平成31年度（2019年度）センター試験　数学Ⅰ　数学Ⅰ･数学Ａ　解説

数学　①　[数学Ⅰ　数学Ⅰ･数学A]　（いずれか選択　100点，60分）

数　学　Ⅰ（全問必答）

第１問（配点　25）

＜解答＞

[１]　ア３　イ１　ウ４　エ１　オカ -2　キ３

(1)　ク２　ケ１

(2)　コ７　サ３　シ７

(3)　ス６　セソ -7　タ３

[２]

(1)　チ０　ツ２

(2)　テ０　ト２　ナ３

＜解説＞

[１]

aを実数とする。

$9a^2-6a+1=(3a-1)^2=(\text{ア}a-\text{イ})^2$である。次に

$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと

$A=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|=\sqrt{(\text{ア}a-\text{イ})^2}+|a+2|$ である。

次の三つの場合に分けて考える。

・$a>\dfrac{1}{3}$のとき，$A=3a-1+a+2=4a+1=\text{ウ}a+\text{エ}$ である。

・$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$のとき，$A=-(3a-1)+a+2=-2a+3=\text{オカ}a+\text{キ}$ である。

・$a<-2$のとき，$A=-(3a-1)-(a+2)=-4a-1=-\text{ウ}a-\text{エ}$ である。

(1)　$a=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$のとき，$A=4a+1=\sqrt{2}+1=\sqrt{\text{ク}}+\text{ケ}$ である。

(2)　$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$のとき，$A$のとり得る値の範囲は

$A=-2a+3$だから，$-\dfrac{2}{3}+3\leqq A\leqq-2\times(-2)+3$，$\therefore\ \dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}=\dfrac{7}{3}\leqq A\leqq 7=\text{シ}$ である。

(3)　$A=2a+13$となるaの値は

$2a+13=4a+1$とおけば$a=6$，これは$a>\dfrac{1}{3}$を満たすので，$a=6=\text{ス}$

$2a+13=-2a+3$とおけば$a=-\dfrac{10}{4}$，これは$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$を満たさないので解ではない。

$2a+13=-4a-1$とおけば$a=-\dfrac{7}{3}$，これは$a<-2$を満たすので，$a=-\dfrac{7}{3}=\dfrac{\text{セソ}}{\text{タ}}$

［２］ 二つの自然数m，nに関する三つの条件p，q，rを次のように定める。

p：mとnはともに奇数である

q：$3mn$は奇数である

r：$m+5n$は偶数である

また，条件pの否定を$\overline{p}$で表す。

(1) 二つの自然数m，nが条件$\overline{p}$を満たすとする。すなわち「$\overline{p}$：m，nはともに奇数ということではない」ので，mが奇数ならnはチ $\boxed{\text{⓪偶数である}}$。

また，mが偶数ならばnはツ $\boxed{\text{②偶数でも奇数でもよい}}$。

⓪ 偶数である

① 奇数である

② 偶数でも奇数でもよい

(2)

pはqであるためのテ$\boxed{\text{⓪必要十分条件である}}$。

なぜなら，「p：mとnはともに奇数」であれば，「q：$3mn$は奇数」である。

「q：$3mn$は奇数」ならば，「p：mとnはともに奇数」である。

pはrであるためのト$\boxed{\text{②十分条件であるが，必要条件ではない}}$。

なぜなら，「p：mとnはともに奇数」であれば，「r：$m+5n$は偶数」である。

「r：$m+5n$は偶数」であっても，「p：mとnはともに奇数」とはいえない。

m，nがともに偶数であれば「r：$m+5n$は偶数」となる。

$\overline{p}$はrであるためのナ$\boxed{\text{③必要条件でも十分条件でもない}}$。

「$\overline{p}$：m，nはともに奇数ということではない」ので，「r：$m+5n$は偶数」とはいえない。

「r：$m+5n$は偶数」ならば「$\overline{p}$：m，nはともに奇数ということではない」とはいえない。

ともに奇数であればrが成立する。

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

コメント：

［１］は因数分解，√ や絶対値記号内の式の正負に関する問題。(3)では，得られるaの値が，あるべき値の範囲内かどうか判定する。

［２］は自然数に関する条件（命題）と論理の問題。簡単な整式の偶奇に関する条件である。ここで条件pの否定$\overline{p}$の具体的な条件を的確に把握すること。

第２問（配点 25）

＜解答＞

(1)　ア２　イ４　ウ１

(2)　エ２　オ２　カ１

(3)　キ４　ク２　ケ３　コ２　サ４　シ７　ス４　セ３

(4)　ソ５　タ１　チ３　ツ２　テト -1　ナ４

＜解説＞

a，bはともに正の実数とする。xの2次関数

$$y=x^2+(2a-b)x+a^2+1$$

のグラフをGとする。

(1)

$$y=x^2+(2a-b)x+a^2+1=\left(x+\frac{2a-b}{2}\right)^2-\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2+a^2+1=\left(x+a-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+ab+1$$

