平成23年度（2011年度）センター試験　数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学Ｂ　解説

数学　②　［数学Ⅱ　数学Ⅱ・Ｂ］　（100点，60分）

数　学　Ⅱ（全問必答）

第１問（配点　30）

［１］ ア２　イ２　ウ３　エ１　オ２　カ２　キ２　ク３　ケ６　コサ −1　シ３　ス１　セ６　ソタ −3

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$のとき，関数

$$y = \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta$$

の最小値を求めよう。

$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とおくと

$$t^2 = \text{ア}\cos^2\theta + \text{イ}\sqrt{\text{ウ}}\sin\theta\cos\theta + 1$$

であるから，

$$y = t^2 - \text{オ}t - \text{カ}$$

となる。また

$$t = \text{キ}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\text{ク}}\right)$$

$\theta + \dfrac{\pi}{\text{ク}}$ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\pi}{\text{ケ}} \leqq \theta + \frac{\pi}{\text{ク}} \leqq \frac{\pi}{\text{ク}}$$

であるから，tのとり得る値の範囲は

$$\text{コサ} \leqq t \leqq \sqrt{\text{シ}}$$

である。したがって，yは$t = \text{ス}$，すなわち$\theta = -\dfrac{\pi}{\text{セ}}$のとき，最小値ソタをとる。

＜解説＞

$$t^2 = \sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta + 3\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$
$$= 2\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1$$

$$y = 2\cos^2\theta - 1 + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - 2(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)$$
$$= (2\cos^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1) - 2 - 2t = t^2 - 2t - 2$$

$$t = 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta + \sin\frac{\pi}{3}\cos\theta\right) = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$であるから，$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{\pi}{3}$であるから，$t$のとり得る値の範囲は

$\theta + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$のとき$t = -1$，$\theta + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$のとき$t = \sqrt{3}$だから，$-1 \leqq t \leqq \sqrt{3}$である。

また，$y = (t-1)^2 - 3$だから，yが最小値をとるのは，$t = 1$，すなわち$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$だから

$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ のときである。すなわち $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ のとき，最小値 -3 をとる。

コメント：三角関数の2次式の変形の問題。三角関数の2倍角の公式，三角関数の合成の公式など，基本式を記憶理解していなければならない。スムーズに計算できるよう，習熟すること。難易度はC

［2］ チ 7　ツテ 20　ト 4　ナ 3　ニ 5　ヌ 2　ネ 6　ノハ 11

自然数 x で，条件

$12(\log_2\sqrt{x})^2-7\log_4 x-10>0$　　①

$x+\log_3 x<14$　　②

を満たすものを求めよう。

まず，x を正の実数として，条件①を考える。①は $X=\log_2 x$ とおくと

$6X^2-$チ$X-$ツテ>0

となる。この2次不等式を解くと

$X<-\dfrac{\text{ト}}{\text{ナ}}$，$\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}<X$

となる。したがって，条件①を満たす最小の自然数 x はネであり，
ネ以上のすべての自然数 x は①を満たす。

次に，条件②について考えると，②を満たす最大の自然数 x はノハであり，
ノハ以下のすべての自然数 x は②を満たす。

したがって，求める x はネ以上ノハ以下の自然数である。

<解説>

$\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2 x=\dfrac{X}{2}$，$\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{X}{2}$，これらを①に代入すると

$6X^2-7X-20=(3X+4)(2X-5)>0$，したがって，$X<\dfrac{-4}{3}$，$\dfrac{5}{2}<X$

すると，$\log_2 x<\dfrac{-4}{3}$ のとき，$x<2^{\frac{-4}{3}}$ となり，これを満たす自然数はない。

また，$\dfrac{5}{2}<\log_2 x$ のとき，$2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}<x$ となり，$5<4\sqrt{2}<6$ だから，これを満たす最小の自然数は6であり，6以上のすべての自然数は①を満たす。

②を変形すると，$\log_3 x<14-x$，$x<(14-x)^3$　　②’

x が11以下なら②’を満たすが，12以上では②’を満たさないことが分かる。

したがって，②を満たす最大の自然数は11である。

コメント：対数の底の変換に関係する問題。難易度はC

第２問（配点 30）

アイ 2a　ウ 2　エ a　オ 2　カ 0　キ 3　クケ 12　コ 3　サ 2　シ 4　ス 8　セ 3　ソ 0　タ 8
チ 3　ツ 4　テ 3　ト 8　ナニ 27

