平成23年度（2011年度）センター試験　数学Ⅰ　数学Ⅰ・数学A　解説

数学　①　[数学Ⅰ　数学Ⅰ・A]　（100点，60分）

数　学　Ⅰ（全問必答）

第１問（配点　25）

［１］ア３　イ２　ウ２　エ２　オ３　カ８　キ２　ク６　ケ３　コ４　サ２　シ３　ス３
　　セ６　ソ２　タ６

＜解説＞

$a=3+2\sqrt{2}$，$b=2+\sqrt{3}$ とすると

$$\frac{1}{a}=\text{ア}-\text{イ}\sqrt{\text{ウ}}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\frac{(3-2\sqrt{2})}{\{3^2-(2\sqrt{2})^2\}}=3-2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{b}=\text{エ}-\sqrt{\text{オ}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{(2-\sqrt{3})}{\{2^2-(\sqrt{3})^2\}}=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\text{カ}\sqrt{\text{キ}}-\text{ク}\sqrt{\text{ケ}}=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})$$

$$=6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}-6+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}+2\sqrt{6}=8\sqrt{2}-6\sqrt{3}$$

である。このとき，不等式

$|2abx-a^2|<b^2$

を満たすxの範囲は

$\text{コ}\sqrt{\text{サ}}-\text{シ}\sqrt{\text{ス}}<x<\text{セ}-\text{ソ}\sqrt{\text{タ}}$

となる。

$|2abx-a^2|<b^2$の両辺をabで割ると，$\left|2x-\frac{a}{b}\right|<\frac{b}{a}$，したがって

$$-\frac{b}{a}<2x-\frac{a}{b}<\frac{b}{a},\ \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)<x<\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=(2+\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})$$

$$=6-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}+6-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{6}=12-4\sqrt{6}$$

したがって，$4\sqrt{2}-3\sqrt{3}<x<6-2\sqrt{6}$

コメント：無理式の変形の問題。分母を有理化するには，無理数を2乗するような式を乗ずること。
ていねいに計算すれば，誤る可能性は少ないであろう。難易度C

［２］チ２　ツ１　テ１　ト２　ナ２　ニ１　ヌ１　ネ６　ノ２　ハヒ13　フヘ37

＜解説＞

nを自然数とし

$$A=n^4-2n^3+3n^2-2n+2$$

とおく。

$$n^4+3n^2+2=(n^2+\text{チ})(n^2+\text{ツ})=(n^2+2)(n^2+1)$$

であるから

$$A=(n^2+\text{テ})(n^2-\text{ト}n+\text{ナ})=(n^2+1)(n^2-2n+2)$$

となる。ただし，チとツの解答の順序は問わない。

さらに

$$n^2-\text{ト}n+\text{ナ}=n^2-2n+2=(n-\text{ニ})^2+\text{ヌ}=(n-1)^2+1$$

である。

したがって，$A<1000$を満たす最大のnはネであり，このときのAの素因数分解は

$$A=\text{ノ}\times\text{ハヒ}\times\text{フヘ}$$

となる。ただし，ハヒとフへの解答の順序は問わない。

$$A=(n^2+1)\{(n-1)^2+1\}<1000$$

$n=6$ならば$A=962<1000$，$n=7$ならば$A=1850$，したがって$A<1000$を満たす最大のnは6である。Aの素因数分解は

$$A=37\times26=2\times13\times37$$

コメント：4次式の因数分解と整数の問題。因数分解は，容易である。素因数分解の意味は理解しておかねばならない。難易度C。

第２問（配点 25）

アイ −1　ウ 4　エ 3　オ 4

<解説>

a，b，cを定数として，$a\neq0$，$b\neq0$とする。xの2次関数

$$y=ax^2+bx+c \qquad ①$$

のグラフをGとする。Gが$y=-3x^2+12bx$のグラフと同じ軸をもつとき

$$a=\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}} \qquad ②$$

となる。さらにGが点$(1,\ 2b-1)$を通るとき

$$c=b-\frac{\text{エ}}{\text{オ}} \qquad ③$$

が成り立つ。以下，②，③のとき，2次関数①とそのグラフを考える。

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \qquad ④$$

$$y=-3x^2+12bx=-3(x-2b)^2+12b^2$$

両者の軸が同じだから，$\dfrac{-b}{2a}=2b$，したがって$a=\dfrac{-1}{4}$　②

④で$x=1$とおけば，$y=\dfrac{-(1-2b)^2}{4}+b^2+c=\dfrac{-1}{4}+b-b^2+b^2+c=b+c-\dfrac{1}{4}=2b-1$

