# 平成27年度(2015年度)センター試験 数学 数学・数学A 解説

# 数学 「数学 数学・数学A] (いずれか選択 100点,60分)

数 学 (全問必答)

第1問(配点 25)

<解答>

[1]

- (1) ア2

[2]

- (1) セ①
- (1) ソ3 タチ29

# <解説>

[1]

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 + kx - 8 = (x^2 + ax + 4)(x^2 + bx - c) = x^4 + (a + b)x^3 + (4 - c + ab)x^2 + (4b - ac)x - 4c$$

(1)

上式の左辺,右辺の係数を比較して,

$$-4c=-8$$
,  $c=2=7$ 

(2)

$$a+b=5$$
 ,  $4-c+ab=2+ab=6$  ,  $b=5-a$  ,  $ab=a(5-a)=4$  ,  $a^2-5a+4=(a-4)(a-1)=0$   $a=4$ のとき $b=1$  ,  $a=1$ のとき $b=4$  , したがって $a < b$ ならば ,  $a=1=$ イ ,  $b=4=$ ウ  $k=4b-ac=16-2=14=$ エオ

$$a \ge b$$
ならば, $a=4=$ カ, $b=1=$ キ, $k=4b-ac=4-8=-4=$ クケ

(3)

$$a < b$$
のとき ,  $(x^2+x+4)(x^2+4x-2)=0$ 

$$x^2+x+4=\left(x+rac{1}{2}
ight)^2+rac{15}{4}>0$$
 ,  $x^2+4x-2=0$ から ,  $x=-2\pm\sqrt{6}$  ,

したがって を満たす正の実数xは,a < bのとき $-2 + \sqrt{6} =$ コサ $+\sqrt{2}$ 

$$a \ge b$$
のとき ,  $(x^2+4x+4)(x^2+x-2)=0$ 

$$x^2+4x+4=0$$
,  $(x+2)^2=0$ ,  $x=-2$ 

したがって を満たす正の実数xは, $a \ge b$ のとき  $1 = \lambda$ 

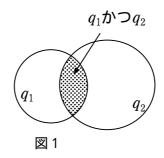
[2]

(1)

命題「 $(p_1$ かつ $p_2$ )  $\Longrightarrow$   $(q_1$ かつ $q_2$ )」の対偶は,命題「 $(\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2}) \Longrightarrow (\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2}$ )」である。この段階で,正答は@または@であることがわかる。

次に  $(\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2}$ )は  $(q_1$ かつ $q_2$ )の否定であることから , 正答は@であることがわかる。

しかし,この思考の流れは,4択問題を効率よく解答するものであって,正答を理解しているものではない。図 1 によって理解しよう。 $(\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2}$ )は,図 1 のドット部以外であるから, $(\overline{q_1}$ または $\overline{q_2}$ )である。同様に, $(\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2}$ )は, $(\overline{p_1}$ または $\overline{p_2}$ )である。したがって,正答は@である。これらは,数学の教科書にていねいに記載されている。



(2)

30以下の自然数の中で,

 $p_1: n$  は素数  $\rightarrow$  2,3,5,7,11,13,17,19,23,29

 $p_2: n+2$  は素数  $\rightarrow$  3,5,9,11,15,17,21,27,29

 $q_1: n+1$ は5の倍数  $\rightarrow$  4, 9, 14, 19, 24, 29

 $q_2: n+1$ は6の倍数  $\rightarrow$  5, 11, 17, 23, 29

 $(p_1$ かつ $p_2$ )の n は3, 5, 11, 17, 29

 $(q_1$ かつ $q_2$ )のnは5, 11, 17, 23

命題「 $(p_1$ かつ $p_2$ )  $\Longrightarrow$   $(\overline{q_1}$  かつ $q_2$ )」を満たさないnは3, 29したがって,  $\mathcal{Y}=3$ ,  $\mathcal{P}=29$  はこの命題の反例となる。

## コメント:

[1]は多項式の因数分解と2次方程式の問題。[2]は集合と命題の問題。(1)では命題の対偶,和集合,補集合等の論理を理解しておく。教科書を繰り返し読んで,的確に理解する。

