数と10で割って1余る素数は一致する。

第2問 数学 第2問に同じ

第3問 ア1 イ4 ウ5 エ5 オ2 カ5 キ5 クケ10 コ3 サシ10 ス5 セ3 ソ5 タ9

△ABCをAB=3, BC=4, CA=5である直角三角形とする。

- (1) △ABCの内接円の中心をOとし、円Oが3辺BC, CA, ABと接する点をそれぞれP, Q, Rとする。このとき、OP=OR=アである。また、

$$QR = \frac{イ\sqrt{ウ}}{エ} \text{ であり, } \sin \angle QPR = \frac{オ\sqrt{カ}}{キ} \text{ である。}$$

図1を参照しながら考える。OP=OR=rとすれば、△ABCの面積は

$$\frac{r(3+4+5)}{2} = 6r = \frac{3 \times 4}{2} = 6, \text{ したがって, } r = 1$$

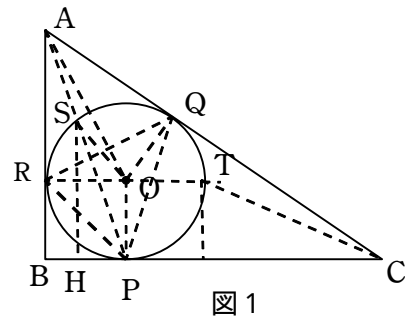
△AQRに余弦定理を適用すると、 $QR^2 = AR^2 + AQ^2 - 2AR \cdot AQ \cos \angle RAQ$

$$AR = AB - RB = 3 - 1 = 2, \quad AQ = AR = 2, \quad \cos \angle RAQ = \frac{AB}{CA} = \frac{3}{5}$$

$$\text{したがって, } QR^2 = 4 + 4 - \frac{24}{5} = \frac{16}{5}, \quad QR = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\angle QPR = \frac{1}{2} \angle ROQ = \angle AOQ$$

$$\text{したがって, } \sin \angle QPR = \sin \angle AOQ = \frac{AQ}{AO} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

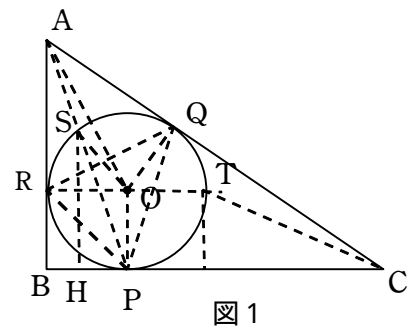


- (2) 円Oと線分APとの交点のうちPと異なる方をSとする。このとき、

$AP = \sqrt{ケテ}$  であり、 $SP = \frac{コ\sqrt{サシ}}{ス}$  である。また、点Sから辺BCへ垂線を下ろし、垂線とBCとの交点をHとする。このとき

$$HP = \frac{セ}{ソ}, \quad SH = \frac{タ}{チ}$$

である。したがって、 $\tan \angle BCS = \frac{ツ}{テ}$  である。



$$AP^2 = AB^2 + BP^2 = 9 + 1 = 10, \quad AP = \sqrt{10}$$

$$\angle SOP = 2\theta \text{ として } SP = 2\sin\theta$$

$$\angle OPS = \frac{\pi}{2} - \theta = \angle BAP, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \angle BAP, \text{ したがって } \sin\theta = \cos \angle BAP = \frac{AB}{AP} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\text{したがって, } SP = 2\sin\theta = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{また, } HP = SP \sin \angle HSP = \frac{3\sqrt{10}}{5} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{5}, \quad SH = SP \cos \angle HSP = \frac{3\sqrt{10}}{5} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{9}{5}$$

$$\text{したがって, } \tan \angle BCS = \frac{SH}{HC} = \frac{\frac{9}{5}}{3 + \frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$$



(3) 円O上に点Tを線分RTが円Oの直径となるようにとる。このとき，

$\tan \angle BCT = \frac{1}{2}$ である。よって， $\angle RSC = 2\alpha^\circ$ であり， $\angle PSC = 2\beta^\circ$ である。

図1を参照すると， $\tan \angle BCT = \frac{1}{2} = \tan \angle BCS$ ，したがってC，T，Sは同一直線上にある。

よって， $\angle RSC = 90^\circ$ となる。また，円周角と中心角の関係によって， $\angle PSC = \frac{1}{2} \angle POT = 45^\circ$

コメント：直角三角形と内接円に関わる図形の問題で，図を描いて題意を的確に理解すること。余弦定理，円周角と中心角の関係など，基礎的知識を必要とする。難易度B。

第4問 アイウ 462 エオ 80 カキ 32 クケコ 120 サシス 160 セソ 20 タチ 30 ツ 5 テト 33  
ナニ 10 ヌネ 11

袋の中に赤玉5個，白玉5個，黒玉1個の合計11個の玉が入っている。赤玉と白玉にはそれぞれ1から5までの数字が一つずつ書かれており，黒玉には何も書かれていない。なお，同じ色の玉には同じ数字は書かれていない。この袋から同時に5個の玉を取り出す。

5個の玉の取り出し方にはアイウ通りある。

11個の玉はそれぞれ区別がつく玉だから，11個の中から5個の玉を取り出す組み合わせの数が求める取り出し方の場合の数である。

$$\text{すなわち， } {}_{11}C_5 = \frac{11!}{(11-5)!5!} = \frac{11!}{6!5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 462$$

取り出した5個の中に同じ数字の赤玉と白玉の組が2組あれば得点は2点，1組だけあれば得点は1点，1組もなければ得点は0点とする。

(1) 得点が0点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのはエオ通りであり，黒玉が含まれていないのはカキ通りである。

