平成30年度（2018年度）センター試験　数学Ⅰ　数学Ⅰ･数学Ａ　解説

数学　①　[数学Ⅰ　数学Ⅰ･数学A]　（いずれか選択　100点，60分）

数　学　Ⅰ（全問必答）

第１問（配点　25）

＜解答＞

[１]

(1)　ア５　イ６　ウエ14　オ２

(2)　カ８　キクケ -10　コ５　サシ65　ス２

[２]

(1)　セ２　ソ０

(2)　タ２　チ０

＜解説＞

[１]

(1)

xを正の実数とし

$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$

とおく。整数nに対して

$(x+n)(n+5-x)=xn+x(5-x)+n^2+n(5-x)=x(5-x)+n^2+5n=x(5-x)+n^2+$ア$n$

であり，したがって，$X=x(5-x)$とおくと

$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)=x(5-x)(x+1)(5+1-x)(x+2)(5+2-x)$

$=X(X+6)(X+14)=X(X+$イ$)(X+$ウエ$)$

と表せる。

$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$のとき，$X=x(5-x)=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\times\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}=\dfrac{25-17}{4}=2=$オであり，

$A=X(X+6)(X+14)=2\cdot8\cdot16=2^8=2^{カ}$である。

(2)

$(x+1)(x+2)(6-x)(7-x)=-16$を満たすとき，

$x(5-x)(x+1)(x+2)(6-x)(7-x)=-16x(5-x)=-16X=X(X+6)(X+14)$だから，

$(X+6)(X+14)=-16$，$\therefore X^2+20X+100=(X+10)^2=0$，$\therefore X=x(5-x)=-10=$キクケ，

したがって，このとき $x=\dfrac{5\pm\sqrt{65}}{2}=\dfrac{コ\pm\sqrt{サシ}}{ス}$である。

[２]

(1)

全体集合Uを$U=\{x\mid x$は20以下の自然数$\}$とし，次の部分集合A，B，Cを考える。

$A=\{x\mid x\in U$かつxは20の約数$\}$

$B=\{x\mid x\in U$かつxは3の倍数$\}$

$C=\{x \mid x\in U$ かつ x は偶数$\}$

集合Aの補集合を$\overline{A}$と表し，空集合をϕと表す。

集合の関係

(a) $A\subset C$

(b) $A\cap B=\phi$

の正誤について調べる。

$A\ni 5\not\subset C$，したがって(a)は誤り。

20 の約数には3の倍数はない。したがって，$A\cap B$ は空集合であり，(b)は正しい。

したがって正誤の組み合わせとして，セ＝②が正しい。

集合の関係

(c) $(A\cup C)\cap B=\{6\,,12\,,18\}$

(d) $(\overline{A}\cap C)\cup B=\overline{A}\cap(B\cup C)$

の正誤について調べる。

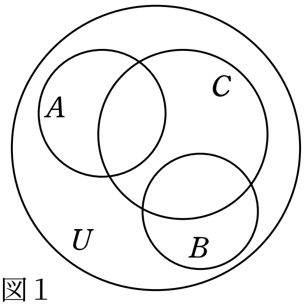

図１

図１から $(A\cup C)\cap B=C\cap B=\{6\,,12\,,18\}$，$\therefore$ (c)は正しい。

$\overline{A}\cap(B\cup C)=(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap C)=B\cup(\overline{A}\cap C)$，$\therefore$ (d)は正しい。

したがって正誤の組み合わせとして，ソ＝⓪が正しい。

(2)

$p:|x-2|>2$，　$q:x<0$，　$r:x>4$，　$s:\sqrt{x^2}>4$

条件pから，$x-2>2$または$x-2<-2$だから，$x>4$または$x<0$

したがって，qまたはrであればpが成立する。pであれば，qまたはrが成立する。

したがって，qまたはrであることはpであるための必要十分条件である。タ＝②

条件sから，$x^2>16$，したがって$x>4$または$x<-4$

したがって，rであればsは成立する。sであってもrが成立するとは限らない。

したがって，sはrであるための必要条件であるが十分条件ではない。チ＝⓪

コメント：

図１のような図を描くと，考え易い。ここでは，$A\cap B=\phi$を意識して描いている。すると，(d)を導くことが容易となる。(1)の前半は容易である。後半は論理的に考えようとして，混乱するかも知れない。その場合，A，B，Cの集合の要素の数は高々10個だから，要素を具体的に書き出して考える方が速いかも知れない。