# 第2問(配点25)

#### <解答>

- (1) ア1 イ3 ウ3 エ1 オ2 カ2
- (2) +6 06 52 32 54
- (3)  $\flat \lambda \lambda 1 \quad \forall 2 \quad \forall \beta \lambda \lambda \beta \quad \ne 4$

#### < 解説 >

 $y=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$  , したがってグラフの頂点の座標は $(1\ ,\ 3\ )=(P\ ,\ T)$  のグラフをx 軸方向にp , y 軸方向にq だけ平行移動したグラフは  $y=f(x)=-(x-1-p)^2+3+q$ 

(1)

 $2 \le x \le 4$ における f(x)の最大値が f(2)であるということは , 頂点のx座標が2以下であればよい。

したがって,  $1+p\leq 2$ , ∴ p ウェ すなわち  $p\leq 1$ 

 $2 \le x \le 4$ におけるf(x)の最小値がf(2)であるということは,頂点のx座標が3以上だから  $3 \le 1+p$ , $\therefore p$  オ カ すなわち  $p \ge 2$ 

(2)

のグラフが
$$(-2, 0)$$
を通るとき, $-(-2-1-p)^2+3+q=-p^2-6p-6+q=0$ 

$$\therefore q = p^2 + 6p + 6 = p^2 + \mp p + 7, \ \text{Uttilde}$$

$$f(x) = -(x-1-p)^2 + 3 + p^2 + 6p + 6 = -(x-1-p)^2 + (p+3)^2$$

$$= -(x-1-p+p+3)(x-1-p-p-3) = -(x+2)(x-2p-4) = -(x+7)(x-3p-4)$$

(3)

2次不等式f(x) > 0の解が-2 < x < 3になるためには,2p+4=3だから,

$$p = \frac{-1}{2} = \frac{y \chi}{t^2}$$
,  $q = p^2 + 6p + 6 = \frac{1}{4} - 3 + 6 = \frac{13}{4} = \frac{y g}{f}$ 

#### コメント:

2次関数のグラフの問題。頂点の座標,頂点の移動,最大値,最小値等の基本的なことは的確に理解していなければならない。

# 第3問(配点 30)

### <解答>

ア3 イ4 ウ7 エ4 オ7 カキ21 ク4 ケー コ7 サ4 シ5 ス7 セ7 ソ3 タチツ161 テ7 ト2 ナニヌ161 ネ7 ノハヒ112 フへ25

## <解説>

図1を参照する。 ABCにおいて,余弦定理により

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4^2 + 7^2 - (\sqrt{23})^2}{2 \times 4 \times 7} = \frac{42}{56} = \frac{3}{4} = \frac{7}{1}$$

$$\sin^2 \angle ABC = 1 - (\cos \angle ABC)^2 = \frac{7}{16}$$
,  $\therefore \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 

$$AD = AB \sin \angle ABC = 4 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

BE=BC cos 
$$\angle ABC = 7 \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = \frac{5}{7}$$

$$\angle DAE = \pi - \angle BAD$$
, したがって,

$$\cos \angle DAE = \cos(\pi - \angle BAD) = \cos\pi\cos\angle BAD = -\cos\angle BAD = \frac{-\sqrt{7}}{4} = \frac{\cancel{\tau}\sqrt{\square}}{\cancel{t}}$$

$$AE=BE-BA=\frac{21}{4}-4=\frac{5}{4}$$
, しかるに  $ABD \infty$   $AEFだから$ ,

BA: AF=DA: AE, 4: AF=
$$\sqrt{7}: \frac{5}{4}, \therefore AF = \frac{5\sqrt{7}}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{12}$$