したがって，$c=b-\dfrac{3}{4}$　③

(1)　カキ -3　ク 2　ケ 1　コ 2　サ 1　シ 2　ス 3　セ 4

Gとx軸が異なる2点で交わるようなbの値の範囲は

$b<\dfrac{\text{カキ}}{\text{ク}}$，　$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}<b$

である。さらに，Gとx軸の正の部分が異なる2点で交わるようなbの値の範囲は

$\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}<b<\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}$

である。

<解説>

①に$a=\dfrac{-1}{4}$，$c=b-\dfrac{3}{4}$を代入すると，

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=\frac{-1}{4}(x-2b)^2+b^2+b-\frac{3}{4}\quad ⑤$$

したがって，Gとx軸が異なる2点で交わるためには，$b^2+b-\dfrac{3}{4}=\left(b+\dfrac{3}{2}\right)\left(b-\dfrac{1}{2}\right)>0$

したがって，$b<\dfrac{\text{カキ}}{\text{ク}}=\dfrac{-3}{2}$　⑥，　$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}=\dfrac{1}{2}<b$　⑦

⑤で，$x=0$で$y<0$かつ軸$2b>0$であれば，Gとx軸の正の部分が異なる2点で交わる。

すなわち$b-\dfrac{3}{4}<0$，したがって⑥，⑦から，$\dfrac{1}{2}<b<\dfrac{3}{4}$

(2)　ソ 1　タ 2　チ 3　ツ 2　テ 2　ト 3

$b>0$とする。

$0\leqq x\leqq b$における2次関数①の最小値が$-\dfrac{1}{4}$であるとき，

$b=\dfrac{\text{ソ}}{\text{タ}}$である。一方，$x\geqq b$における2次関数①の最大値が3であるとき，

$b=\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$である。

$b=\dfrac{\text{ソ}}{\text{タ}}$，$b=\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$のときの①のグラフをそれぞれ$G_1$，$G_2$とする。$G_1$を$x$軸方向にテ，$y$軸方向にトだけ平行移動すれば，$G_2$と一致する。

＜解説＞

Gの軸は$2b$だから，$0 \leqq x \leqq b$では，$x=0$で最小値をとる。$x=0$のとき，$y=b-\dfrac{3}{4}=\dfrac{-1}{4}$，

したがって，$b=\dfrac{ソ}{タ}=\dfrac{1}{2}$である。また$x=2b$のとき最大値をとるから，$y=b^2+b-\dfrac{3}{4}=3$，

したがって，$b^2+b-\dfrac{15}{4}=\left(b+\dfrac{5}{2}\right)\left(b-\dfrac{3}{2}\right)=0$，したがって，$b=\dfrac{チ}{ツ}=\dfrac{3}{2}$である。

G_1の頂点は$x=2b=1$，$y=b^2+b-\dfrac{3}{4}=0$で，G_2の頂点は$x=2b=3$，$y=3$だから，

G_1をx軸方向にテ$=2$，y軸方向にト$=3$だけ平行移動すれば，G_2と一致する。

コメント：2次関数の変形の問題で，放物線の軸，頂点，x軸との交点などの基礎事項は遅滞なく表現できなければならない。aが負だから，Gは上に凸の放物線。したがって，x軸と2点で交わるためには，放物線の頂点のy座標が正でなければならない。難易度はB。