座標平面上で，放物線$y=x^2$をCとする。
曲線C上の点Pのx座標をaとする。点PにおけるCの接線lの方程式は

$y=$アイ$x-a^{ウ}$

である。$a\fallingdotseq 0$のとき直線lがx軸と交わる点をQとすると，Qの座標は

$\left(\dfrac{エ}{オ},\ カ\right)$ である。

$a>0$のとき，曲線Cと直線lおよびx軸で囲まれた図形の面積をSとすると

$S=\dfrac{a^{キ}}{クケ}$ である。

$a<2$のとき，曲線Cと直線lおよび直線$x=2$で囲まれた図形の面積をTとすると

$T=-\dfrac{a^3}{コ}+サa^2-シa+\dfrac{ス}{セ}$ である。

$a=0$のときは$S=0$，$a=2$のときは$T=0$であるとして，$0\leqq a\leqq 2$に対して$U=S+T$とおく。
aがこの範囲を動くとき，Uは$a=$ソで最大値$\dfrac{タ}{チ}$をとり，$a=\dfrac{ツ}{テ}$で最小値$\dfrac{ト}{ナニ}$をとる。

＜解説＞

図１を参照しながら考える。

$\dfrac{dy}{dx}=2x$だから，lは傾き$2a$で点$(a,\ a^2)$を通るので，lの方程式は

$y-a^2=2a(x-a)$だから，$y=2ax-a^2$

$a\fallingdotseq 0$のとき直線lがx軸と交わる点をQとすると，Qの座標は，$y=0$として$x=\dfrac{a}{2}$だから

$\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ である。

$$S=\int_0^{\frac{a}{2}}x^2dx+\int_{\frac{a}{2}}^{a}(x^2-2ax+a^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{2}}+\left[\frac{x^3}{3}-ax^2+a^2x\right]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$=\frac{a^3}{24}+\frac{a^3}{3}-a^3+a^3-\frac{a^3}{24}+\frac{a^3}{4}-\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{12}$$

$$T=\int_a^2(x^2-2ax+a^2)dx=\left[\frac{x^3}{3}-ax^2+a^2x\right]_a^2=\frac{8}{3}-4a+2a^2-\frac{a^3}{3}=-\frac{a^3}{3}+2a^2-4a+\frac{8}{3}$$

$$U=S+T=-\frac{a^3}{4}+2a^2-4a+\frac{8}{3}\quad ①$$

$$\frac{dU}{da}=-\frac{3a^2}{4}+4a-4=-\frac{1}{4}(3a^2-16a+16)=-\frac{1}{4}(3a-4)(a-4)$$

すると，図２のようにUは変化するから，$0 \leqq a \leqq 2$では，$a=0$，あるいは$a=2$のいずれかで最大値をとる。極値をとる$a=\dfrac{4}{3}$から離れているのは，0の方だから，$a=0$で最大値をとることが予想される。実際に①に$a=0$と$a=2$を代入してみると，$a=0$で最大値$\dfrac{8}{3}$をとることが分かる。

①に$a=\dfrac{4}{3}$を代入すると，最小値として

$$U=-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^3+2\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{3}+\frac{8}{3}=-\frac{16}{27}+\frac{32}{9}-\frac{8}{3}=\frac{-16+96-72}{27}=\frac{8}{27}$$

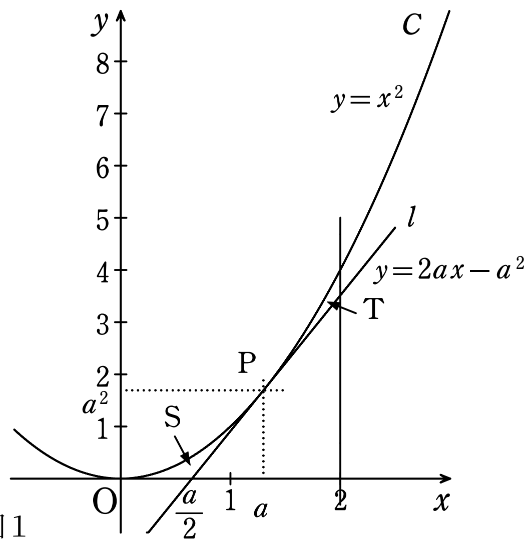

図１

a	0		$\frac{4}{3}$		2		4	
$\frac{dU}{da}$		$-$		$+$				$-$
U		↘		↗				↘

図２

コメント：放物線に関わる積分の問題。放物線の接線の方程式の導出は習熟していなければならない。曲線や直線に囲まれた領域の面積の算出方法（積分）も習熟していること。難易度はＢ。