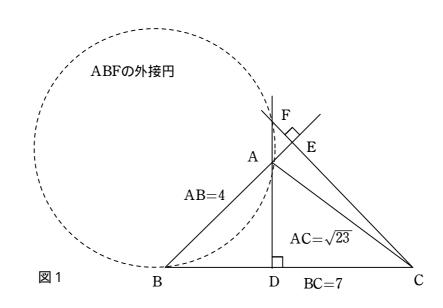
ABFについて,余弦定理により,

ABFの外接円の半径をRとして,正弦定理により, $\frac{AB}{\sin \angle AFB}$ =2R

$$\sin \angle AFB = \frac{BD}{BF} = 3 \times \frac{7}{3\sqrt{161}} = \frac{7\sqrt{161}}{161} = \frac{\sqrt{161}}{23} \text{ the } ,$$

$$R = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{23}{\sqrt{161}} = \frac{2\sqrt{161}}{7} = \frac{\text{ト}\sqrt{\text{ナニヌ}}}{\text{ネ}}$$

$$-\frac{ABD}{AEF}$$
の面積  $=\left(\frac{AB}{AF}\right)^2 = \left(\frac{7}{5\sqrt{7}} \times 4\right)^2 = \frac{112}{25}$ 



### コメント:

三角関数を用いた基本的な問題。正弦定理,余弦定理を良く覚えておくこと。全体として誘導的に 構成されているので,前の結果を利用しながら,ていねいに計算することを心がけたい。

# 第4問(配点20)

# <解答>

[1]

- (1) ア4
- (2) イウエオ0235(順序は問わない)
- (3) カキ02(順序は問わない)

[2]

- (1) ク7
- (2) ケ7

#### <解説>

[1]

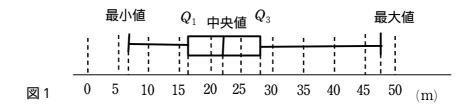
(1)

データ数が40だから,第1四分位数は10,第2は20,第3は30である。下から30人目が含まれる階級は問題図1から,25m以上30m未満である。

(2)

箱ひげ図の意味は図1の通り。したがって,

- ①は,Q<sub>3</sub>の位置が違う。
- ①は正しい。
- ②は, $Q_1$ の位置が違う。
- ③は, $Q_1$ , $Q_3$ の位置が違う。
- ④は正しい。
- ⑤は $Q_1$ の位置が違う。



(3)

- ⑩ 箱ひげ図aは,最初の箱ひげ図と比べて, $Q_1$ の位置が大きくなっている。どの生徒の記録も下がったとはいえない。したがって,分析結果Aとは矛盾する。
- ① 箱ひげ図b は,最初の箱ひげ図よりも大きい方へ移動しているので,どの生徒の記録も伸びた可能性がある。したがって分析結果Bと矛盾するとはいえない。
- ② 箱ひげ図cは最大値が小さくなっているから,上位 $\frac{1}{3}$ に入るすべての生徒の記録が伸びたとはいえない。したがって,分析結果Cとは矛盾する。
- ③ 箱ひげ図dは最小値と $Q_1$ は下がり,最大値と $Q_3$ が大きくなっているから,分析結果Dの可能性があるので,矛盾するとはいえない。

[2]

(1)

データxとy の相関係数の定義は, $r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ ,ここで $s_{xy}$  は共分散, $s_x$ , $s_y$  はx,y の標準偏差である。 したがって, $r=\frac{54.3}{8.21 \times 6.98}$  = 0.95

(2)

欠席していた生徒のデータは1回目も2回目も平均値に等しいので,共分散は小さくなる。すなわち,A < Bである。一方,標準偏差も小さくなり,相関係数は変化しない。すなわち,C = Dである。もう少し厳密に考える。

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \{ (x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + \cdots + (x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y}) \}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \{ (x_1 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2 \}}$$
,  $s_y = \sqrt{\frac{1}{n} \{ (y_1 - \overline{y})^2 + \dots + (y_n - \overline{y})^2 \}}$ 

共分散はデータ数がnからn+1になるが,ここでは $(x_{n+1}-\overline{x})(y_{n+1}-\overline{y})=0$ だから,共分散は小さくなる。一方,相関係数は共分散の $\frac{1}{n}$ と標準偏差の $\sqrt{\frac{1}{n}} imes \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$ が相殺し,ここでは, $x_{n+1}-\overline{x}=0$ , $y_{n+1}-\overline{y}=0$  だから,変化しない。