第２問 (配点 25)

＜解答＞

ア１　イ３

(1)　ウ１　エ１　オ４　カ５　キ７　クケ13　コ４

(2)　サ３　シ４　ス３　セ３　ソ５　タ５　チツ13　テ２　ト５　ナニ13　ヌ２

＜解説＞

$$f(x)=ax^2-2(a+3)x-3a+21=a\left\{x^2-\frac{2(a+3)}{a}x\right\}-3a+21$$

$$=a\left\{x-\frac{(a+3)}{a}\right\}^2-\frac{(a+3)^2}{a}-3a+21=a\left\{x-\frac{(a+3)}{a}\right\}^2+15-4a-\frac{9}{a}$$

したがって，2次関数$y=f(x)$のグラフの頂点のx座標をpとおくと

$$p=\frac{a+3}{a}=1+\frac{3}{a}=\text{ア}+\frac{\text{イ}}{a}$$

(1)

aは正の実数なので，関数$y=f(x)$のグラフは下に凸の放物線。

$0\leqq x\leqq 4$における関数$y=f(x)$の最小値が$f(4)$となるとすれば，頂点のx 座標 $p\geqq 4$ が必要だから，

$p=1+\dfrac{3}{a}\geqq 4$, $\therefore\ 0<a\leqq 1=\text{ウ}$

また，$0\leqq x\leqq 4$における関数$y=f(x)$の最小値が$f(p)$となるとすれば，$0\leqq p\leqq 4$だから，

$0\leqq 1+\dfrac{3}{a}\leqq 4$, $\therefore$ $\text{エ}=1\leqq a$

$0\leqq x\leqq 4$における関数$y=f(x)$の最小値が1であるとすれば，

$0<a\leqq 1$のとき，$f(4)=16a-8(a+3)-3a+21=5a-3=1$, $\therefore\ a=\dfrac{4}{5}=\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$

$1\leqq a$のとき，$f(p)=15-4a-\dfrac{9}{a}=1$，したがって$4a^2-14a+9=0$,

$\therefore\ a=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{4}$であるが，$1\leqq a$を満たすのは，　$a=\dfrac{7+\sqrt{13}}{4}=\dfrac{\text{キ}+\sqrt{\text{クケ}}}{\text{コ}}$

(2)

関数$y=f(x)$のグラフがx軸と交わるということは，2次方程式$f(x)=0$が２つの実数解をもつことだから，判別式 $D=4(a+3)^2+4a(3a-21)=4(4a-3)(a-3)>0$,

$\therefore\ 0<a<\dfrac{3}{4}=\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$　または　$\text{ス}=3<a$　①

2次方程式の解の公式から，$L=\dfrac{2\sqrt{(a+3)^2+a(3a-21)}}{a}=\dfrac{2\sqrt{(4a-3)(a-3)}}{a}$

$1<\dfrac{\sqrt{(4a-3)(a-3)}}{a}<2$, $\therefore\ a^2-5a+3>0$　または　$a>\dfrac{3}{5}$

したがって，$a<\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$，$a>\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$，または　$a>\dfrac{3}{5}$　②

$\sqrt{13}>3.6$だから，$\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}<0.7<\dfrac{3}{4}$　③

①，②，③から，$\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}=\dfrac{3}{5}<a<\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}=\dfrac{\text{タ}-\sqrt{\text{チツ}}}{\text{テ}}$，$\dfrac{\text{ト}+\sqrt{\text{ナニ}}}{\text{ヌ}}=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}<a$

コメント：

(1)は2次関数のグラフの略図を描いて考えると良いだろう。(2)は判別式と解の公式を覚えていることが必要だ。√の計算などが煩瑣になるので，ていねいに計算しよう。

第３問（配点 30）

＜解答＞

(1)　ア２　イ３　ウ５　エ３

(2)　オ２　カ５　キ２　ク２　ケ５　コ２　サ５　シ２　スセ10　ソ２　タ２　チ６　ツ３　テ２　ト２
　　ナ５　ニ２　ヌ３

＜解説＞

図１のような図を描いて考察する。

(1)