第3問（配点　25）

点Oを中心とする円Oの円周上に4点A，B，C，Dがこの順にあり，

AB$=2$，CD$=2\sqrt{3}$，BD$=2\sqrt{3}$，AC$=4$であるとする。

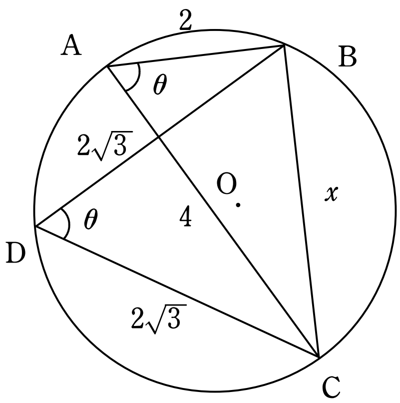

図1

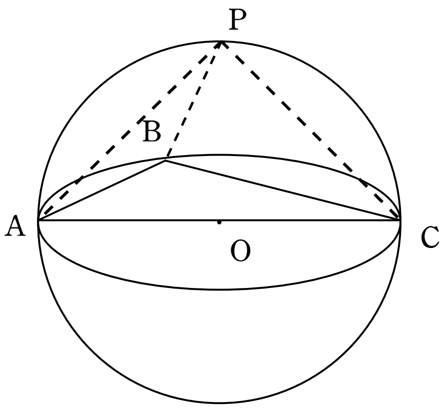

図2

(1)　アイ 20　ウエ 24　オ 1　カ 2　キ 2　ク 3　ケ 2　コ 2　サ 3

$\angle$BAC$=\theta$，BC$=x$とおくと，△ABCに着目して

$x^2=$アイ$-16\cos\theta$

となる。また，△BCDに着目して

$x^2=24-$ウエ$\cos\theta$

となる。よって，$\cos\theta=\dfrac{オ}{カ}$，$x=$キ$\sqrt{ク}$であり，円Oの半径はケである。また，△ABCの面積はコ$\sqrt{サ}$である。

＜解説＞

図1を参照して考える。

△ABCに余弦法則を適用すると，$x^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\theta=20-16\cos\theta$　①

△BCDに余弦法則を適用すると，$x^2=\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}\cos\theta=24-24\cos\theta$　②

①，②から$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$x=2\sqrt{3}$である。

(2)　シ 4　ス 3　セ 3　ソ 2　タ 2　チツ 32

点Oを中心とする半径ケの球を考える。点Pを，この球面上の点で三角錐PABCの体積が最大となるような点とする。

このとき，三角錐PABCの体積は$\dfrac{シ\sqrt{ス}}{セ}$であり，PA＝ソ$\sqrt{タ}$である。

さらに，点Pを中心とし，三角錐PABCを含む最小の球の表面積はチツπである。

＜解説＞

図２を参照して考える。

三角錐の体積は$\dfrac{底面積\times高さ}{3}$だから，高さが最大となる点Pを考える。それは，円Oと平行な平面が球と接する接点がPとなる場合である。するとPOは円Oに垂直であり，三角錐の高さはPO＝2になる。したがって，三角錐PABCの体積は$\dfrac{2\sqrt{3}\times2}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$であり，$\mathrm{PA}^2=\mathrm{PO}^2+\mathrm{AO}^2$だから，$\mathrm{PA}=2\sqrt{2}$である。

さらに，点Pを中心とし，三角錐PABCを含む最小の球は半径$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}=2\sqrt{2}$の球である。球の表面積は$4\pi r^2$だから，最小の球の表面積は$32\pi$である。

コメント：円，球が絡む図形の問題。複雑ではなく，簡明である。図形を描いて，考察していく。余弦の法則，同じ弧に立つ円周角は等しいこと，角錐の体積と球の表面積の公式も知っていなければならない。難易度B。

第４問（配点 25）

a，bは正の実数で，$\dfrac{a}{b}$は整数でないとする。$\dfrac{a}{b}$をこえない最大の整数をm，$\dfrac{b}{a-bm}$をこえない最大の整数をnとする。すなわちm，nは

$$m<\frac{a}{b}<m+1,\qquad n\leqq\frac{b}{a-bm}<n+1$$

を満たす整数である。

(1)　ア 5　イ 1

$a=17$，$b=3$のとき，$m=$ア，$n=$イである。

<解説>

$$m<\frac{17}{3}<m+1 \qquad ①$$

$$n\leqq\frac{3}{17-3m}<n+1 \qquad ②$$

①から$m=5$，②は$n\leqq\dfrac{3}{2}<n+1$となって，$n=1$

(2)　ウエ 14　オ 7

$a=20$，$b=\sqrt{2}$のとき，$m=$ウエ，$n=$オである。

<解説>

$$m<\frac{20}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}<m+1 \qquad ③$$

$$n\leqq\frac{\sqrt{2}}{20-\sqrt{2}\,m}<n+1 \qquad ④$$

③から$m=14$，$\dfrac{\sqrt{2}}{20-\sqrt{2}\,m}=\dfrac{\sqrt{2}}{20-14\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(20+14\sqrt{2})}{400-392}=\dfrac{5\sqrt{2}+7}{2}$だから，