第３問（配点　20）

ア３　イ３　ウ４　エ６　オ５　カ２　キ３　クケ30　コサ15　シ３　スセ15　ソ５　タ９　チ１　ツ８　テト15

Oを原点とする座標平面上に正六角形OABCDEがある。ただし，頂点は時計の針の回転と逆の向きにO，A，B，C，D，Eの順に並んでいるものとする。また，直線OAの方程式は$y=3x$，直線BEの方程式は$y=3x+2$であるとする。点A，Dの座標と正六角形OABCDEの外接円の方程式を求めよう。

原点を通り，直線OAに垂直な直線ℓ の方程式は　$y=-\dfrac{1}{\text{ア}}x$　であり，直線CDの方程式は$y=\text{イ}\,x+\text{ウ}$である。Dはℓ と直線CDの交点であるから，Dの座標は　$\left(-\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}},\ \dfrac{\text{カ}}{\text{オ}}\right)$　である。

また，OA：OD$=1:\sqrt{キ}$であるからOA$=\dfrac{2\sqrt{クケ}}{コサ}$であり，

Aの座標は $\left(\dfrac{2\sqrt{シ}}{スセ},\ \dfrac{2\sqrt{シ}}{ソ}\right)$となる。

外接円の中心は線分ADの中点で，その半径は正六角形OABCDEの１辺の長さに等しいから，

外接円の方程式は $\left(x+\dfrac{タ-\sqrt{シ}}{スセ}\right)^2+\left(y-\dfrac{チ+\sqrt{シ}}{ソ}\right)^2=\dfrac{ツ}{テト}$ である。

<解説>

図３を参照しながら考える。

直線$y=3x$に垂直な直線の傾きは$-\dfrac{1}{3}$だから，原点を通り傾き$-\dfrac{1}{3}$の直線がℓ の方程式で，

$$y=-\frac{1}{3}x \qquad ①$$

直線CDは直線BEと平行で，それらの間隔は直線BEとOAとの間隔に等しいから，

直線CDの方程式は　$y=3x+4$　②

Dは①，②の交点だから，その座標は$\left(-\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$　③

$\angle$AOB$=\dfrac{\pi}{6}$だから，OD$=$OB$=\sqrt{3}$OAなので，OA：OD$=1:\sqrt{3}$

OD$=\sqrt{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$，OA$=\dfrac{OD}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$

Aの座標は$\left(\dfrac{OA}{\sqrt{10}},\ \dfrac{3OA}{\sqrt{10}}\right)=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{15},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\right)$　④

線分ADの中点の座標は③，④から$\left(\dfrac{-9+\sqrt{3}}{15},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{5}\right)$だから，外接円の方程式は

$$\left(x+\frac{9-\sqrt{3}}{15}\right)^2+\left(y-\frac{1+\sqrt{3}}{5}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{30}}{15}\right)^2=\frac{8}{15}$$

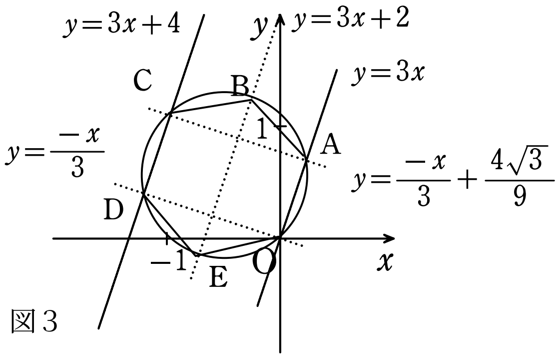

図３

コメント：１次関数による図形に関する問題。題意を的確に把握するためには，図を描くことが良い。直線図形だから，できるだけ正確に描くこと。すると，問題の全体像が見えてくるだろう。問題は誘導的にできているから，全文に目を通してから，前の解を利用して次の解を考えていく。交点や中点の座標は、遅滞なく求めることができなければならない。難易度はＢ＋。

第４問（配点 20）

ア a　イ b　ウ 1　エ b　オ a　カ 1　キク −2　ケ 5　コ 1　サ 7　シ 3　ス 6　セ 2　ソ 2　タ 5　チ 6　ツテ −1　ト 3　ナ 2　ニ 2　ヌ 2