余弦定理により，$\cos\angle BAC=\dfrac{(AB)^2+(AC)^2-(BC)^2}{2\times AB\times AC}=\dfrac{24}{36}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{ア}{イ}$

$(\sin\angle BAC)^2=1-(\cos\angle BAC)^2=\dfrac{5}{9}$，$\therefore\ \sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{\sqrt{ウ}}{エ}$

(2)

$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\cos\angle BAC=3\times\dfrac{2}{3}=2=$オ，$\mathrm{CH}=\mathrm{AC}\sin\angle BAC=3\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}=\sqrt{カ}$

$\mathrm{AD}=\sqrt{2}\,\mathrm{AH}=2\sqrt{2}=キ\sqrt{ク}$，$\mathrm{CD}=\mathrm{CH}-\mathrm{DH}=\sqrt{5}-2=\sqrt{ケ}-コ$

△ACDの面積$=\dfrac{1}{2}\mathrm{CD}\times\mathrm{AH}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-2)\times2=\sqrt{5}-2=\sqrt{サ}-シ$

正弦定理から，$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$

$\therefore\ \sin\angle CAD=\dfrac{CD}{AC}\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{5}-2}{3}\sin135^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-2}{3}\sin45^\circ$

$$=\frac{\sqrt{5}-2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{スセ}-ソ\sqrt{タ}}{チ}$$

△ACDの外接円の半径は，正弦定理を使って，$\dfrac{AC}{2\sin\angle ADC}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{ツ\sqrt{テ}}{ト}$

△ACFの面積$=\dfrac{1}{2}(\mathrm{AC}\times\sin\angle CAD)\times\mathrm{AF}==\dfrac{1}{2}(3\times\sin\angle CAD)\times\mathrm{AF}$

△AEFの面積$=\dfrac{1}{2}(\mathrm{AE}\times\sin\angle BAF)\times\mathrm{AF}==\dfrac{1}{2}(3\times\sin45^\circ)\times\mathrm{AF}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{AF}$

したがって，$\dfrac{\triangle ACF\text{の面積}}{\triangle AEF\text{の面積}}=\dfrac{\sin\angle CAD}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{5}-2}{3}=\dfrac{\sqrt{ナ}-ニ}{ヌ}$

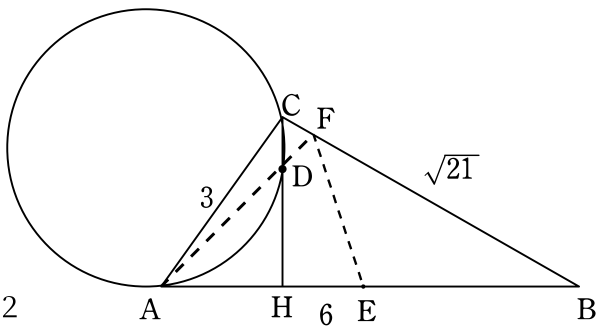

図２

コメント：

三角形の正弦定理，余弦定理を理解し使いこなせることが必要だ。三角形の面積比較では，$\sin \angle CAD$を求めたことがヒントになろう。

第４問（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア１　イ６　（解答の順序は問わない）

(2)　ウ４　エ５　（解答の順序は問わない）

(3)　オ１

(4)　カ７　キ２

＜解説＞

(1)

図１および図２から読み取れる内容として正しいものは，①ア，⑥イである。

⓪　×　範囲が最も大きいのは，男子短距離グループである。

①　○　図２の箱ひげ図を見ると，箱の長さ（四分位範囲を示す）はすべて12未満である。

②　×　度数最大の階級は170～175だが，中央値は175以上の階級に入っている。

③　×　第一四分位数は161だが，度数最大の階級は165～170である。

④　×　図２を見ると，最も身長の高い選手は男子短距離グループの中にいる。

⑤　×　図２を見ると，最も身長の低いい選手は女子短距離グループの中にいる。

⑥　○　図２を見ると，男子短距離グループの中央値（箱の中心の太線）と長距離グループの第３四分位数（箱の右端）は180以上182未満である。

(2)