④は$n\leqq\dfrac{5\sqrt{2}+7}{2}<n+1$となり，$n=7$

(3)　カ 2　キ 1　ク 4　ケ 1　コ 3　サ 3　シ 4　ス 3

$\dfrac{9}{4}<\dfrac{a}{b}\leqq\dfrac{7}{3}$であるとき，$m=$カであるから，$\dfrac{a}{b}-m$のとり得る値の範囲は

$$\frac{キ}{ク}<\frac{a}{b}-m\leqq\frac{ケ}{コ}$$

となる。よって，$\dfrac{b}{a-bm}$のとり得る値の範囲は

$$サ\leqq\frac{b}{a-bm}<シ$$

となり，$n=$スと定まる。

<解説>

$2+\dfrac{1}{4}<\dfrac{a}{b}\leqq2+\dfrac{1}{3}$だから，$m=2$，したがって$\dfrac{1}{4}<\dfrac{a}{b}-m\leqq\dfrac{1}{3}$

したがって$\dfrac{1}{4}<\dfrac{a-bm}{b}\leqq\dfrac{1}{3}$だから，$3\leqq\dfrac{b}{a-bm}<4$となり，$n=3$

(4)　セ 7　ソ 3　タ 5　チ 2

$m=n=2$となるときの$\dfrac{a}{b}$のとり得る値の範囲は

$$\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}<\frac{a}{b}\leqq\frac{\text{タ}}{\text{チ}}$$

＜解説＞

$2<\dfrac{a}{b}<3$　　⑤

$2\leqq\dfrac{b}{a-2b}<3$だから，$2\leqq\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}-2}<3$だから，$2\left(\dfrac{a}{b}\right)-4\leqq1<3\left(\dfrac{a}{b}\right)-6$となって，

$\dfrac{a}{b}\leqq\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{a}{b}>\dfrac{7}{3}$である。⑤と合わせて，$\dfrac{7}{3}<\dfrac{a}{b}\leqq\dfrac{5}{2}$

コメント：正の実数，整数の不等式問題である。特段に難しいところはないので，スムーズに完答したい。難易度C。

＜総評＞

第１問　無理数の分数計算問題，整数の４次式の因数分解問題，難易度C

第２問　２次関数と方程式の軸，解，最大値、最小値，移動などの問題，難易度B

第３問　円，球上の点からなる図形の問題，難易度B

第４問　正の実数，整数の不等式問題、難易度C

数学Ⅰ・数学A（全問必答）

第１問（配点　20）

［１］　数学Ⅰ第１問［１］に同じ

［２］

実数a，bに関する条件p，qを次のように定める。

$p:(a+b)^2+(a-2b)^2<5$

$q:|a+b|<1$または$|a-2b|<2$

(1)　チ ③

次の⓪～③のうち，命題「$q \Longrightarrow p$」に対する反例になっているのはチである。

⓪　$a=0$，$b=0$　　　①　$a=1$，$b=0$

②　$a=0$，$b=1$　　　③　$a=1$，$b=1$

＜解説＞

⓪～③のうちqを満足するのは⓪，①，③である。この中で，③はpを満足しない。したがって，命題「$q \Longrightarrow p$」の反例になっているのは③である。

(2)　ツ ④　テ ⑦

命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は「ツ $\Longrightarrow$ テ」である。ツ，テに当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。

⓪　$|a+b|<1$かつ$|a-2b|<2$　　①　$(a+b)^2+(a-2b)^2<5$

②　$|a+b|<1$または$|a-2b|<2$　　③　$(a+b)^2+(a-2b)^2 \leqq 5$

④　$|a+b| \geqq 1$かつ$|a-2b| \geqq 2$　　⑤　$(a+b)^2+(a-2b)^2>5$

⑥　$|a+b| \geqq 1$または$|a-2b| \geqq 2$　　⑦　$(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 5$

