平成25年度（2013年度）センター試験　数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ・Ｂ]　（100点，60分）

数　学　Ⅱ（全問必答）

第１問（配点　30）

[１]　Oを原点とする座標平面上に2点A (6, 0)，B(3, 3)をとり，線分AB を2：1に内分する点をP, 1：2に外分する点をQとする。3点O，P，Q を通る点をCとする。

(1)　P の座標は (ア，イ)であり，Q の座標は (ウ，エオ)である。

(2)　円Cの方程式を次のように求めよう。線分OPの中点を通り，OPに垂直な直線の方程式は

$y=$カキ$x+$ク

であり，線分PQの中点を通り，PQに垂直な直線の方程式は

$y=x-$ケ

である。

これらの2直線の交点が円Cの中心であることから，円Cの方程式は

$(x-$コ$)^2+(y+$サ$)^2=$シス

であることがわかる。

(3)　円Cとx 軸の二つの交点のうち，点Oと異なる交点をRとすると，Rは線分OAをセ：1に外分する。

＜解説＞

ア 4　イ 2　ウ 9　エオ −3　カキ −2　ク 5　ケ 7　コ 4　サ 3　シス 25　セ 4

図１を参照する。

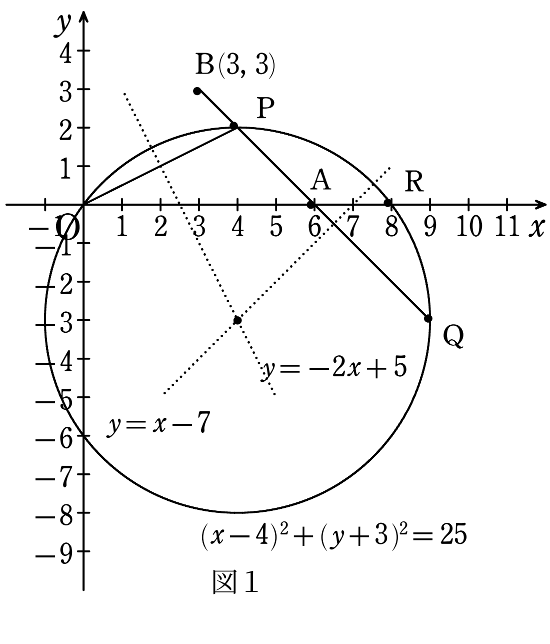

図１

(1)

点P は線分ABを2：1に内分する。つまり，AP：PB=2：1である。すると，P の座標 (4 , 2) は明らかである。

点Qは線分ABを1：2に内分する。つまり AQ：BQ=1：2である。するとQ の座標 (9 , −3) は明らかである。

OPの中点は(2 , 1)，OPに垂直な直線の傾きは−2 だから，線分OPの垂直2等分線の方程式は

$y-1=-2(x-2)$，したがって，$y=-2x+5$　①

PQの中点は(6.5 , −0.5)，PQに垂直な直線の傾きは1だから，線分PQの垂直2等分線の方程式は

$y+0.5=(x-6.5)$，したがって，$y=x-7$　②

(2)

直線①，②の交点は(4 , −3)だから，円Cを$(x-4)^2+(y+3)^2=r^2$とおく。O (0 , 0)を通るので，$r^2=4^2+3^2=5^2$となるので，円Cは$(x-4)^2+(y+3)^2=5^2$である。

(3)

円Cの方程式で$y=0$とおけば，$x=0\ ,8$だから，R$(8\ ,0)$である。
したがって，OR：AR$=8：2=4：1$となり，Rは線分OAを$4：1$に外分する。

コメント：線分の内分，外分の意味と表現を的確に把握していることが必要だ。円の中心は弦の垂直2等分線上にあることは当然のこととして，活用できなければならない。難しい図ではないので，上手く描くこと。そうすれば，理解が素早く，誤りも少ない。内分点，外分点の座標の公式から座標を求めるよりも，この問題では図を視察することにより直感的に求めることの方が速い。

［2］ 連立方程式

$$(*)\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2^x+2^y+2^z=\dfrac{35}{2} \\ \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}=\dfrac{49}{16} \end{cases}$$

を満たす実数x，y，zを求めよう。ただし，$x\leqq y\leqq z$とする。

$X=2^x$，$Y=2^y$，$Z=2^z$とおくと，$x\leqq y\leqq z$により$X\leqq Y\leqq Z$である。
(*)から，X，Y，Zの関係式

$$XYZ=\text{ソ}$$

$$X+Y+Z=\frac{35}{2}$$

$$XY+YZ+ZX=\frac{\text{タチ}}{\text{ツ}}$$

が得られる。

この関係式を利用すると，t の3次式 $(t-X)(t-Y)(t-Z)$は

$$(t-X)(t-Y)(t-Z)=t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ$$

$$=t^3-\frac{35}{2}t^2+\frac{\text{タチ}}{\text{ツ}}t-\text{ソ}$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-\text{テ})(t-\text{トナ})$$