a，bは実数で，$P(x)$と$Q(x)$はそれぞれ2次と3次の整式であるとする。$Q(x)$は$P(x)$で割り切れて，商が$x+a$であるとする。このとき

$Q(x)=(x+$ア$)P(x)$

が成り立つ。さらに$\{P(x)\}^2$を$Q(x)$で割ったとき，商が$x+b$，余りが$P(x)$であるとする。このとき

$\{P(x)\}^2=(x+$イ$)Q(x)+P(x)$

が成り立つ。上の二つの等式から

$\{P(x)\}^2=\{(x+$ア$)(x+$イ$)+$ウ$\}P(x)$

となる。したがって

$P(x)=x^2+(a+$エ$)x+$オ$b+$カ

である。

方程式$Q(x)=0$の三つの解をα，β，γとする。$\alpha+\beta+\gamma=-5$のとき

$b=$キク$a+$ケ　　①

であり，このとき，$Q(x)=0$が虚数解をもつようなaのとり得る値の範囲は

コ$<a<\dfrac{サ}{シ}$である。

一方，$\alpha\beta\gamma=-6$のとき　$b=\dfrac{-a+ス}{a^{セ}}$　　②

である。①と②がともに成り立つとき

ソa^3-タa^2-a+チ$=0$　　③

であり，③を満たすaの値は

ツテ，$\dfrac{ト}{ナ}$，ニ

の三つである。このうち$Q(x)=0$が虚数解をもつようなaの値はヌ個ある。

＜解説＞

$Q(x)$は$P(x)$で割り切れて，商が$x+a$だから，$Q(x)=(x+a)P(x)$

$\{P(x)\}^2$を$Q(x)$で割ったとき，商が$x+b$，余りが$P(x)$であるから，$\{P(x)\}^2=(x+b)Q(x)+P(x)$

上の二つの等式から　$\{P(x)\}^2=\{(x+a)(x+b)+1\}P(x)$

したがって　$P(x)=x^2+(a+b)x+ab+1$

$Q(x)=(x+a)P(x)$，$P(x)=x^2+(a+b)x+ab+1$だから，

$Q(x)=(x+a)\{x^2+(a+b)x+ab+1\}=x^3+(2a+b)x^2+(a^2+2ab+1)x+a(ab+1)$　　④

一方，$Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x-\alpha\beta\gamma$

$=x^3+5x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x-\alpha\beta\gamma$　　⑤

したがって，④，⑤を比較して，$2a+b=5$だから，$b=-2a+5$　⑥

$Q(x)=0$となる，$x=-a$以外の解は，④によって

$P(x)=x^2+(a+b)x+ab+1=x^2+(5-a)x+a(5-2a)+1=0$の解である。これが虚数解をもつ条件は，2次方程式の判別式によって，

$(5-a)^2-4\{a(5-2a)+1\}=3a^2-10a+7=(3a-7)(a-1)<0$，したがって虚数解をもつようなaのとり得る値の範囲は

$1<a<\dfrac{7}{3}$　⑦

$\alpha\beta\gamma=-6$のとき，④，⑤を比較して，$a(ab+1)=6$だから，$b=\dfrac{-a+6}{a^2}$　⑧

⑥と⑧がともに成り立つとき

$-2a+5=\dfrac{-a+6}{a^2}$だから，$2a^3-5a^2-a+6=0$　⑨

$2a^3-5a^2-a+6=(a-2)(2a-3)(a+1)=0$，したがって，⑨を満たす$a$の値は

-1，　$\dfrac{3}{2}$，　2

の三つである。⑦を考慮すると，$Q(x)=0$が虚数解をもつようなaの値は$\dfrac{3}{2}$と2の2個ある。

コメント：2次式，3次式の変形と方程式の解に関する問題。まずは，解によって因数分解できること，解と式の係数とが関係づけられていることを，理解していなければならない。2次方程式の解が実数解か虚数解かについての判別式を覚えていなければならない。あとは誤りなく計算すれば良い。難易度はＢ

＜総評＞

第１問　三角関数や対数の式の変換に関する問題。難易度はＣ

第２問　放物線の接線や積分に関する問題。難易度はＢ

第３問　1次関数による図形に関する問題。難易度はＢ＋

第４問　2次関数，3次関数の変形と方程式の解に関する問題。難易度はＢ

数学Ⅱ・数学Ｂ

第１問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第１問に同じ

第２問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第２問に同じ

第３問（選択問題）（配点　20）

ア 7　イ 4　ウ 1　エオ −1　カ 4　キ ⓪　ク 9　ケ 5　コ 4　サ ⓪　シ ①　ス ①　セソ 16

タ9　チ4　ツ ①　テ3　ト4　ナ ⓪

数直線上で点Pに実数aが対応しているとき，aを点Pの座標といい，座標がaである点PをP(a)で表す。

数直線上に点$P_1(1)$，$P_2(1)$をとる。線分P_1P_2を3：1に内分する点をP_3とする。一般に，自然数nに対して，線分P_nP_{n+1}を3：1に内分する点をP_{n+2}とする。点P_nの座標をx_nとする。