＜解説＞

対偶の意味を知っていなければならない。条件p，qの否定をそれぞれ$\overline{p}$，$\overline{q}$とするならば，命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」である。$\overline{q}$とは，「$|a+b|<1$」でも「$|a-2b|<2$」でもないということだから，「$|a+b| \geqq 1$かつ$|a-2b| \geqq 2$」である。$\overline{p}$は「$(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 5$」であることは自明であろう。

(3)　ト ②

p はq であるためのト。

トに当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件ではない

②　十分条件であるが，必要条件ではない

③　必要条件でも十分条件でもない

＜解説＞

「$p \Longrightarrow q$」の対偶の「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は真である。すると，命題「$p \Longrightarrow q$」は真である。すると$p$ はq であるための十分条件。一方，命題「$q \Longrightarrow p$」は真ではない。なぜなら，$|a+b|<1$であっても，$|a-2b|<2$でなければ，pは成立しない。したがってpはqであるための必要条件ではない。したがって②。

コメント：思考力，論理力を要する問題。命題，対偶，必要条件，十分条件などの論理用語の意味と活用を具体的に知っていなければならない。命題の真偽を知るのに，対偶で考えると分かり易くなる場合がある。(3)もそうである。「$p \Longrightarrow q$」の真偽を直接考えると，やや頭が混乱するであろう。対偶の真偽判断の方が容易である。難易度Ｂ＋。

ここで，命題「$p \Longrightarrow q$」，その対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」の真偽をどのように判断すれば良いか，考えてみよう。それを素早く（最も効率的に）できることが必要だ。そのためには，p，qの内容を具体的に吟味することが必要である。

$a+b=x$，$a-2b=y$とおくと，

$p:(a+b)^2+(a-2b)^2=x^2+y^2<5$

$q:|a+b|<1$または$|a-2b|<2$，すなわち$|x|<1$または$|y|<2$

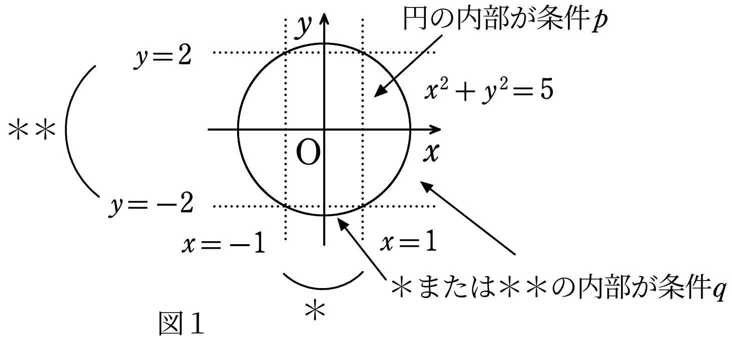

図１

図１に示すように，$|x|=1$と$|y|=2$は円$x^2+y^2=5$の円周上で交わるから，条件pであれば，条件qを満たすことが分かる。図１から，対偶「$\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$」が成立し，命題「$q\Longrightarrow p$」は成立しないことも分かる。教科書によく出てくる命題の関係は図２の通り。

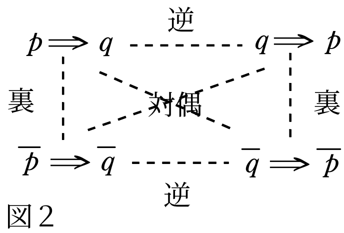

図２

第２問（配点 25点）

数学Ⅰ第２問に同じ

第３問（配点　30）

点Oを中心とする円Oの円周上に4点A，B，C，Dがこの順にある。四角形ABCDの辺の長さは，それぞれ

AB$=\sqrt{7}$，BC$=2\sqrt{7}$，CD$=\sqrt{3}$，DA$=2\sqrt{3}$

であるとする。

(1)　アイ 35　ウエ 12　オ 1　カ 2　キク 21　ケ 7　コ 5　サ 3

$\angle$ABC$=\theta$，AC$=x$とおくと，△ABCに着目して

$x^2=$アイ$-28\cos\theta$

となる。また，△ACDに着目して

$x^2=15+$ウエ$\cos\theta$

となる。よって，$\cos\theta=\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$，$x=\sqrt{\text{キク}}$であり，円Oの半径は$\sqrt{\text{ケ}}$である。