身長をH，体重をWとし，Xを$X=\left(\dfrac{H}{100}\right)^2$で，$Z$を$Z=\dfrac{W}{X}$で定義する。

直線 l_1，l_2，l_3，l_4の傾きがZを示すから，図３のXとWの散布図と直線l_1，l_2，l_3，l_4の関係から，図４の箱ひげ図がどのグループかわかる。

(X, W)の点が直線l_1，l_2，l_3，l_4のどの範囲にあるかによっておよそのZがわかる。

直線l_1に近ければZは約30である。l_1とl_2の真ん中にあればZは27.5である。

図４の(a)は四分位範囲がおよそ22～24だから，男子短距離グループである。

(b)は最小値が約16で最大値が約27だから女子短距離である。

(c)は最小値と最大値が(b)よりも1～2ほど大きいので，男子長距離である。

(d)は最小値が約15で最大値も約23だから女子長距離である。

図３および図４から読み取れる内容として正しいものは，④ウ，⑤エである。

⓪　×　XとWには正の相関がある。

①　×　Zの中央値が一番大きいのは男子短距離グループである。

⓪ × Zの範囲が最小なのは図４(d)だから，女子長距離グループである。

③ × 男子短距離グループは(a)だから，四分範囲が最大である。

④ ○ 女子長距離グループは(d)だから，すべてのZの値は25より小さい。

⑤ ○ 図３から男子長距離グループは最大値が約29，最小値が約17だから(c)である。

(3)

変量XとWの相関係数は $\dfrac{X\text{と}W\text{の共分散}}{X\text{の標準偏差}\times W\text{の標準偏差}}$ だから，

女子長距離グループのデータにおいて，XとWの相関係数は $\dfrac{0.754}{0.2\times5.36}=0.703=$ ⓪オ

(4)

身長のデータHを各々2乗した値の平均値は

$X=\left(\dfrac{H}{100}\right)^2$，$H^2=10^4X$ だから，$\overline{H^2}=10^4\overline{X}=10^4\times2.75=27500=$ ⑦カ

分散$s^2=\overline{H^2}-(\overline{H})^2=27500-(165.7)^2=27500-27456.49=43.51=$ ⓪キ

コメント：

(1)では，箱ひげ図の意味を理解していなければならない。難しい内容を論じているわけではないので，スムーズに正誤を判断したい。

(2)では，散布図の点(X, W)と原点を通る直線l_1，l_2，l_3，l_4と関係によって，$Z=\dfrac{W}{X}$の値がわかることに気づくことが必要である。傾きが30 , 25 , 20 , 15だから，例えばl_1とl_2 の間にある点(X, W) のZ は25 と30 の間にあることになる。このことから，図３の散布図と図４の箱ひげ図の対応を考察し判断しよう。

(3)では相関係数の定義，(4)では分散の定義を覚えていなければならない。

＜総評＞

去年と問題構成はほとんど同じ。

第１問 ［１］は式の変形と因数分解の問題。難易度はC

［２］は集合と命題の論理の問題。難易度はB

第２問 ２次関数の頂点の座標，最小値，２つの実数解の関係。難易度はB

第３問 三角形の諸量を正弦定理，余弦定理などによって求める。難易度はB

第４問 データの統計処理の問題。ヒストグラム，箱ひげ図，散布図等によって表現されたデータの特徴を捉える。

(1)，(2)はグラフから特徴を正しく把握する。難易度C

(3)，(4)は分散，共分散，相関係数等の定義と意味を把握していること。難易度B

数学Ⅰ・数学A　（注）この科目には，選択問題があります。（19ページ参照。）

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

［１］

　ア５　イ６　ウエ14　オ２　カ８

［２］

(1)　キ２　ク０

(2)　ケ２　コ０

［３］

　サ１　シ３　ス１　セ１　ソ４　タ５　チ７　ツテ13　ト４

＜解説＞

［１］

　数学Ⅰ　第１問［１］(1)に同じ

［２］

　数学Ⅰ　第１問［２］に同じ

［３］

　数学Ⅰ　第２問 (1)に同じ

第２問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

［１］

　ア７　イ９　ウ４　エ２　オ９　カ０　キ４　ク２　ケ３　コ３

［２］

(1)　サ１　シ６　（解答の順序は問わない）

(2)　ス４　セ５　（解答の順序は問わない）

(3)　ソ２

＜解説＞

［１］

　△ABCに対する余弦定理によって，$\cos\angle ABC=\dfrac{5^2+9^2-6^2}{2\times5\times9}=\dfrac{7}{9}=\dfrac{\text{ア}}{\text{イ}}$