となる。したがって，$X\leqq Y\leqq Z$により

$$X=\frac{1}{2},\ Y=\text{テ},\ Z=\text{トナ}$$

となり，$x=\log_{\text{ニ}}X$，$y=\log_{\text{ニ}}Y$，$z=\log_{\text{ニ}}Z$から，

$$x=\text{ヌネ},\ y=\text{ノ},\ z=\text{ハ}$$

であることがわかる。

<解説>

ソ 8　タチ 49　ツ 2　テ 1　トナ 16　ニ 2　ヌネ -1　ノ 0　ハ 4

$XYZ=2^x2^y2^z=2^{x+y+z}=2^3=8=$ソ

$XY+YZ+ZX=2^x2^y+2^y2^z+2^z2^x=2^{x+y+z}\left(\frac{1}{2^z}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^y}\right)=8\times\frac{49}{16}=\frac{49}{2}=\frac{タチ}{ツ}$

$$(t-X)(t-Y)(t-Z)=t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ$$
$$=t^3-\frac{35}{2}t^2+\frac{49}{2}t-8$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)(t-16)$$

したがって，$X\leqq Y\leqq Z$により$X=\frac{1}{2}$，$Y=1$，$Z=16$

$x=\log_2 X=-2$，$y=\log_2 Y=0$，$z=\log_2 Z=4$となる。

コメント：すなおに計算していけば，特段の問題もなく結論が得られる。もちろん指数，対数の基礎については，スムーズに扱えるよう習熟していなければならない。

$2^x2^y+2^y2^z+2^z2^x=2^{x+y+z}\left(\frac{1}{2^z}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2^y}\right)$という式の変形に気づくことが必要だ。

第２問（配点 30）

aを正の実数として，xの関数$f(x)$を

$$f(x)=x^3-3a^2x+a^3$$

とする。

関数$y=f(x)$は，$x=$アイで極大値ウ$a^{エ}$をとり，$x=$オで極小値カ$a^{キ}$をとる。このとき，2点

（アイ，ウ$a^{エ}$），　（オ，カ$a^{キ}$）

と原点を通る放物線

$$y=ク x^2-ケ a^{コ} x$$

をCとする。原点におけるCの接線lの方程式は

$$y=サシ a^{ス} x$$

である。また原点を通りlに垂直な直線mの方程式は

$$y=\frac{1}{セ a^{ソ}}x$$

である。

x軸に関して放物線Cと対称な放物線

$$y=-ク x^2+ケ a^{コ} x$$

をDとする。Dとlで囲まれた図形の面積Sは

$$S=\frac{タチ}{ツ}a^{テ}$$

である。

放物線Cと直線mの交点の座標は，0と$\frac{4a^{ト}+1}{2a^{ナ}}$である。Cとmで囲まれた図形の面積をTとする。

$S=T$となるのは$a^{テ}=\frac{ニ}{ヌ}$のときであり，このとき，$S=\frac{ネ}{ノ}$である。

＜解説＞

アイ $-a$　ウ 3　エ 3　オ a　カ $-$　キ 3　ク a　ケ 2　コ 2　サシ -2　ス 2　セ 2　ソ 2　タチ 32　ツ 3　テ 4　ト 4　ナ 3　ニ 1　ヌ 4　ネ 8　ノ 3

$f(x)=x^3-3a^2x+a^3$，$f'(x)=3x^2-3a^2=0$として，$x=-a$で極大値$f(-a)=3a^3$をとり，$x=a$で極小値$-a^3$をとる。このとき，2点$(-a,\ 3a^3)$，$(a,\ -a^3)$と原点を通る放物線$y=px^2+qx$とすれば，

$3a^3=pa^2-qa$，$-a^3=pa^2+qa$だから，$p=a$，$q=-2a^2$となる。

したがって，放物線Cは$y=ax^2-2a^2x$である。$y'=2ax-2a^2=0$だから，原点におけるCの接線lの傾きは$-2a^2$，したがって，lの方程式は$y=-2a^2x$である。