したがってグラフGの頂点の座標は

$$\left(\frac{b}{2}-a,\ -\frac{b^2}{4}+ab+1\right)=\left(\frac{b}{\text{ア}}-a,\ -\frac{b^2}{\text{イ}}+ab+\text{ウ}\right)$$

である。

(2)

グラフGがx軸と共有点をもつとき，頂点のy座標が0以下となるから，bのとり得る値の範囲は

$$-\frac{b^2}{4}+ab+1\leqq 0,\ \therefore\ b\geqq 2a+2\sqrt{a^2+1}=\text{エ}a+\text{オ}\sqrt{a^2+\text{カ}}$$

である。

(3)

グラフGがx軸に接するとき，$b=2a+2\sqrt{a^2+1}$だから，$a=\sqrt{3}$のとき

$b=2\sqrt{3}+2\sqrt{3+1}=4+2\sqrt{3}=\text{キ}+\text{ク}\sqrt{\text{ケ}}$

グラフGとx軸の接点は頂点だから，そのx座標は$\dfrac{b}{2}-a=2=\text{コ}$である。

このとき，$0\leqq x\leqq\sqrt{3}$において$x=0$のときに，yは最大値$a^2+1=4=\text{サ}$となる。

最小値は$x=\sqrt{3}$のときだから，

$y=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-4)\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+1=7-4\sqrt{3}=\text{シ}-\text{ス}\sqrt{\text{セ}}$

(4)

グラフGが点$(-1,6)$を通るとき，$6=1-(2a-b)+a^2+1$，$\therefore\ b=-a^2+2a+4=-(a-1)^2+5\leqq 5$

したがってbのとり得る最大値は$5=\text{ソ}$であり，そのときのaの値は$1=\text{タ}$である。

このとき，グラフGの頂点は$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$だから，

2次関数$y=x^2$のグラフをx軸方向に$\dfrac{3}{2}=\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$，$y$軸方向に$\dfrac{-1}{4}=\dfrac{\text{テト}}{\text{ナ}}$だけ平行移動したものである。

コメント：

(1)は2次関数のグラフの略図を描いて考えると良いだろう。(2)は判別式と解の公式を覚えていることが必要だ。√の計算などが煩瑣になるので，ていねいに計算しよう。(3)では，2次関数のグラフがx軸と接するときは，頂点においてであることに気づこう。(4)では，bがaの2次関数であることから，bに最大値があることがわかる。

第３問（配点 30）

＜解答＞

(1)　ア 1　イ 3　ウ 3　エ 2　オ 2　カキ 90　ク 2

(2)　ケコ 10　サ 2　シ 1　スセ 10　ソ 2　タ 7　チツ 90　テト 90　ナ 5　ニ 4

＜解説＞

図１を参照する。

△ABCにおいて，AB＝$2\sqrt{2}$，AC＝$\sqrt{5}$，∠ABC＝45°とする。Aから直線BCへ垂線AHをひく。

すると，△ABHは直角2等辺三角形だから，AH＝BH＝$\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=2$

△ACHは直角三角形だからCH＝$\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{5-4}=1$

このとき，図１のように∠BCAが鈍角の場合と鋭角の場合があるから，

BC＝BH−CH＝1＝ア　または　BC＝BH＋CH＝3＝イ

ただし，ア＜イとする。以下，BC＝3＝イの場合を考える。

(1)

点Cから辺ABに下ろした垂線と辺ABに下ろした垂線と辺ABとの交点をDとすると

$$\mathrm{BD}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{\text{ウ}\sqrt{\text{エ}}}{\text{オ}}$$

である。また，△ADCの外接円と辺BCとの交点で点Cとは異なる点をEとすると，

∠AEC＝∠ADC＝∠Rだから，点EはHと一致する。∠AEB＝90°＝カキ であるから，

BE＝2＝ク である。

(2)

△ABCの外接円の中心をOとすると，BOは外接円の半径Rだから，正弦定理によって

$\dfrac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}=2R$，BO＝$R=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}=\dfrac{\sqrt{\text{ケコ}}}{\text{サ}}$である。

次の $\boxed{\text{シ}}$ には下の⓪～③から，$\boxed{\text{タ}}$ には下の④～⑦から当てはまるものを一つずつ選べ。

△ABEと△BCDは直角2等辺三角形だから，$\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって△BDEと△BCAにおいて，$\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{BD}{BC}$であり，∠ABCは共通であるから

△BDE ∽ △BCAとなる。

したがって$\angle$BCA＝$\angle$BDE＝$\angle$①＝シ，DE＝$\dfrac{BE}{BA}$×AC＝$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}=\dfrac{\sqrt{スセ}}{ソ}$ である。

直線BOと△ABCの外接円との交点で点Bとは異なる点をPとすると，$\overset{\frown}{AC}$ の円周角として
$\angle$ACP＝$\angle$ABP＝$\angle$⑦ ＝タ である。