$\sin\angle ABC=\sqrt{1-(\cos\angle ABC)^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{9}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}=\dfrac{\text{ウ}\sqrt{\text{エ}}}{\text{オ}}$

$\mathrm{AB}\sin\angle ABC=5\times\dfrac{4\sqrt{2}}{9}=\dfrac{20\sqrt{2}}{9}\fallingdotseq 3.14$,　$\therefore$ $\mathrm{CD}<\mathrm{AB}\sin\angle ABC=\mathrm{CD}\,\text{カ}\,\mathrm{AB}\sin\angle ABC$

ADとBCが平行ならばCD＞(ADとBCの間隔）$=\mathrm{AB}\sin\angle ABC$でなければならない。

これは上記のように成立しない。したがって，$\mathrm{AD}\nparallel\mathrm{BC}$,　$\therefore$ $\mathrm{AB}\parallel\mathrm{CD}$

△BCDに対する余弦定理によって，

$$\mathrm{BD}=\sqrt{(CD)^2+(BC)^2-2CD\cdot BC\cos\angle DCB}=\sqrt{(CD)^2+(BC)^2+2CD\cdot BC\cos\angle ABC}$$

$$=\sqrt{3^2+9^2+2\times3\times9\times\frac{7}{9}}=\sqrt{132}=2\sqrt{33}=\text{ク}\sqrt{\text{ケコ}}$$

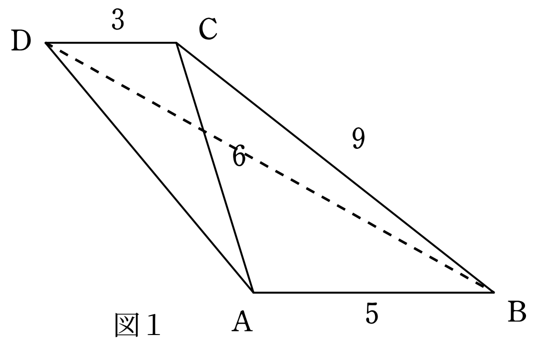

図１

［２］

(1)　数学Ⅰ　第４問(1)に同じ

(2)　数学Ⅰ　第４問(2)に同じ

(3)

$$(x_1-\overline{x})(w_1-\overline{w})+(x_2-\overline{x})(w_2-\overline{w})+\cdots+(x_n-\overline{x})(w_n-\overline{w})$$

$$=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-\overline{x}(w_1+w_2+\cdots+w_n)-\overline{w}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+n\overline{x}\ \overline{w}$$

$$=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-n\overline{x}\ \overline{w}-n\overline{w}\ \overline{x}+n\overline{x}\ \overline{w}=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-n\overline{x}\ \overline{w}$$

$$=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-②\text{ソ}$$

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア１　イ６　ウ１　エ６　オ１　カ９

(2)　キ１　ク４　ケ１　コ６

(3)　サ１　シ２

(4)　ス１　セソタ 432　チ１　ツテ 81

＜解説＞

大小2個のさいころを同時に投げる試行において

Aを「大きいさいころについて，4の目が出る」という事象

Bを「2個のさいころの出た目の和が7である」という事象

Cを「2個のさいころの出た目の和が9である」という事象

図１に，これら事象の領域を示す。大きな円は大小２つのさいころを投げたときに発生する目の組合わせ全体の集合である。

(1)

事象Aの確率 $P(A)$=(大きいさいころについて4の目が出る確率）×（小さいさいころの出る目はいずれでも良いとする確率）$=\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6}=\frac{ア}{イ}$