$x_1=1$，$x_2=2$であり，$x_3=\dfrac{ア}{イ}$である。数列$\{x_n\}$の一般項を求めるために，この数列の階差数列を考えよう。自然数nに対して$y_n=x_{n+1}-x_n$とする。

$y_1=ウ$，　　$y_{n+1}=\dfrac{エオ}{カ}y_n$　　$(n=1, 2, 3, ...)$である。

したがって，$y_n=\left(\dfrac{エオ}{カ}\right)^{キ}$　　$(n=1, 2, 3, ...)$であり

$x_n=\dfrac{ク}{ケ}-\dfrac{コ}{ケ}\left(\dfrac{エオ}{カ}\right)^{サ}$　　$(n=1, 2, 3, ...)$

となる。ただし，キ，サについては，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　$n-1$　　①　n　　②　$n+1$　　③　$n+2$

次に，自然数nに対して$S_n=\sum_{k=1}^{n}k|y_n|$を求めよう。$r=\left|\dfrac{エオ}{カ}\right|$とおくと

$S_n-rS_n=\sum_{k=1}^{シ}r^{k-1}-nr^{ス}$　　$(n=1, 2, 3, ...)$であり，したがって

$S_n=\dfrac{セソ}{タ}\left\{1-\left(\dfrac{1}{チ}\right)^{ツ}\right\}-\dfrac{n}{テ}\left(\dfrac{1}{ト}\right)^{ナ}$　となる。

ただし，シ，ス，ツ，ナについては，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　$n-1$　　①　n　　②　$n+1$　　③　$n+2$

＜解説＞

線分P_1P_2を3：1に内分する点がP_3だから，$x_3=\dfrac{x_1+3x_2}{3+1}=\dfrac{7}{4}$

一般に，線分P_nP_{n+1}を3：1に内分する点がP_{n+2}だから，$x_{n+2}=\dfrac{x_n+3x_{n+1}}{3+1}$

$y_n=x_{n+1}-x_n$だから，$y_1=x_2-x_1=2-1=1$

$y_{n+1}=x_{n+2}-x_{n+1}=\dfrac{x_n+3x_{n+1}}{4}-x_{n+1}=-\dfrac{1}{4}(x_{n+1}-x_n)=\dfrac{-1}{4}y_n$

したがって，$y_n=\left(\dfrac{-1}{4}\right)^{n-1}$　　$(n=1, 2, 3, ...)$

すると，$\sum_{k=1}^{n} y_k=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+....+(x_n-x_{n-1})+(x_{n+1}-x_n)=x_{n+1}-x_1$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{4}\right)^{k-1}=\frac{\left\{\left(\frac{-1}{4}\right)^n-1\right\}}{\left(\frac{-1}{4}\right)-1}=\frac{-4}{5}\left\{\left(\frac{-1}{4}\right)^n-1\right\}=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n \quad ①$$

したがって，$x_{n+1}=x_1+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n=\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^n$

したがって，$x_n=\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$

①は初項1，公比$\frac{-1}{4}$の等比数列のn項までの和だから，等比数列の和の公式を用いた。

$S_n=\sum_{k=1}^{n} k|y_n|=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$，$r=\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4}$だから，$rS_n=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^k$，したがって，

$$S_n-rS_n=\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}-\sum_{k=1}^{n} kr^k=\sum_{k=1}^{n} k(r^{k-1}-r^k)$$
$$=(1-r)+(2r-2r^2)+(3r^2-3r^3)+....+\{(n-1)r^{n-1}-(n-1)r^n\}$$
$$=1+r+r^2+....+r^{n-1}-nr^n=\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}-nr^n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ ...)$$

$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=\frac{r^n-1}{r-1}$だから，

$S_n=\frac{1}{1-r}\left(\frac{r^n-1}{r-1}-nr^n\right)=\frac{1}{(1-r)^2}(1-r^n)-\frac{n}{1-r}r^n$　となる。

$r=\frac{1}{4}$を代入して整理すると，

$$S_n=\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

コメント：等比数列の一般項および等比数列の和の導出に関する問題。線分の内分の導出はスムーズにできなければならない。等比数列の和の公式は正しく記憶しておかねばならない。難易度はB＋