## コメント:

統計の基本的な問題。ヒストグラム,箱ひげ図,散布図,分散,標準偏差,共分散などの定義と意味は的確に理解していること。すべて,数学 に記載されている基本事項だから,繰り返し読んで理解する。

統計の考え方や数学はどの分野に進もうとも,数学の中では社会人として最も必要となり,役に立つものである。二次方程式の解の公式は忘れても,平均,分散,標準偏差,中央値,相関などは,社会生活の中にしばしば登場するので,覚えておきたい。

### <総評>

新課程の数学 の初年度のセンター試験問題である。データの扱いと統計が数学 に加わった。データの扱いと統計は,社会人として最も必要になる数学分野だから,妥当だろう。

第1問 [1]は多項式の因数分解と2次方程式の解の問題。難易度はC [2]は集合と命題の問題。難易度はB

第2問 2次関数のグラフと最大値,最小値の問題。難易度はB

第3問 三角形の性質を正弦定理,余弦定理によって明らかにしていく。難易度はB-

第4問 統計の問題。基本事項をきちんと理解していることが必要だが,相関係数等の問題が難しい かも知れない。難易度B+

数学 ・数学 A (注) この科目には,選択問題があります。(17ページ参照。) 第1問(必答問題)(配点 20)

<解答>

ア1 イ3

- (1) ウ3 エ1 オ2 カ2
- (2) + 7 1 + 7 + 7 + 13 + 4

<解説>

数学 第2問(1),(3)に同じ

第 2 問 (必答問題) (配点 25)

<解答>

[1]

(1) ア1

(2) イ3 ウエ29

[2]

オ7 カ3 キ2 ク3 ケ3 コサ14 シ7 ス2 セ7

<解説>

[1]

数学 第1問[2]に同じ

[2]

ABCについて余弦定理により,

 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos \angle ABC = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120^\circ = 9 + 25 + 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} = 49$ 

したがって,AC=7=オ, $\sin \angle ABC = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 

ABCについて正弦定理により ,  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle BCA}$  ,

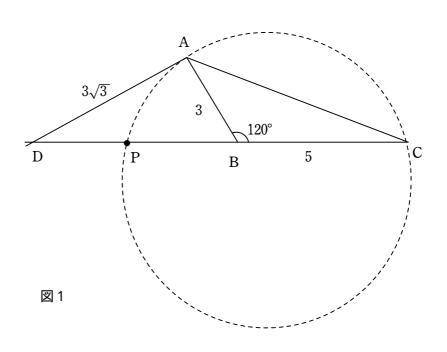
∴  $\sin \angle BCA = \frac{3}{7}\sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{7\sqrt{5}}{3}$ 

APCについて正弦定理により ,  $\frac{AP}{\sin \angle ACP} = \frac{14}{3\sqrt{3}}$  AP = 2R ,

APの最大値はAD= $3\sqrt{3}$  , 最小値はAPがBDの垂線となるときだから ,  $3\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 

したがって,Rの最大値は $\frac{1}{2} \times \frac{14}{3\sqrt{3}} \times 3\sqrt{3} = 7 =$ セ,最小値は $\frac{1}{2} \times \frac{14}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2} = \frac{\cancel{\flat}}{\cancel{\gimel}}$ 

すなわち ,  $\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{Z}} = \frac{7}{2} \le R \le 7 =$ セである。



#### コメント:

[2]は余弦定理,正弦定理を利用する図形の問題。  $\angle ACP$  が一定だから,外接円R の範囲はAP の 値の範囲によって決まることに気づくことが必要である。

# 第3問(必答問題)(配点 15)

数学 第4問に同じ。ただし,[2]の(2)が数学 · 数学Aには含まれていない。

### <解答>

[1]

- (1) ア4
- (2) イウエオ0235(順序は問わない)
- (3) カキ02(順序は問わない)

[2]

ク7

# 第4問~第6問は、いずれか2問を選択し、解答しなさい。

# 第 4 問 (選択問題) (配点 20)

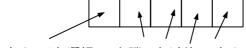
# <解答>

- (1) アイ 48
- (2) ウエ 12
- (3) オ2
- (4) カ4
- (5) キ4 クケ12 コサ16
- (6) シス 26

### <解説>

(1)