事象Bの確率 $P(B)$=(2個のさいころについて1と6の目となる確率)

+(2個のさいころについて2と5の目となる確率)

+(2個のさいころについて3と4の目となる確率)

2個のさいころの出る目の組み合わせの場合は36通り。

2個のさいころについて1と6の目となる場合は2通り，したがってその確率は$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

2と5の目となる確率も同じく$\frac{1}{18}$，3と4の目となる確率も同じく$\frac{1}{18}$

これらは排反事象だから，$P(B)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}=\frac{ウ}{エ}$

事象Cの確率 $P(C)$=(2個のさいころについて3と6の目となる確率)

+(2個のさいころについて4と5の目となる確率)

2個のさいころについて3と6の目となる場合は2通り，したがってその確率は$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

2個のさいころについて4と5の目となる場合は2通り，したがってその確率は$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

$P(C)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{9}=\frac{オ}{カ}$

(2)

事象Cが起こったときの事象Aが起こる条件付き確率は $P(A/C)=\frac{P(A,C)}{P(C)}=\frac{1/36}{1/9}=\frac{1}{4}=\frac{キ}{ク}$

ここで，$P(A\,,C)$は事象Aと事象Cが同時に発生する確率で，「大きいさいころの目が4，かつ大小のさいころの目の和が9」という事象である。これは「大きいさいころの目が4，小さいさいころの目が5」という事象であるから，$P(A\,,C)=\frac{1}{36}$

事象Aが起こったときの事象Cが起こる条件付き確率は $P(C/A)=\frac{P(C,A)}{P(A)}=\frac{1/36}{1/6}=\frac{1}{6}=\frac{ケ}{コ}$

ここで，$P(C\,,A)$は事象Cと事象Aが同時に発生する確率で，「大小のさいころの目の和が9，かつ大きいさいころの目が4」という事象である。これは「小さいさいころの目が5，大きいさいころの目が4」という事象であるから，$P(C\,,A)=\frac{1}{36}$

(3)

$P(A\cap B)=P$(大きいさいころの目が4かつ小さいさいころの目が3)

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=P(A)P(B)$，①＝サ

$P(A\cap C)=P$(大きいさいころの目が4かつ小さいさいころの目が5)

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}>P(A)P(C)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{9}$，②＝シ

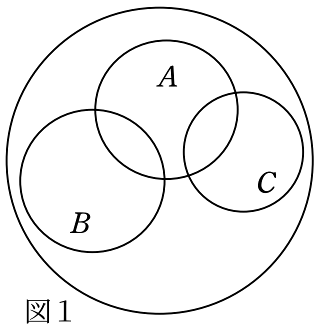

図１

(4)

$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

$P(\overline{A}\cap C)=P$(大きいさいころの目が4以外，小さいさいころの目との和が9)

$=P$(大きいさいころの目が3かつ小さいさいころの目が6

＋大きいさいころの目が5かつ小ささいころの目が4

＋大きいさいころの目が6かつ小さいさいころの目が3)

$=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{12}$

1回目に事象$A\cap B$が起こり，2回目に事象$\overline{A}\cap C$が起こる確率は$\frac{1}{36}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{432}=\frac{\text{ス}}{\text{セソタ}}$

$B\cup C=\phi$だから，三つの事象ABCがいずれもちょうど1回ずつ起こる場合は以下である。

a) 1回目に事象$A\cap B$が起こり，2回目に事象$\overline{A}\cap C$が起こる場合。1回目と2回目が逆の場合。

1回目と2回目が逆であっても同じ確率だから，$\frac{1}{432}\times 2=\frac{1}{216}$

b) 1回目に事象$A\cap C$が起こり，2回目に事象$\overline{A}\cap B$が起こる場合。1回目と2回目が逆の場合。

$P(A\cap C)=\frac{1}{36}$

$P(\overline{A}\cap B)=P$(大きいさいころの目が4以外かつ小さいさいころの目との和が7)

$=P$(＋大きいさいころの目が1かつ小さいさいころの目が6

＋大きいさいころの目が2かつ小さいさいころの目が5

＋大きいさいころの目が3かつ小さいさいころの目が4

＋大きいさいころの目が5かつ小さいさいころの目が2

＋大きいさいころの目が6かつ小さいさいころの目が1)