また，四角形ABCDの面積はコ$\sqrt{\text{サ}}$である。

＜解説＞

図３を参照して考える。下の結果から，円Oの半径は$\sqrt{7}$だから，中心OはAC上にある。

この図では，まだそのことが分かっていないとして，OはAC上から外して描いた。

△ABCに対して余弦法則により，

$x^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\theta=7+28-28\cos\theta=35-28\cos\theta$

∠ADC$=\pi-\theta$だから，△ACDに対して余弦法則により，

$x^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\cos(\pi-\theta)=12+3+12\cos\theta=15+12\cos\theta$

したがって，$35-28\cos\theta=15+12\cos\theta$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$x^2=21$，$x=\sqrt{21}$

∠AOC$=2\theta$だから，円Oの半径は$\dfrac{x}{2}\times\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{7}$

△ABCの面積は$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\theta=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$，△ACDの面積は$\dfrac{1}{2}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DC}\sin(\pi-\theta)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

　したがって，四角形ABCDの面積は二つの三角形の面積の和で，$5\sqrt{3}$。

(2)　シス 90　セソ 90　タ 7　チ ②　ツ 7

　点Aにおける円Oの接戦と点Dにおける円Oの接戦の交点を Eとすると，∠OAE＝シス°である。また，線分OEと辺ADの交点をFとすると，∠AFE＝セソ°であり，OF・OE＝タである。

　さらに，辺ADの延長と線分OCの延長の交点をGとする。点Eから直線OGに垂線を下し，直線OGとの交点をHとする。4点E，G，チは同一円周上にある。チに当てはまるものを次の⓪～④から一つ選べ。