第４問（選択問題）（配点　20）

アａ　イｂ　ウ２　エ３　オ１　カ１　キ１　ク２　ケ３　コ３　サ２　シ３　ス１　セ４　ソ１
タ２　チ０　ツテ −2　ト２

四角錐OABCDにおいて，三角形OBCと三角形OADは合同で，OB=1，BC=2，OC=$\sqrt{3}$であり，底面の四角形ABCDは長方形である。AB=2rとおき，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおく。

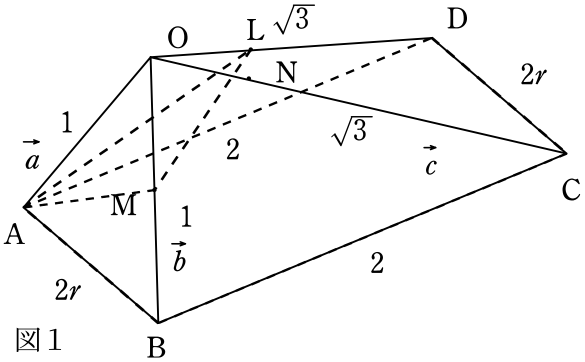

図１

$\overrightarrow{OD}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表すと$\overrightarrow{OD}=\vec{ア}-\vec{イ}+\vec{c}$である。辺ODを1：2に内分する点をLとすると

$$\overrightarrow{AL}=-\frac{ウ}{エ}\vec{a}-\frac{オ}{エ}\vec{b}+\frac{カ}{エ}\vec{c}$$ 　となる。

さらに辺OBの中点をM，3点A，L，Mの定める平面をαとし，平面αと辺OCとの交点をNとする。点Nは平面α上にあることから，$\overrightarrow{AN}$は実数s，tを用いて$\overrightarrow{AN}=s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AM}$と表されるので

$$\overrightarrow{ON}=\left(キ-\frac{ク}{ケ}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{コ}+\frac{t}{サ}\right)\vec{b}+\frac{s}{シ}\vec{c}$$

となる。一方，点NはOC上にもある。これらから，$\overrightarrow{ON}=\frac{ス}{セ}\vec{c}$となる。

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=ソ-タr^2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=チ$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=ツテr^2$である。よって，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}$を計算すると，AB$=\sqrt{ト}$ のとき，直線AMと直線MNは垂直になることがわかる。

<解説>

図１を参照しながら考える。

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OL}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}=-\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}=\vec{a}+s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AM}=\vec{a}+s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM})$$

$$=\vec{a}+s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\vec{a}+s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\left(1-\frac{2}{3}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{3}+\frac{t}{2}\right)\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c} \qquad ①$$

$\overrightarrow{ON}$は辺OC上にあるのだから，ベクトル$\vec{c}$のみによって表される。①でベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$はベクトル$\vec{c}$以外の成分をもつので，それらの寄与は0すなわちその係数は0となる。すなわち

$$1-\frac{2}{3}s-t=0,\ -\frac{s}{3}+\frac{t}{2}=0 \quad だから，\ s=\frac{3}{4},\ t=\frac{1}{2}$$

したがって，①により，$\overrightarrow{ON}=\frac{s}{3}\vec{c}=\frac{1}{4}\vec{c}$　　②

△OABに余弦定理を適用すると，AB^2＝OA^2＋OB^2－2OA･OB cos$\angle AOB$，これは

$$(2r)^2=(\vec{a})^2+(\vec{b})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+1-2\vec{a}\cdot\vec{b}，したがって\vec{a}\cdot\vec{b}=1-2r^2 \qquad ③$$

同様に，△OBCに余弦定理を適用すると，$BC^2=OB^2+OC^2-2OB\cdot OC\cos\angle BOC$

$2^2=(\vec{b})^2+(\vec{c})^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}=1+3-2\vec{b}\cdot\vec{c}$，したがって$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　④

同様に，△OACに余弦定理を適用すると，$AC^2=OA^2+OC^2-2OA\cdot OC\cos\angle AOC$

$2^2+(2r)^2=(\vec{a})^2+(\vec{c})^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}=1+3-2\vec{a}\cdot\vec{c}$，したがって$\vec{a}\cdot\vec{c}=-2r^2$　　⑤

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=-\vec{a}+\dfrac{\vec{b}}{2}$，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$

しかるに，②から，$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{ON}=-\vec{a}+\dfrac{\vec{c}}{4}$だから，

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\vec{a}-\frac{\vec{b}}{2}-\vec{a}+\frac{\vec{c}}{4}=-\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}}{4}$$

したがって，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(-\vec{a}+\dfrac{\vec{b}}{2}\right)\left(-\dfrac{\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{c}}{4}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{4}-\left(\dfrac{\vec{b}}{2}\right)^2+\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{8}$

$$=\frac{1}{2}-r^2+\frac{r^2}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{r^2}{2}$$