⓪　BED　　①　BDE　　②　BOA　　③　BAC
④　ADC　　⑤　CAP　　⑥　AOP　　⑦　ABP

またBPは外接円の直径だから，$\angle$BCP = 90° = チツ° である。
したがって，線分 BP と線分 DE の交点をQとすると，$\angle$BCA＋$\angle$ACP＝$\angle$BCP
$\angle$BCA = $\angle$BDE，$\angle$ACP＝$\angle$ABPだから，
$\angle$BQD = 180°－（$\angle$BDE＋$\angle$ABP）=180°－（$\angle$BCA＋$\angle$ACP）
　　　　= 180°－$\angle$BCP = 180°－90°=90°＝テト°
よって，△BODの面積と△BOEの面積の和は $\dfrac{1}{2}$×BO×DE＝$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}=\dfrac{5}{4}=\dfrac{ナ}{ニ}$

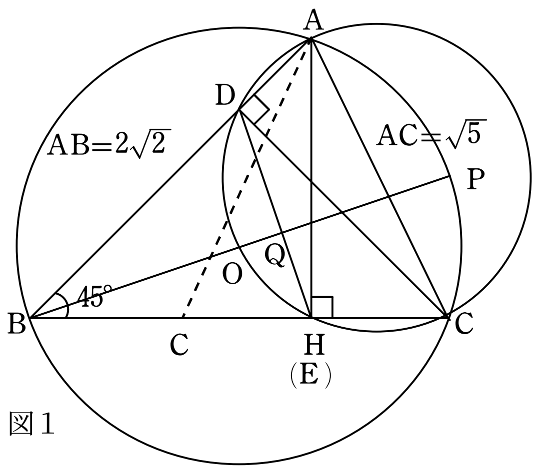


図１

コメント：
まずは△ABC，垂線CD，△ADCの外接円，△ABCの外接円などの図を描いて考える。ここでは，ソフトで描いたので，かなり正確な図になっている。手書きでは，そうはいかないであろう。しかし，日頃から図形の問題では，対象図形を手書きするようにしよう。本番で，必ず役に立つ。
この問題では ア＜イ の条件により，実線のACと破線のACのうち，実線のACを選ぶ。
△BDE ∽ △BCAを導くことが，ポイントである。

第４問（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア３　イ４

(2)　ウ４

(3)　エ４　オ７　（解答の順序は問わない）

(4)　カ０　キ０　ク１　ケ２

(5)　コ 3

<解説>

統計とデータの分析の問題である。長文を読み，グラフを理解し，速やかに解答する。

(1)

問題図１は全国48地点で観測したソメイヨシノの2012年から2017年までの6年間の開花日を，年ごとに箱ひげ図にして並べたものである。問題図２はソメイヨシノの開花日の年ごとのヒストグラムである。次のア，イに当てはまるものを，問題図２の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。

- 2013年のヒストグラムはア③。箱ひげ図では開花日は72日から136日で，③が該当。
- 2017年のヒストグラムはイ④。箱ひげ図では開花日は80日から122日で，④が該当。

(2)

ソメイヨシノの開花日は北海道地区では３地点で，南九州地区でも３地点で観測されている。問題図３は問題図１の箱ひげ図にこれら６地点の開花日を折れ線グラフで付け加えたものである。

次の ウ に当てはまるものを，下の⓪～④のうちから一つ選べ。

問題図３から読み取れることとして正しいものは，④ウ である。

⓪　全国の開花日の範囲はどの年も15日以下である。

①　北海道地区で一番遅い開花日と南九州地区で一番早い開花日の差は
　　どの年も60日以下である。

②　南九州地区のすべての地点において，開花日はどの年も第１四分位数以下の日である。

③　南九州地区のすべての地点において，開花日はどの年も中央値以下の日である。

④　北海道地区のすべての地点において，開花日はどの年も第３四分位数以上の日である。

⓪～④の記述を問題図３を参照しながら正誤を逐一チェックする。開花日の範囲は60日を超える年があるから一目で⓪は誤り。2013年で開花日の差が一番大きく，北海道地区で一番遅い開花日は136日，南九州地区で72日で開花日の差は64日だから①は誤り。南九州地区では2016年と2017年に開花日が第１四分位数の日を超えているので②は誤り。

同様に南九州地区では2016年と2017年に開花日が中央値の日を超えているので③は誤り。

北海道地区では，開花日は第３四分位数以上の日であることは一目で明らかだから④は正しい。

(3)

問題図４と問題図５は，モンシロチョウとツバメの両方を観測している41地点における，2017年の初見日の箱ひげ図と散布図である。

次の エ，オ に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

問題図４，５から読み取れることとして正しくないものは，④エ，⑦オ である。

⓪　モンシロチョウの初見日の最小値はツバメの初見日の最小値と同じである。

①　モンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より大きい。

②　モンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より大きい。

③　モンシロチョウの初見日の四分位範囲はツバメの初見日の四分位範囲の3倍より小さい。

④　モンシロチョウの初見日の四分位範囲は15日以下である。

⑤　ツバメの初見日の四分位範囲は15日以下である。

⑥　モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所が少なくも４地点ある。

⑦　同一地点でのモンシロチョウの初見日とツバメの初見日の差は15日以下である。

⓪～⑦の記述を問題図４，５を参照しながら正誤を逐一チェックする。⓪～②は問題図４を一目見れば正しいことが明らかであろう。③はモンシロチョウの四分位範囲は20日，ツバメのそれは9日だから正しい。先述から④は誤りで、⑤は正しい。問題図５で原点を通り傾き１の直線は両者の初見日が同じ日であることを示す。その直線上に4点あるから，⑥は正しい。問題図５で２つ点線の範囲を超えている点がある。両者の初見日の差が15日以上になる地点があるので，⑦は誤り。