左端の正方形の色の選択に3通り、その後は2色から選択するので、 $3\times2\times2\times2\times2=48=$ アイ通り。



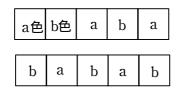
3色から1色選択 左隣の色以外の2色から1色選択

(2)

2 色塗り分けの場合は左右対称であるから  $,_3C_2 \times 2=3 \times 2=6$  通り。

3 色塗り分けの場合には左端と右端が同色であって,中央が異色だから, $3\times2=6$  通り。

したがって,塗り方が左右対称となるのは,6+6=12=ウエ通り



a,bの選択に $_3C_2$ 通り

a.bを入れ替えて2通り

2色塗り分けの場合

a c b c a

aの選択に3通り

bの選択に2通り

3色塗り分けの場合

(3)

青色と緑色の2色だけで塗り分けるのは,左端が青の場合と緑の場合の2=オ通り

(4

赤色の正方形が3 枚ということは,左端,中央,右端が赤色で決まり,残る2 枚を $2\times2$  通りに塗り分けるので,4=カ通り

(5)

左端が赤の場合,赤緑青緑青,赤青緑青緑の2通り

右端が赤の場合も同様に2 通り,したがって,どちらかの端が赤色に塗られるのは,2+2=4=キ通り 左から2 番目が赤の場合,左端が青か緑の2 通り,右側が緑青緑か青緑青の2 通り, $2\times2=4$ 通り 同様に左から3番目が赤の場合,4 番目が赤の場合もそれぞれ4 通り,したがって端以外の1枚が赤色に塗られるのは,4+4+4=12 通り

よって,赤色に塗られる正方形が1枚あるのは,4+12=16=コサ通りある。

(6)

赤色が0枚の場合は,2通り

赤色が1枚の場合は,16通り

赤色が3 枚の場合は,左端,中央,右端が赤で,残る2 枚を緑と青の2 色からの選択で $2\times2=4$  通りしたがって,赤色が2 枚の場合は,48-2-16-4=26=シス通りある。

## コメント:

確率の基礎となる場合の数の問題である。一定の方法で解答できる問題は、その方法に習熟していれば,ほぼ正答できるが,確率の問題は,考え方を案出しなければならない。その分,面白いのだが,試験等では厳しい。考え方が初めから浮かぶわけではないので,図などを書きながら,具体的に着手してみよう。すると,考え方が具体的に見えてくる。

第5問(選択問題)(配点 20)

### <解答>

- (1) ア2 イ3 ウ7 エオ24
- (2) カキ 21 クケコ 126
- (3) サ9 シスセ 103
- (4) ソタチツ 1701

#### <解説>

(1)

a=756を素因数に分解する。素数2で2 回除算でき,次に素数3で3 回除算でき,素数7 が残る。  $a=756=2^2\cdot3^3\cdot7=2^7\cdot3^7\cdot$ ウ

約数は,素数2の個数が0, 1, 2個,素数3が0, 1, 2, 3個,素数7が0, 1個の積だから,aの正の約数の個数は $(2+1)\times(3+1)\times(1+1)=24=$ エオ個

教科書には,「自然数Nの素因数分解が $N=p^a\cdot q^b\cdot r^c\cdot \dots$  となるとき,Nの正の約数の個数は  $(a+1)(b+1)(c+1)\cdot \dots$  である。」のように記載されている。これは覚えておくこと。

 $\sqrt{am}=\sqrt{2^2\cdot 3^3\cdot 7m}=6\sqrt{3\cdot 7m}$  ,  $\sqrt{am}$  が自然数であるためには ,  $\sqrt{3\cdot 7m}$  が自然数でなければならない。  $m=3\times 7=21$ のとき ,  $\sqrt{3\cdot 7m}=\sqrt{3^2\cdot 7^2}=3\cdot 7=21$ と最小の自然数になるから ,  $\sqrt{am}$  が自然数となる最小のmはm=21= カキである。

 $m=21k^2$ としたとき ,  $\sqrt{am}=6\sqrt{21m}=126k=$ クケコkである。

(3)