直線 AMと直線MNが垂直になるということは，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ということだから，$r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

したがって，$AB=2r=\sqrt{2}$ のとき直線 AMと直線MNが垂直になる。

コメント：立体図形のベクトルによる取扱いの問題。問題図上に必要な点や直線などを描き，理解を深め，迅速に考察できるようにする。余弦定理，それのベクトルの内積による表現などは的確に理解していなければならない。また②の導出で，$\vec{a}$，$\vec{b}$が$\vec{c}$以外の成分をもつことから，その係数が0でなければならないという理解が必要である。立体図形，ベクトル表現と演算などを扱うことから，難易度はＢ＋。

第５問（選択問題）（配点　20）

(1)　アイ 32　ウ 0　エ 2　オ 3　カ 1　キ 3

番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	平均値	範囲	分散	標準偏差
1回戦（点）	33	44	30	38	29	26	43	23	28	34	33	26	36	30	27	A	21	35.60	6.0
2回戦（点）	37	44	34	35	30	－	41	－	－	38	33	－	41	37	－	37.0	14	B	C
3回戦（点）	－	D	－	－	－	－	43	－	－	E	－	－	F	－	－	43.0	7	6.50	2.5

<解説>

1回戦のゲームに参加した15人の得点の平均値$A=30+\dfrac{30}{15}=32.0$点

（上位10人の総得点）＋（下位5人の総得点）＝15人全員の総得点

したがって$10A_1+5A_2=15A$だから，$\dfrac{2}{3}A_1+\dfrac{1}{3}A_2=A$となる。

(2)　ク 7　ケ 0　コサ 16　シス 00　セ 4　ソ 0

＜解説＞

2回戦のゲームの得点について，表を視察すると，平均値37.0点からの偏差が最も大きい得点は44点と30点だから，偏差の最大値は7.0点である。

番号	1	2	3	4	5	7	10	11	13	14
2回戦の得点	37	44	34	35	30	41	38	33	41	37
平均点からの偏差	0	7	−4	−2	−7	3	1	−4	4	0
偏差の２乗	0	49	16	4	49	9	1	16	16	0

上の表から，偏差の２乗の和は160だから，分散Bの値は$\dfrac{160}{10}$だから，16.00点である。標準偏差Cの値は$\sqrt{B}$だから，4.0点である。

(3)　タ 0　チ 7　ツテ 26　トナ 47　ニヌ 42　ネノ 40

＜解説＞

3回戦について，表にしてみよう。

番号	2	7	10	13
2回戦の得点	D	43	E	F
平均点からの偏差	x	0	y	z
偏差の２乗	x^2	0	y^2	z^2

平均点からの偏差の和は0点になるから，$x+y+z=0$　①

F＜E＜43＜Dだから，$z<y<0<x$となるので，範囲が7であることから，$x-z=7$　②

分散が6.50だから，$x^2+y^2+z^2=6.5\times4=26$　③

①，②，③を解く。②から$z=x-7$，①，②から$y=7-2x$，これらを③に代入すると

$x^2+(7-2x)^2+(x-7)^2=26$，したがって，$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0$

すると，$x=3$のとき，$z=-4$，$y=1$

$x=4$のとき，$z=-3$，$y=-1$

$z<y<0<x$を満足するのは，$x=4$のときで，$y=-1$，$z=-3$　である。したがって，D，E，Fの値はそれぞれ47点，42点，40点である。

(4)　ハ ②　ヒ ⓪

＜解説＞

1回戦の得点pと2回戦の得点qの関係を表す4つのグラフを一瞥すると，$p=43$，44あたりで，⓪②と①③が異なる。表を参照すると，①③はおかしいことが分かる。⓪と②を比較すると，

$p=33$で⓪で$q=41$，②で$q=33$となっている。表を参照すると，$q=33$が正しいので②が正しい。②を視察すると，pが増大するとqも増大する傾向だから，pとqの間には正の相関があるので，⓪が正しい。

(5)　フ 3　ヘ 4

＜解説＞

下記のような表を書いてみれば分かる。

番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1回戦（点）p	33	44	30	38	29	26	43	23	28	34	33	26	36	30	27
2回戦（点）q	37	44	34	35	30	─	41	─	─	38	33	─	41	37	─
$q-p$	4	0	4	-3	1	─	-2	─	─	4	0	─	5	7	
$r=\dfrac{q-p}{p}\times 100$	12.1	0	13.3	-7.9	3.4	─	-4.7	─	─	11.8	0	─	13.9	23.3	─