(4)

一般にn個の数値x_1，x_2，・・・，x_nからなるデータXの平均値を$\overline{x}$，分散をs^2，標準偏差をsとする。各x_iに対して

$$x'_i=\frac{x_i-\overline{x}}{s}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

と変換した x'_1，x'_2，・・・，x'_n をデータX'とする。ただし，$n\geqq 2$，$s>0$とする。

次のカ，キ，クに当てはまるものを，下の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　0　①　1　②　-1　③　$\overline{x}$　④　s

⑤　$\dfrac{1}{s}$　⑥　s^2　⑦　$\dfrac{1}{s^2}$　⑧　$\dfrac{\overline{x}}{s}$

- Xの偏差$x_1-\overline{x}$，$x_2-\overline{x}$，・・・，$x_n-\overline{x}$ の平均値は 0カである。

  平均値からの偏差の平均は0であることは，容易に気づこう。

  なぜなら，$\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})+(x_2-\overline{x})+\cdots+(x_n-\overline{x})\}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\overline{x}=\overline{x}-\overline{x}=0$

- X'の平均値は 0キ である。

  上記と同様の理由である。

  $x'_i=\dfrac{x_i-\overline{x}}{s}$だから，$x'_i$の平均値は$\overline{x'}=x_i-\overline{x}$の平均値の$\dfrac{1}{s}$。$x_i-\overline{x}$の平均値は0。

- X'の標準偏差は 1ク である。

  各データの偏差を標準偏差で割ったデータの標準偏差は1になることを直感しよう。

  計算で示すと，$s'=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x'_i-\overline{x'})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-\overline{x}}{s}-\dfrac{\overline{x}-\overline{\overline{x}}}{s}\right)^2}$

  $=\dfrac{1}{s}\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{1}{s}\cdot s=1$

問題図５で示されたモンシロチョウの初見日のデータMとツバメの初見日のデータTについて上の変換を行ったデータをそれぞれM'，T'とする。

次の ケ に当てはまるものを，問題図６の⓪～③のうちから一つ選べ。

変換後のデータM'，T'の散布図は ②ケ である。

なぜなら，⓪，①のグラフは平均値0±標準偏差 1の範囲にすべてのデータが入っている。しかし，これは誤り。この範囲からはみ出るデータがなければならない。③のグラフは問題図５を180°回転した図に近いものだから誤り。

(5)

次の コ に当てはまる数値として最も近いものを，下の⓪～⑨のうちから一つ選べ。

モンシロチョウとツバメの初見日のデータMとTの相関係数は，③コである。

⓪ 0.085	① 0.714	② 0.719	③ 0.725	④ 0.734
⑤ 0.851	⑥ 7.14	⑦ 7.19	⑧ 7.25	⑨ 7.34

相関係数は$\dfrac{s_{MT}}{s_M s_T}=\dfrac{87.9}{12.4\times 9.78}=0.725=$ ③

ここで，s_{MT}は共分散，s_Mはモンシロチョウの標準偏差，s_Tはツバメの標準偏差である。

コメント：

文章の長さや図の多さに驚かない。文章の理解力や図が示す事実の理解力が問われる。(1)では最小値，最大値，中央値等を箱ひげ図から読み取り，対応するヒストグラムを推定する。(2)の問題図３で北海道地区の折れ線は実線で南九州地区のは点線でと記載されている。この記載がなかったとしたら，正しい判断ができたであろうか。全国的に南九州地区は開花日は早く，北海道地区は遅いという常識が必要になる。これは数学の問題ではないが，理科的な知識を含む日頃の日常認識の問題である。