　⓪　C，F　　①　H，D　　②　H，F　　③　H，A　　④　O，A

したがってOH・OG＝ツである。

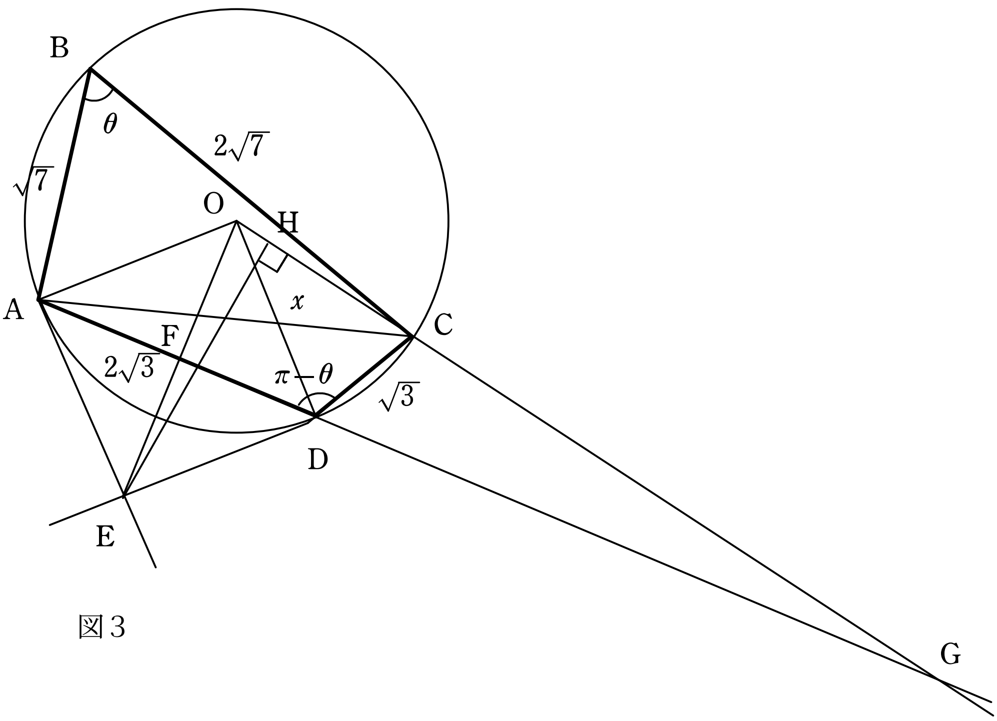

図３

＜解説＞

　Aにおける接線は当然に円の中心OとAを結ぶ直線に垂直だから，∠OAE=90°である。

同様に∠ ODE=90°，∠OAD＝∠ODA，だから∠EAD＝∠EDA，したがってEA＝ED,

したがって，△OAE≡△ODE，したがって△AEF≡△DEF，したがって∠AFE＝90°。

また，△OAF∽△OAEだから，OA：OE＝OF：OA，　OF・OE＝OA^2＝7である。

E，Gと同一円周上にある点は，EGを弦とすれば，他の2点はそれぞれ弦EGの上にできる円周角を構成する。この円周角は等しいから，EGの上にできる角で等しい点を見ると，∠EHG＝∠EFG＝90°だから，FとHがE，Gと同一円周上にある。すると△OEH∽△OFGだから，OH：OE＝OF：OG，OH・OG＝OF・OE＝7

コメント：図を描いて考えることが必須である。(1)を考えているうちに，円の中心はAC上にあると気づくだろう。そうしたら，もう一度そのような図を描いて，より問題に対する理解を深めると良い。

この問題では、三角関数，余弦の法則，円周角などの平面図形に関する基礎事項の理解が必要であるが，難解ではない。図３で，ADの延長線とOCの延長線の交点は円から遠くなるので，扱いにくいので注意する。難易度はC。

第４問（配点 25）　ア２　イ３　ウ１　エ３

１個のさいころを投げるとき，4以下の目が出る確率pは$\frac{ア}{イ}$であり，5以上の目が出る確率qは$\frac{ウ}{エ}$である。

以下では，１個のさいころを8回繰り返して投げる。

(1)　オカ 56　キク 21　ケコ 35

8回の中で4以下の目がちょうど3回出る確率はオカp^3q^5である。

第1回目に4以下の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど2回出る確率はキクp^3q^5である。

第1回目に5以上の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど3回出る確率はケコp^3q^5である。

＜解説＞

8回の中で4以下の目がちょうど3回出る場合の数は，8回の試行の中で4以下の目が3回出る組み合わせの数だから，${}_8C_3=\frac{8!}{(8-3)!3!}=56$。それぞれの場合が出る確率は$p^3q^5$だから，ちょうど3回出る確率は$56p^3q^5$である。

第1回目に4以下の目が出る確率はpであり，次の7回の中で4以下の目がちょうど2回出る場合の数は，7回の試行の中で4以下の目が2回出る組み合わせの数だから，${}_7C_2=\frac{7!}{(7-2)!2!}=21$。それぞれの場合が出る確率は$p^2q^5$だから，第1回目に4以下の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど2回出る確率は$p\times{}_7C_2p^2q^5={}_7C_2p^3q^5=21p^3q^5$である。

第1回目に5以上の目が出る確率はqであり，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど3回出る場合の数は，${}_7C_3=\frac{7!}{(7-3)!3!}=35$だから，第1回目に5以上の目が出て，さらに次の7回の中で4以

下の目がちょうど3回出る確率は$35p^3q^5$である。

(2)　サ ②　シ ⑥

次の⓪～⑦のうちオカに等しいものは，サとシである。ただし，サとシは解答の順序を問わない。

⓪　${}_7C_2\times{}_7C_3$　①　${}_8C_1\times{}_8C_2$　②　${}_7C_2+{}_7C_3$　③　${}_8C_1+{}_8C_2$

④　${}_7C_4\times{}_7C_5$　⑤　${}_8C_6\times{}_8C_7$　⑥　${}_7C_4+{}_7C_5$　⑦　${}_8C_6+{}_8C_7$

＜解説＞

(1)の問題から誘導される問題である。8回の中で4以下の目がちょうど3回出る確率は，第1回目に4以下の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど2回出る確率と，第1回目に5以上の目が出て，さらに次の7回の中で4以下の目がちょうど3回出る確率の和になる。