$=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$

1回目に事象$A\cap C$が起こり，2回目に事象$\overline{A}\cap B$が起こる確率は$\frac{1}{36}\times\frac{5}{36}=\frac{5}{1296}$

1回目と2回目が逆であっても同じ確率だから，$\frac{5}{1296}\times 2=\frac{5}{648}$

a)とb)は排反事象だから，三つの事象ABCがいずれもちょうど1回ずつ起こる確率は,

$\frac{1}{216}+\frac{5}{648}=\frac{1}{81}=\frac{\text{チ}}{\text{ツテ}}$

コメント：

図１のような図を描いて，速やかに考察を進める。(4)はやや難しい。三つの事象A，B，Cがちょうど1回ずつ起こるのは，どのような場合なのか短時間で着想する必要がある。1回目に事象$A\cap B$が起こり，2回目に事象$\overline{A}\cap C$が起こる場合がその一つであることに気づくこと，その上でさらに三つの場合があることを着想しなければならない。

第４問（選択問題）（配点 20）

＜解答＞

(1)　ア 4　イ 3　ウ 2　エオ 15

(2)　カ 2　キク 41　ケ 7　コサシ 144

(3)　ス 2　セソ 23

＜解説＞

(1)

144を素因数分解すると,

$144=12\times12=(2^2\times3)^2=2^4\times3^2=2^{ア}\times イ^{ウ}$,

したがって144の正の約数の個数は$(4+1)(2+1)=15=$エオ

(2)

不定方程式$144x-7y=1$の整数解 x, y の中で，xの絶対値が最小になる解を求める。

$y=\dfrac{144x-1}{7}=20x+\dfrac{4x-1}{7}=20x+\dfrac{4(x-2)+7}{7}=20x+1+\dfrac{4(x-2)}{7}$ だから,

$\dfrac{4(x-2)}{7}$ が整数となる絶対値最小の整数は $x=2=$カ，したがって $y=41=$キク

yが整数のためには，kを整数として $x-2=7k$ だから，すべての整数解は $x=7k+2=$ケ$k+$カ

$y=20(7k+2)+1+4k=144k+41=$コサシ$k+$キク

と表される。

(3)

144の倍数で7で割ったら余りが1となる自然数は$144x=144(7k+2)$と表される。

144の正の約数は$(4+1)(2+1)=15$だから，正の約数が18個になるためには,

$18=15+3=(4+1)(2+1)+3=(4+1+1)(2+1)$となる必要がある。

すなわち素因数2のべき乗数が1増となる。$144x=144(7k+2)=2^{4+1}\times3^2$，$7k+2=2$，$\therefore\ k=0$

したがって，正の約数が18個である最小のものは $2^{4+1}\times3^2=144\times2=144\times$ス

正の約数が30個である自然数は,

$30=15+15=2(4+1)(2+1)=(1+1)(4+1)(2+1)=(4+1+1)(2+1+2)=(4+1)(2+1+3)$だから,

$7k+2$と表現される最小の素数は$k=3$のとき23,

したがって，$144x=144(7k+2)=2^4\times3^2\times23^1=144\times23=144\times$セソ

上記において,

$k=1$のとき$7k+2=9=3^2$，$k=2$のとき$7k+2=16=2^4$，いずれも正の約数は前者が25，後者が27となってしまう。。

コメント：

整数の問題。(1)では素因数分解により約数の個数を求める。これは整数の基本だから，即答したい。(2)では式を上手に変形して，xの表式を求める。(3)の解説を長々と書いたが，これはメモ書きと暗算くらいでスムーズに正答できるはずだ。$k=1$，2では$7k+2=3^2$，2^4いずれも約数が30未満なので，$k=3$のとき$7k+2=23$（素数）と気づきたい。

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア２　イ５　ウ３

(2)　エオ20　カ９　キク10　ケ９　コ０　サ４　シ５　ス８　セ５　ソ３　タ１

＜解説＞

△ABCにおいてAB=2，AC=1，∠A=90°とする。

(1)