(4)では，計算で理由を示したが，偏差の平均は0となること，偏差データを標準偏差で割ったデータの標準偏差は1になることは，直観的に理解しておこう。

＜総評＞

去年と問題構成はほとんど同じ。

第１問　[１]は式の変形と分解の問題。難易度はＣ

　　　　[２]は整数の命題の論理の問題。難易度はＢ

第２問　変数係数の２次関数のグラフの頂点の座標や最大値などを求める問題。難易度はＢ

第３問　三角形と外接円からなる図形の諸値を正弦定理などによって求める。難易度はＢ

第４問　データの統計処理の問題。ヒストグラム，箱ひげ図，散布図等によって表現されたデータの特徴を捉える。

　　　　(1)，(2)，(3)はグラフから特徴を正しく把握する。難易度Ｃ

　　　　(4)，(5)は標準偏差，共分散，相関係数等の定義と意味を把握していること。難易度Ｂ

数学Ⅰ・数学A　（注）この科目には，選択問題があります。（19ページ参照。）

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

［１］ ア３　イ１　ウ４　エ１　オカ −2　キ３　ク６　ケコ −7　サ３

［２］

(1)　シ０　ス２

(2)　セ０　ソ２　タ３

［３］ チ２　ツ４　テ１　ト５　ナ１　ニ３　ヌ４　ネノ −1　ハ４

＜解説＞

［１］

数学Ⅰ　第１問［１］に含まれる

［２］

数学Ⅰ　第１問［２］に同じ

［３］

数学Ⅰ　第２問 に含まれる

第２問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

［１］ アイ −1　ウ４　エ２　オカ 15　キ４　ク１　ケ４　コ４　サ７　シス 15　セ４

［２］ (1)　ソ３　タ４

(2)　チ４　ツ７　（解答の順序は問わない）

(3)　テ０　ト０　ナ１　ニ２

＜解説＞

［１］

△ABCにおいて，AB=3，BC=4，AC=2とする。図１のような図を描いて考える。

次の エ には，下の⓪〜②のうちから当てはまるものを一つ選べ。

余弦定理により，$\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2}=\dfrac{-1}{4}=\dfrac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$

余弦が負なので，∠BAC は鈍角②である。

また$\sin\angle BAC=\sqrt{1-(\cos\angle BAC)^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{\text{オカ}}}{\text{キ}}$

$\angle CAD=180^\circ-\angle BAC$,

$\cos\angle CAD=\cos(180^\circ-\angle BAC)=-\cos\angle BAC=\dfrac{1}{4}=\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$

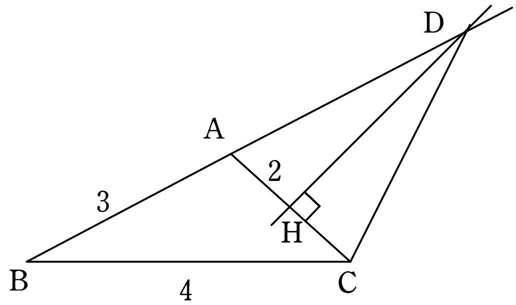
$AD=\dfrac{AH}{\cos\angle CAD}=\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=4=$ コ，したがって$DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{15}$

$$\triangle \mathrm{DBC}の面積=\triangle \mathrm{ABC}の面積+\triangle \mathrm{ACD}の面積=\frac{AB}{AD}\times\triangle \mathrm{ACD}の面積+\triangle \mathrm{ACD}の面積$$

$$=\left(\frac{3}{4}+1\right)\times\triangle \mathrm{ACD}の面積=\frac{7}{4}\left(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{15}\right)$$

$$=\frac{7\sqrt{15}}{4}=\frac{サ\sqrt{シス}}{セ}$$

図１



コメント：

簡明な図形の問題。特段難しいところはないので，スムーズに解答しよう。

［２］

(1)

数学Ⅰ　第４問　(1)に同じ

(2)

数学Ⅰ　第４問　(3)に同じ

(3)

数学Ⅰ　第４問　(4)に同じ

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア 4　イ 9　ウ 1　エ 6

(2)　オ 7　カキ 18

(3)　ク 1　ケ 6　コサ 43　シスセ 108　ソタチ 259　ツテト 648

(4)　ナニ 21　ヌネ 43　ノハ 88　ヒフヘ 259

＜解説＞

赤い袋には赤球2 個と白球1 個が入っており，白い袋には赤球1 個と白球1 個が入っている。最初に，さいころ1 個を投げて，3 の倍数の目が出たら白い袋を選び，それ以外の目が出たら赤い袋を選び，選んだ袋から球を1 個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。ここまでの操作を1 回目の操作とする。2 回目と3 回目の操作では，直前に取り出した球の色と同じ色の袋から球を1 個取り出して，球の色を確認してその袋に戻す。

(1)

1 回目の操作で赤い袋を選び，赤球を取り出す確率は，

（赤い袋を選ぶ確率 × 赤球を取り出す確率）だから，$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}=\frac{ア}{イ}$

1 回目の操作で白い袋を選び，赤球を取り出す確率は，

（白い袋を選ぶ確率 × 赤球を取り出す確率）だから，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}=\frac{ウ}{エ}$

(2)

2 回目の操作が白い袋で行われる確率は，1 回目で白球を取り出す確率である。

これは，1 回目で赤球を取り出す事象の余事象だから

（1 回目で白球を取り出す確率）＝1－(1 回目で赤球を取り出す確率）

$$=1-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\right)=1-\frac{11}{18}=\frac{7}{18}=\frac{オ}{カキ}$$

(3)

1 回目の操作で白球を取り出す確率をpで表し，2 回目の操作で白球を取り出す確率を求める。

1 回目の操作で赤球を取り出す確率は $1-p$，その後白球を取り出す確率は $\frac{1}{3}$

1 回目の操作で白球を取り出す確率はp，その後白球を取り出す確率は $\frac{1}{2}$

したがって，2 回目の操作で白球を取り出す確率は，

$(1-p)\times\frac{1}{3}+p\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}p+\frac{1}{3}=\frac{ク}{ケ}p+\frac{1}{3}$