得点が1点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのはクケコ通りであり，黒玉が含まれていないのはサシス通りである。

得点が0点の場合，黒玉が含まれていれば，残り4個は同じ数字を含まない玉の組み合わせとなる。赤玉 $p$ 個取り出す場合の数は ${}_5C_p$ ，このとき白玉 $(4-p)$ 個取り出すことのできる場合の数は，同じ数字の玉を選ばないので， ${}_{5-p}C_{4-p}$ ，したがって，求める場合の数は

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^4 {}_5C_p \times {}_{5-p}C_{4-p} &= \sum_{p=0}^4 {}_5C_p (5-p) = 5 {}_5C_0 + 4 {}_5C_1 + 3 {}_5C_2 + 2 {}_5C_3 + {}_5C_4 \\ &= 5 + 20 + 30 + 20 + 5 = 80 \end{aligned}$$

黒玉が含まれていなければ、赤玉 $p$ 個取り出す場合の数は ${}_5C_p$ 、このとき白玉 $(5-p)$ 個取り出すことのできる場合の数は、同じ数字の玉を選べないので、一意に決まってしまう。したがって、求める場合の数は

$$\sum_{p=0}^5 {}_5C_p = {}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

得点が1点の場合、黒玉が含まれていれば、残り4個の中に同じ数字の玉が1組含まれている。  
得点1の場合の数

$$= (\text{赤玉 } p \text{ 個取り出す場合の数}) \times (\text{白玉 } (4-p) \text{ 個の中の1個が赤玉と同じ場合の数})$$

そして $p$ は1, 2, 3である。

$p=1$ の場合

白玉1個は赤玉と同じ数字だから、白玉の残り4個から2個取り出すので、  
場合の数は  ${}_5C_1 \times {}_4C_2 = 30$

$p=2$ の場合

白玉2個中1個のみが赤玉と同じで、白玉は3個から1個取り出すので、  
場合の数は  ${}_5C_2 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 60$

$p=3$ の場合

赤玉3個のどれかと一致する白玉を取り出す場合の数は ${}_3C_1$   
場合の数は  ${}_5C_3 \times {}_3C_1 = 30$

したがって、得点が1点で黒玉が含まれている場合の数は、これらを足して120通り。

得点が1点で、黒玉が含まれていない場合を考える。

赤玉を $p$ 個取り出すとして、 $p$ は1, 2, 3, 4である。

得点が1となる場合の数は、各 $p$ に対して

(5個の中に赤玉 $p$ 個取り出す場合の数)  $\times$  ( $p$ 個中1個が白玉と一致する場合の数)  
 $\times$  (白玉 $(5-p)$ 個中 $(5-p-1)$ 個が赤玉と一致しない場合の数)、したがって

$$\begin{aligned} \text{場合の数} &= \sum_{p=1}^4 {}_5C_p \times {}_pC_1 \times {}_{5-p}C_{5-(p+1)} \\ &= {}_5C_1 \times {}_1C_1 \times {}_4C_3 + {}_5C_2 \times {}_2C_1 \times {}_3C_2 + {}_5C_3 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 + {}_5C_4 \times {}_4C_1 \times {}_1C_0 \\ &= 20 + 60 + 60 + 20 = 160 \text{通り} \end{aligned}$$

- (2) 得点が1点である確率は $\frac{\text{セソ}}{\text{タチ}}$ であり、2点である確率は $\frac{\text{ツ}}{\text{テト}}$ である。

また、得点の期待値は $\frac{\text{ナニ}}{\text{ヌネ}}$ である。

$$\text{得点が1点である確率は } \frac{\text{得点が1となる場合の数}}{\text{5個の玉の取り出し方の数}} = \frac{120 + 160}{462} = \frac{280}{462} = \frac{20}{33}$$

$$\text{得点が0点である確率は } \frac{\text{得点が0となる場合の数}}{\text{5個の玉の取り出し方の数}} = \frac{80 + 32}{462} = \frac{112}{462} = \frac{8}{33}$$

この試行で、得点は0, 1, 2のいずれかである。したがって得点が2点である確率は、1点でも0点でもない場合の確率だから、 $1 - \frac{20}{33} - \frac{8}{33} = \frac{5}{33}$

$$\text{得点の期待値は } 0 \times \frac{8}{33} + 1 \times \frac{20}{33} + 2 \times \frac{5}{33} = \frac{30}{33} = \frac{10}{11}$$

コメント：場合の数をていねいに求めてゆく。与えられた条件でどのような組み合わせになるか、考えれば良い。上記では、得点が2点である確率を間接的に求めた。直接的に求めるために、得点が2点になる場合の数を求めてみよう。

$$\begin{aligned} & \text{黒玉を含まない場合, (赤玉2個を取り出す場合の数) \times (白玉3個中自由に選べる1個の場合の数)} \\ & + (\text{赤玉3個取り出す場合の数}) \times (\text{赤玉3個中の2個に白玉が一致する場合の数}) \\ & = {}_5C_2 \times {}_3C_1 + {}_5C_3 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 + 10 \times 3 = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{黒玉を含む場合, 赤玉2個取り出すと, 白玉は一意に決まるので, 赤玉2個取り出す場合の数は} \\ & {}_5C_2 = 10 \end{aligned}$$

以上によって、得点が2点になる場合の数は  $60 + 10 = 70$  通り。

$$\text{したがって, 得点が2点になる確率は } \frac{70}{462} = \frac{5}{33}.$$

100703