BD$=x$，CD$=y$とする。

△ABDに正弦定理を適用して，$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{x}{\sin 45^\circ}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{2}{\sin\angle ADB}$

△ACDに正弦定理を適用して，$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{y}{\sin 45^\circ}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{1}{\sin\angle ADC}$

∠ADB+∠ADC$=\pi$だから，$\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，$\therefore\ x:y=2:1$

BC$=\sqrt{5}$だから，$x=$BD$=\dfrac{2}{2+1}\sqrt{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}=\dfrac{ア\sqrt{イ}}{ウ}$

(2)

点Aを通り点Dで辺BCに接する円と辺ABとの交点でAと異なるものをEとすると，

方べきの定理により，AB・BE=(BD)$^2=\dfrac{20}{9}=\dfrac{エオ}{カ}$，$\therefore$ BE$=\dfrac{1}{AB}\times\dfrac{20}{9}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{20}{9}=\dfrac{10}{9}=\dfrac{キク}{ケ}$

$\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{10/9}{2\sqrt{5}/3}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ コ $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{\sqrt{5}}{3}<\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\therefore$ コ ⓪

$\dfrac{BE}{BD}<\dfrac{AB}{BC}$ということは図１において，直線EDが直線AC側に傾くことだから，直線ACと直線DEの交点Fは辺ACの端点C側の延長上にある。∴ サ ④

△ABCを直線EFが切るとして，メネラウスの定理を適用する。

$\dfrac{CF}{AF}\dfrac{BD}{CD}\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CF}{AF}\times 2\times\dfrac{8/9}{10/9}=1$，$\therefore\ \dfrac{CF}{AF}=\dfrac{5}{8}=\dfrac{シ}{ス}$

したがって，CF=AF−AC$=\dfrac{8}{5}$CF−1，∴ CF$=\dfrac{5}{3}=\dfrac{セ}{ソ}$

BF$=\sqrt{(AB)^2+(AF)^2}=\sqrt{2^2+(8/3)^2}=\dfrac{10}{3}$

$\dfrac{BF}{AB}=\dfrac{10/3}{2}=\dfrac{5}{3}=\dfrac{CF}{AC}$であるから，BCは∠ABFの二等分線

したがって，点Dは△ABFの内心である。タ ①

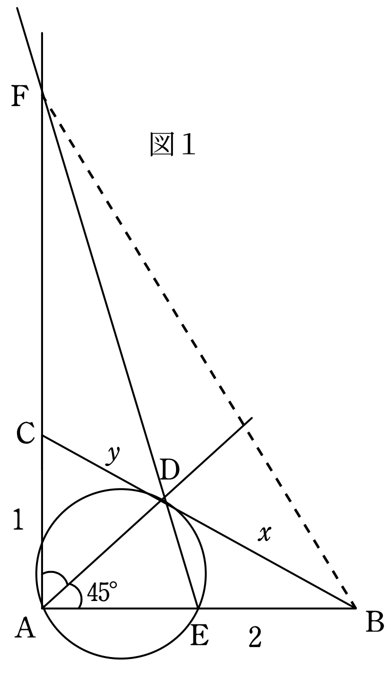

図１

コメント：

図１のような図を描いて題意を把握しよう。ここでは，ソフトを使ってほぼ正確な図を描いたが，試験では手書きの大雑把な図で理解できるように。三角形の内心，メネラウスの定理，正弦定理など，図形の基本的な性質の活用がテーマである。

＜総評＞

第３～５問から２つを選ぶ。昨年とほぼ同じ分野から出題されている。

第１問　[１]　数学Ⅰ第１問 [１] ⑴に同じ

[２]　数学Ⅰ第１問 [２] に同じ

[３]　数学Ⅰ第２問 ⑴に同じ

第２問　[２] ⑴　数学Ⅰ第４問 ⑴に同じ

⑵　数学Ⅰ第４問 ⑵に同じ

第３問　確率の問題。難易度はＢ。ただし，⑷はやや難しいので難易度Ａ，正答率がどのくらいか気になる。

第４問　整数の問題。速やかに解くために少々工夫が必要だ。難易度はＢ。

第５問　図形の問題。難易度はＢ－。

181211