(2) により$p=\frac{7}{18}$だから，$\frac{1}{6}p+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\frac{7}{18}+\frac{1}{3}=\frac{43}{108}=\frac{コサ}{シスセ}$

同様に考えると，3 回目の操作で白球を取り出す確率は，3 回目の操作で

（白い袋から白球を取り出す確率）＋（赤い袋から白球を取り出す確率）

したがって，$\frac{43}{108}\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{43}{108}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{259}{648}=\frac{ソタチ}{ツテト}$

(4)

2 回目の操作で取り出した球が白球で，その球を取り出した袋の色が白である条件付き確率

＝（2 回目の操作が白い袋かつ白い球を取り出す確率）／（2 回目の操作で白球を取り出す確率）

2回目の操作が白い袋である確率は 1 回目の操作で白球を取り出す確率 p

白い袋から白球を取り出す確率 $\frac{1}{2}$

したがって，（2 回目の操作が白い袋かつ白い球を取り出す確率）$=p\times\frac{1}{2}$

2 回目の操作で白球を取り出す確率 $\frac{43}{108}$

したがって，求める確率は$p\times\frac{1}{2}\div\frac{43}{108}=\frac{7}{18}\times\frac{1}{2}\times\frac{108}{43}=\frac{21}{43}=\frac{ナニ}{ヌネ}$

また，3 回目の操作で取り出した球が白球で，はじめて白球を取り出したのが3 回目の操作である

条件付き確率を考察する。3回目で白球をはじめて取り出す過程は

1 回目の操作で赤球を取り出す：確率 $\frac{4}{9}+\frac{1}{6}=\frac{11}{18}$

2 回目の操作で赤い袋から赤球を取り出す：確率 $\frac{2}{3}$

3 回目の操作で赤い袋から白球を取り出す：確率 $\frac{1}{3}$

したがって，はじめて白球を取り出すのが3 回目の操作である確率 $\frac{11}{18}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{22}{162}$

3 回目の操作で白球を取り出す確率は $\frac{259}{648}$ だから，$\frac{22}{162}\div\frac{259}{648}=\frac{88}{259}=\frac{\text{ノハ}}{\text{ヒフヘ}}$

ここで参考のために，条件付き確率についてまとめておこう。

事象A が起こったときの事象C が起こる条件付き確率は $P(C/A)=\frac{P(C,\ A)}{P(A)}$

事象C が起こったときの事象A が起こる条件付き確率は $P(A/C)=\frac{P(A, C)}{P(C)}$

ここで，$P(A)$，$P(C)$はそれぞれ事象A，Cが起こる確率，$P(A\ , C)=P(C\ , A)$で，事象Aと事象Cが同時に起こる確率である。

これを上記の例に当てはめてみると，

事象 A は 3 回目の操作で白球を取り出すこと

事象 C は 2 回目の操作まで赤球を取り出すこと

$P(C\ , A)$ は事象Cと事象A が同時に起こる確率で，2 回目の操作まで赤球を取り出し，3 回目で白球を取り出す確率である。

コメント：

確率の問題は，事象が起こる場合とその条件を的確に理解することが必要である。この問題では条件付き確率を求める問題が，やや手強い。条件付き確率の応用問題を解く勉強をしておきたい。昨年も出題された。

第４問（選択問題）（配点 20）

＜解答＞

(1)　ア 8　イウ 17　エオ 23　カキ 49

(2)　ク 8　ケコ 17　サ 7　シス 15

(3)　セ 2　ソ 6

(4)　タ 3　チ 2　ツテ 23　トナニ 343

＜解説＞

(1)

不定方程式 $49x-23y=1$　① を変形して

$$y=\frac{49x-1}{23}=2x+\frac{3x-1}{23}$$

i を整数として $\frac{3x-1}{23}=i$ とおけるから，$x=\frac{23i+1}{3}$

これを満たす自然数 x の最小値は $i=1$ のときで $x=8=$ア，$\therefore\ y=2x+\frac{3x-1}{23}=17=$イウ

すると① に $x=8$，$y=17$ を代入して，$49\times8-23\times17=1$　②

①−② から，$49(x-8)-23(y-17)=0$，$49(x-8)=23(y-17)$

49と23 は互いに素だから，k を整数として$x-8=23k$，$y-17=49k$ と表せる。

したがって，すべての整数解は

$x=23k+8=$エオ$k+8$，$y=49k+17=$カキ$k+$イウ

と表せる。

不定方程式の整数解を求める方法として，ユークリッドの互除法が数学Aの教科書に記載されている。ところが，この方法は案外と煩瑣で誤り易いというのが筆者の経験である。実際には同じことなのだが，上記のように式を変形しながら，x が整数となる条件を求めた方が単純で速い。