したがって，${}_8C_3={}_7C_2+{}_7C_3$である。また，${}_7C_2={}_7C_5$，，${}_7C_3={}_7C_4$である。

(3)　ス 3　セ 5　ソタ 10　チツテ 112　トナニ 729

得点を次のように定める。8回の中で4以下の目がちょうど3回出た場合，

n＝1，2，3，4，5，6について，第n回目に初めて4以下の目が出たとき，得点はn点とする。また，4以下の目が出た回数がちょうど3回とならないときは，得点を0点とする。

このとき，得点が6点となる確率は$p^{ス}q^{セ}$であり，得点が3点となる確率はソタ$p^{ス}q^{セ}$である。

また，得点の期待値は$\dfrac{チツテ}{トナニ}$である。

＜解説＞

6点になるのは，6回目で初めて4以下の目が出て，7，8回目も4以下の目が出る場合だから，その確率は，q^5p^3である。3点となるのは，3回目で初めて4以下の目が出て，4回目からちょうど2回4以下の目がでる場合だから，その確率は，$q^2p{}_5C_2p^2q^3=\dfrac{5!}{(5-2)!2!}p^3q^5=10p^3q^5$。

n点になるのは，n回目で初めて4以下の目が出て，$(n+1)$回目からちょうど2回4以下の目が出る場合で，その確率は，$q^{n-1}p{}_{(8-n)}C_2p^2q^{(8-n)-2}={}_{(8-n)}C_2p^3q^5$。したがって，得点の期待値は

$$p^3q^5\sum_{n=1}^{6}n{}_{(8-n)}C_2=p^3q^5\{{}_7C_2+2{}_6C_2+3{}_5C_2+4{}_4C_2+5{}_3C_2+6{}_2C_2\}$$

$$=p^3q^5\{21+30+30+24+15+6\}=126\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{112}{729}$$

コメント：場合の数と確率の問題。ここでは，場合の数を組み合わせ問題として扱うことに，直ちに気がつかなければならない。そのためには各種の確率の問題をこなして，表現（形）の背景にある，本質問題は何かを見極める力を身につけることが必要である。

(1)では，8回の試行の中で4以下の目が3回でる場合の数を考える必要がある。これは以下のような場合の数と表現こそ違え，同じである。

①異なる8個の中から，3個を取り出す組み合わせの数

②黒石，白石が混じっている容器の中から1個ずつ石を取り出して戻す操作を8回行って，黒（あるいは白）が3回出る場合の数

③さいころを8回投げて，1（あるいは2，3，4，5，6）の目が3回出る場合の数

④8個のさいころを同時に投げて，1（あるいは2，3，4，5，6）の目が3個出る場合の数

⑤8個のさいころを同時に投げて，4以下の目がちょうど3個出る場合の数

このように，表現こそ違え，場合の数は「8個から3個を選ぶ場合の数」に一致することを見抜く力が大事である。試験問題の表現（つまりは，問題の設定状況）は多様であっても、数学的本質は同一であれば，本質を理解していれば良いということになる。ここで，8をn，3をm（$m<n$）と一般化しても，同じである。

⑵では，組み合わせの分解の問題である。上記①を例にとると，最初の1個を確定する。すると，場合の数は，次の7個から3個を取り出す組み合わせの数と，次の7個から2個を取り出す組み合わせの数の和になる。なぜなら，最初の1個を含まない組み合わせの場合と含む組み合わせの場合の2つに分かれるからである。すなわち${}_8C_3={}_7C_2+{}_7C_3$である。

⑶は⑴，⑵を参考にして，n点となる確率を求める。誘導的に問題ができていることに気づくと良い。

難易度A。

＜総評＞

第１問　[1] 無理数の分数計算問題，数学Ⅰの第１問 [1]に同じ。難易度C

[2] ２次式で定まる集合と論理の問題。難易度B

第２問　数学Ⅰの第２問に同じ。２次関数と方程式の軸，解，最大値，最小値，移動などの問題。難易度Ｂ

第３問　円周上の点からなる図形の問題。難易度B

第４問　組み合わせによる場合の数と確率の問題。難易度A

110306