126k-11l=1 ,  $126=11\times11+5$ だから ,  $126k=11\times11k+5k=11j+11n+1=11(j+n)+1$ となる。 ただし , l=j+n ,  $11\times11k=11j$  , 5k=11n+1で , j , nは自然数である。 5k=11n+1となるような最小のkを探す。 nを1から変化させて , 11n+1が5の倍数になるか試す。 n=4のときk=9=サで5の倍数となる。 すると , j=11k=99 , l=99+4=103=シスセである。 (4)

 $\sqrt{am}=126k$ を11で割ると1余る自然数で最小となるのは(3)からk=9のときだから,そのような最小の自然数は, $m=21k^2=21\times 81=1701=$  ソタチツ

#### コメント:

整数の問題。整数の問題は,解答方針の着眼,着想が必要であり,そのための時間がかかるという点で,難しさがある。教科書をよく読んで,整数問題に対する感覚を磨いておこう。

# 第6問(選択問題)(配点20)

<解答>

アイ10 ウ5 エオ10 カ3 キ3 ク5 ケ2 コ5 サ5 シ5 ス4

# <解説>

図1を参照する。

ほうべきの定理により, CE・CB=CA・CD=5×2=10=アイ

$$CB = \sqrt{5}$$
 だから ,  $CE = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ 

したがって,BE=CE-CB= $2\sqrt{5}$   $-\sqrt{5}$   $=\sqrt{5}$   $=\sqrt{9}$ 

Gは ACEの重心だから,AG: GB=2:1,したがってAG= $\frac{2}{3}$ AB= $\frac{10}{3}$ = $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ である。

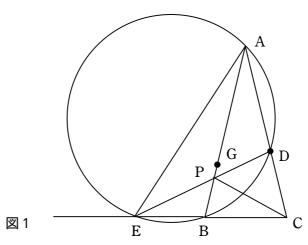
ECDと直線ABに関して,メネラウスの定理を適用すると, $rac{PD}{FP}\cdotrac{CA}{DA}\cdotrac{BE}{CB}{=}1$ ,

$$\frac{CA}{DA} = \frac{5}{3}$$
 ,  $\frac{BE}{CB} = 1$ だから ,  $\frac{PD}{EP} = \frac{3}{5} = \frac{+}{2}$ 

弧BD上に立つ円周角だから、∠CAB=∠CED、したがって ABC∞ EDC

∴ DE=CE= $2\sqrt{5}$ = $\sqrt{3}$ 

, から, 
$$EP = \frac{5}{8}DE = \frac{5}{8} \times 2\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{\text{サ\sqrt{y}}}{\text{ス}}$$



メネラウスの定理を理解していない場合は、以下のような解法もある。

AEPの面積= ACPの面積=Sとおくと, $\mathrm{AD}=3$ , $\mathrm{DC}=2$  だから,  $\mathrm{ADP}$ の面積 $=\frac{3}{5}S$ 

ADPの面積: AEPの面積= $\frac{3}{5}S:S=\frac{3}{5}:1=PD:EP$ ,  $\therefore \frac{DP}{EP}=\frac{3}{5}=\frac{1}{7}$ 

### コメント:

図形の問題。まずは、ほうべきの定理の活用が必要だ。もし、この定理を覚えていなかったら、どうなるか。その場合には、本問の問題構成とは逆になる。 ABC∞ EDCから、BEを求めることになる。また重心の位置やメネラウスの定理について理解しておくことが必要である。

## <総評>

新課程の数学 ・数学Aの初年度のセンター試験問題である。問題のレベルは,教科書を理解していれば解ける基本的なものである。ただ,時間制約があるので,習熟のレベルによって差異がでよう。

第1問 数学 第2問(1),(3)に同じ。

第2問 [1]数学 第1問[2]に同じ。

[2]図形の問題。難易度はB

第3問 数学 第4問に同じ。ただし,[2]の(2)が数学 · 数学Aには含まれていない。

第4問 確率の基礎となる場合の数の問題。難易度Bだが,時間をかけ過ぎないこと。

第5問 整数の問題。着想が必要だ。難易度B

第6問 図形の問題。難易度はB-

150719