ユークリッドの互除法を使うと以下のようになる。

$a=49$，$b=-23$として，$ax+by=1$

下のような互除法の計算して，整数解を求める。

$8a+17b=49\times8+(-23)\times17=1$となって，$x=8$，$y=17$が整数解

$$\begin{array}{rrrl} & -2 & & \\ -23\,) & 49 & & \\ & 46 & -8 & \\ \hline & 3\,) & -23 & \\ & & -24 & \\ \hline & & 1 & \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{rrrl} & -2 & & \\ b\,) & a & & \\ & -2b & -8 & \\ \hline & a+2b\,) & b & \\ & & -8a-16b & \\ \hline & & 8a+17b & \end{array}$$

(2)

49 の倍数である自然数Aと23 の倍数である自然数B の組 $(A,\ B)$ を考える。

A とB の差の絶対値が1となる組 $(A,\ B)$ の中で，A が最小になるものを求める。

$A=49x$，$B=23y$ として $|A-B|=|49x-23y|=1$

$49x-23y=1$の場合，(1)のように $A=49\times8$ が最小

$49x-23y=-1$の場合，$y=\frac{49x+1}{23}=2x+\frac{3x+1}{23}$，$1\leqq x\leqq8$では$y$ は自然数にならない。

したがってAが最小になるものは $(A,\ B)=(49\times8,\ 23\times17)=(49\times$ク，$23\times$ケコ$)$

AとBの差の絶対値が 2 となる組 $(A,\ B)$ の中で，A が最小になるものを求める。

$A=49x$，$B=23y$ として $|A-B|=|49x-23y|=2$

$49x-23y=2$の場合は，$y=\frac{49x-2}{23}=2x+\frac{3x-2}{23}$，$x=16$が最小の$A$を与える

$49x-23y=-2$の場合は，$y=\frac{49x+2}{23}=2x+\frac{3x+2}{23}$

jを整数として $\dfrac{3x+2}{23}=j$とおけるから，$x=\dfrac{23j-2}{3}$，$j=1$のとき最小値 $x=7$，このとき$y=15$

したがって，A が最小になるものは $(A,\ B)=(49\times7,\ 23\times15)=(49\times$サ，$23\times$シス$)$

(3)

連続する三つの自然数a，$a+1$，$a+2$を考える。

aと$a+1$の最大公約数は1

$a+1$と$a+2$の最大公約数は1

aと$a+2$の最大公約数は1または2＝セ

∵ aが偶数のとき$a+2$も偶数だから

また，次の条件がすべての自然数aで成り立つような自然数mのうち，最大のものを求める。

条件：$a(a+1)(a+2)$はmの倍数である。

kを自然数として，$a(a+1)(a+2)=km$とおく。$m=\dfrac{a(a+1)(a+2)}{k}\leqq a(a+1)(a+2)$

$m\leqq a(a+1)(a+2)$が，すべての自然数aで成り立つためには,

$a=1$のとき$a(a+1)(a+2)$が最小になるので，$m=6=$ソ

(4)

6762を素因数分解すると

$6762=2\times3\times7^2\times23=2\times$タ$\times7^{チ}\times$ツテ

bを，$b(b+1)(b+2)$が6762の倍数となる最小の自然数とする。

このとき，b，$b+1$，$b+2$のいずれかは$7^{チ}=7^2=49$の倍数であり，またb，$b+1$，$b+2$のいずれかはツテ＝23の倍数である。

(2)から，49 の倍数である自然数 A と23 の倍数である自然数 B の差が2 である最小の自然数 A は $49\times7=343$ だから，$b=343=$トナニ である。

$b(b+1)(b+2)=343\times344\times345=(49\times7)(43\times8)(23\times3\times5)$

$=(2\times3\times7^2\times23)\times(2\times2\times5\times7\times43)=6762\times(140\times43)$

となって確かに 6762 の倍数となる。

コメント：

限られた時間の中で解答するので，不定方程式の解法については習熟している必要がある。最小値になる特別解と一般解の両方を求められる場合が多い。

(3)では三つの連続する整数には，一つあるいは二つの偶数と一つの3の倍数が含まれるということを脳裏に浮かべる。偶数かつ3の倍数で最小値は6。

(4) は一般的には難しい問題だが，(2) で扱った49 の倍数である自然数A と23 の倍数である自然数 B の差の絶対値が 2 となる組 $(A,\ B)$ の中で，A が最小になるものが $A=49\times7=343$ であることに気づきたい。

もし，この気づきがないと以下のように複雑な解法となる。

$b(b+1)(b+2)=6762\times m=2\times3\times7^2\times23\times m=m_1(7^2\times m_2)(23\times m_3)$とおく。$6m=m_1m_2m_3$

$7^2=49=23\times2+3$だから，$7^2\times m_2$と$23\times m_3$の差が1または2になる場合はm_2の小さい順に

$7^2\times7=(23\times2+3)\times7=23\times14+21=23\times14+23-2=23\times15-2$

$7^2\times 8=(23\times 2+3)\times 8=23\times 16+24=23\times 16+23+1=23\times 17+1$

m_2の小さい方をとり，$b=7^2\times 7=345-2=343$，$b+1=344$，$b+2=23\times 15=345$とする。

$b(b+1)(b+2)=(7^2\times 7)\times 344\times(23\times 15)=(7^2\times 7)\times(2^3\times 43)\times(23\times 3\times 5)$