階級（%）	-10 ～ 0	0 ～ 10	10 ～ 20	20 ～30
人数（人）	2	3	4	1

コメント：統計処理の問題。平均値，範囲，分散，標準偏差等の統計の基礎知識は的確に把握していなければならない。(1)では，（平均値×生徒数＝総得点）を利用する。(2)は表を書いていく。(3)では不等式を用いて，3元2次方程式を立てる。(4)ではグラフの違いを見つけて，表との対応をとる。相関の意味を知らねばならない。(5)度数分布の意味を知らねばならない。統計の基礎的な問題である。難易度はB。

第６問（選択問題）（配点　20）

(1)　ア 8　イウ 14

＜解説＞

$N=6$の場合の操作の過程は，$6\to 3\to 10\to 5\to 16\to 8\to 4\to 2\to 1$

したがって，$F(6)=8$

$N=11$の場合の操作の過程は,

$11\to 34\to 17\to 52\to 26\to 13\to 40\to 20\to 10$（以降は上に同じ）

したがって，$F(11)=14$

(2)　エ ⑤　オ ⑥　カ ④　キ ①　ク 2

```
100 INPUT N
110 LET I=N
```

```
120 LET C=0
130 IF I=1 THEN GOTO エ
140 IF INT(I/2)*2=I THEN
150     オ
160     GOTO 190
170 END IF
180 LET I=3*I+1
190 カ
200 キ
210 PRINT "F(";N;")=";C
220 END
```

＜解説＞

I＝1になった場合には，操作終了ということだから，操作の回数を印刷して，プログラムは終了する。したがって，エは210。

140で，INT(I/2)*2＝I ならば，Iは偶数ということだから，150ではI/2の操作を行う。すなわち，オはLET I＝I/2。

150で1回操作を行って，160で190に飛ぶということは，190で操作の回数を一つ増やすことが必要になるから，カはLET C＝C+1。

140が成立しない場合には，180，190の処理が行われる。以上で1回の操作が行われるので，同様の操作を行うために，130へ戻る。したがって，キはGOTO 130。

$N=24$ の場合の操作の過程は，$24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$
180行は140行が成立しないとき，すなわちIが奇数のときの処理だから，上の過程で奇数になるのは，3と5。したがって，クは2回。

(3)　ケ ④　コ ③　サ 8

＜解説＞

210は$F(N) \leqq 10$となる場合に$F(N)$を印刷する処理だから，操作の回数$F(N)$を数えているCが10以下の場合である。したがって，ケはC＜＝10である。

211は，210であるNについての処理が終わったのだから，次のNの処理を行うことを命令する。したがって，コはNEXT N。

$N=1$，$F(1)=0$

$N=2$，$F(2)=1$

$N=3$，$F(3)=7$，$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

$N=4$，$F(4)=2$

$N=5$，$F(5)=5$

$N=6$，$F(6)=8$，$6 \to 3$

$N=7$，$F(7)=16$，$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10$

$N=8$，$F(8)=3$

$N=9$，$F(9)=19$，$9\to 28\to 14\to 7$

$N=10$，$F(10)=6$

以上によって，210行のPRINT文が実行されるサは8回である。ここで，上記のように，Nを1から10まで変化させて，$F(N)$を調べるのでは時間がかかる。効率良く調べるにはどうしたら良いか。この操作では偶数は奇数に帰着するから，3, 5, 7, 9を調べる。すると，3，5は(1)の6に，7は(1)の11に帰着し，9は7に帰着することが分かる。

コメント：整数操作の過程を実現して結果を得るプログラムに関する問題である。問題文にあるように具体的な数字を入れて考えれば，決して難しい過程ではないことが分かる。そして，(1)の問題の結果は(3)に使える。問題は誘導的にできている場合が多いから，前問の結果を活用することに注意する。全体としては簡明な問題であるが，プログラム経験がないと戸惑う。これを選択する生徒はプログラム経験のある生徒だろう。難易度はＢ。

＜総評＞

第１問　数学Ⅱの第１問に同じ。難易度はＣ

第２問　数学Ⅱの第２問に同じ。難易度はＢ

第３問　等比数列の一般項および等比数列の和の導出に関する問題。難易度はＢ＋

第４問　立体図形のベクトルによる取扱いの問題。難易度はＢ＋

第５問　統計の基礎的な知識をデータ処理に応用する問題。難易度はＢ

第６問　整数操作の過程を実現して結果を得るプログラムに関する問題。難易度はＢ

110319