$=2\times 3\times 7^2\times 23\times(2^2\times 5\times 7\times 43)$ となって確かに6762の倍数である。

以上によって，$b=343=$トナニ

$7^2=49=23\times 2+3$に着眼して，$7^2\times 7=23\times 15-2$を導くと速いと思ったので記載した。

第５問（選択問題）（配点　20）

<解答>

ア 6　イ 2　ウ 1　エ 2　オカ 15　キ 5　ク 3　ケ 4　コ 3　サ 6　シ 2　スセ 15　ソ 5

<解説>

図１(a)，(b)を参照する。△ABCにおいて，AB=4，BC=7，AC=5とする。

このとき，$\cos\angle BAC=-\dfrac{1}{5}$，$\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$である。

△ABCの面積は $S=\dfrac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{AC}\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times 4\times 5\times\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$

△ABCの内接円の半径をrとすれば，$S=\dfrac{1}{2}(4+7+5)r=8r=4\sqrt{6}$，$\therefore\ r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{ア}}{イ}$

図１(a)において Iは内心，Gは内接円と辺BCの接点，AD=AE=a，BD=BG=b，CG=CE=c とすれば,

$a+b+c=8$，$b+c=7$だから，$a=\mathrm{AD}=1=$ウ

$\mathrm{AI}=\sqrt{(AD)^2+(ID)^2}=\sqrt{(AD)^2+r^2}=\sqrt{1+\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\dfrac{1}{2}\mathrm{AI}\times\mathrm{DE}=\mathrm{AD}\times r$だから，$\mathrm{DE}=\dfrac{2r}{AI}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}\times\sqrt{6}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}=\dfrac{エ\sqrt{オカ}}{キ}$

図１(b)においてチェバの定理から,

$\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{1}{3}=1$，$\therefore\ \dfrac{BQ}{CQ}=\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{3}{4}=\dfrac{ク}{ケ}$

BC=7だから，BQ=3=コであり，QとGは一致する。

したがって$\mathrm{IQ}=\mathrm{IG}=r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{サ}}{シ}$

∠DFEは弦DE上の円周角，したがって接線ADとDEのなす角∠ADEに等しい。

△ADEに対する余弦定理により,

$$\cos\angle DFE=\cos\angle ADE=\frac{(AD)^2+(DE)^2-(AE)^2}{2AD\cdot DE}$$

$$=\frac{5}{4\sqrt{15}}\left(1+\frac{12}{5}-1\right)=\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{5}=\frac{\sqrt{スセ}}{ソ}$$

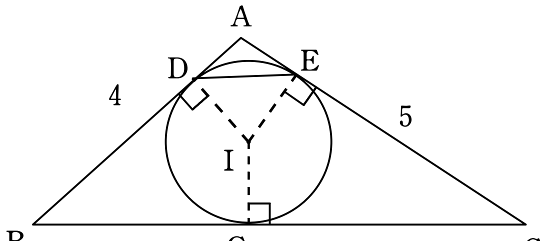


図１(a)

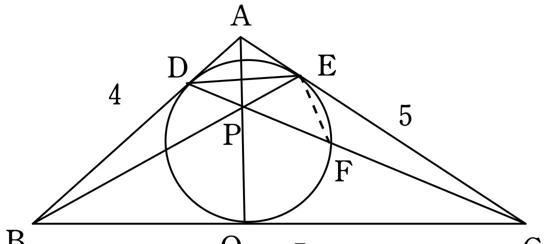


図１(b)

コメント：

昨年も，正弦定理，余弦定理，内心，ほうべきの定理，メネラウスの定理が関係するような図形問題が出題された。図１のような図を手書きして題意を把握し，考察を進めよう。内接円の半径の求め方，チェバの定理，余弦定理など，速やかに使えるようにしよう。

＜総評＞

第３～５問から２つを選ぶ。昨年とほぼ同じ分野から出題されている。

第１問　[１]　数学Ⅰ　第１問[１]に含まれる
　　　　[２]　数学Ⅰ　第１問[２]に同じ
　　　　[３]　数学Ⅰ　第２問 に含まれる
第２問　[１]　図形の問題。難易度はC。
　　　　[２](1)　数学Ⅰ　第４問　(1)に同じ
　　　　　(2)　数学Ⅰ　第４問　(3)に同じ
　　　　　(3)　数学Ⅰ　第４問　(4)に同じ
第３問　確率の問題。難易度はB。条件付き確率がやや難しいか。
第４問　不定方程式と整数の問題。速やかに解くために少々工夫が必要だ。
　　　　難易度はB＋。
第５問　図形の問題。難易度はB。

200311

＜修正＞

数学Ⅰ･数学Aにおいて，第４問(4)の解説とコメントを修正した。

201209修正