また，lに垂直な直線の傾きは$\dfrac{1}{2a^2}$だから，原点を通りlに垂直な直線mの方程式は$y=\dfrac{1}{2a^2}x$である。

x軸に関して放物線C：$y=ax^2-2a^2x$と対称な放物線Dは，$y\to -y$として，D：$y=-ax^2+2a^2x$

以上によって求まった，放物線C，D，接線l，mを図２に描いたので，これを参照する。

Dとlの原点以外の交点は$(4a,\ -8a^3)$だから，Dとlで囲まれた図形の面積Sは

$$S=\int_0^{4a}(-ax^2+2a^2x+2a^2x)dx=\left[-\frac{a}{3}x^3+2a^2x^2\right]_0^{4a}=\frac{32}{3}a^4=\frac{\text{タチ}}{\text{ツ}}a^{\text{テ}}$$

Cとmの原点以外の交点のx座標は$t=\dfrac{4a^4+1}{2a^3}$だから，Cとmで囲まれた図形の面積Tは

$$T=\int_0^t\left\{\frac{x}{2a^2}-(ax^2-2a^2x)\right\}dx=\left[-\frac{a}{3}x^3+a^2x^2+\frac{x^2}{4a^2}\right]_0^t$$

$$=\left(\frac{-a}{3}t+a^2+\frac{1}{4a^2}\right)t^2=\left(\frac{-a}{3}\times\frac{4a^4+1}{2a^3}+\frac{4a^4+1}{4a^2}\right)\left(\frac{4a^4+1}{2a^3}\right)^2$$

$$=\frac{4a^4+1}{12a^2}\left(\frac{4a^4+1}{2a^3}\right)^2=\frac{(4a^4+1)^3}{48a^8}$$

$S=T$とすれば，$\dfrac{32}{3}a^4=\dfrac{(4a^4+1)^3}{48a^8}$だから，$a^4=\dfrac{1}{4}$となり，$S=\dfrac{32}{3}a^4=\dfrac{8}{3}$

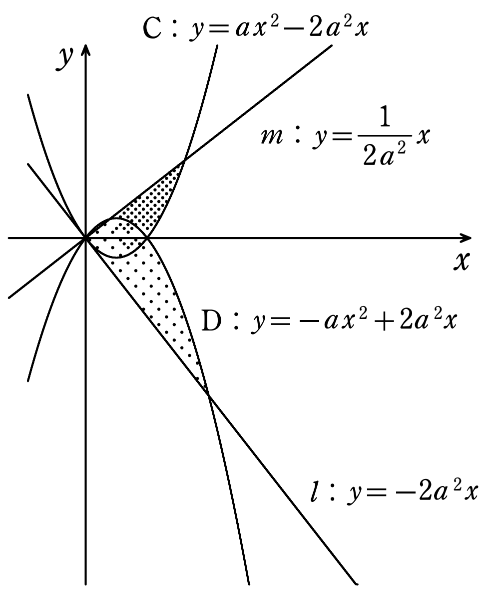

図２

コメント：3次方程式から始まるが，2次関数、すなわち放物線とその接線に関する問題となる。放物線C，D，接線l，mを求めることに難しさはないだろう。面積の積分，特にTの計算は煩瑣であるので，焦らずていねいに実行していく。

第３問（配点　20）

aを$0<a<\dfrac{\pi}{2}$を満たす定数とし，xの関数$f(x)$を

$$f(x)=\sin(x-2a)+\sin(x-a)+\sin x+\sin(x+a)+\sin(x+2a) \quad ①$$

とする。

(1)　加法定理を用いると

$$f(x)=(ア+イ\cos a+ウ\cos 2a)\sin x$$

となる。さらに，2倍角の公式を用いると

$$f(x)=(エオ+カ\cos a+キ\cos^2 a)\sin x \quad ②$$

となる。

(2)　すべての実数xに対して$f(x)=0$が成り立つ場合を考える。このとき，aの値を求めよう。

まず，②により，すべての実数xに対して$f(x)=0$がが成り立つのは

$$エオ+カ\cos a+キ\cos^2 a=0$$

のときである。よって，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$から，

$$\cos a=\frac{クケ+\sqrt{コ}}{サ}$$

であるので，すべての実数x に対して$f(x)=0$が成り立つようなa がただ一つ定まることがわかる。

次に，すべての実数xに対して$f(x)=0$であるから，特に，$x=\dfrac{a}{2}$のとき，$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=0$である。

これにより，①から，$\sin\left(\dfrac{シ}{ス}a\right)=0$がわかる。

したがって，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$に注意すると，$a=\dfrac{セ}{ソ}\pi$である。

(3)　$a=\dfrac{セ}{ソ}\pi$のときの$\cos\dfrac{a}{2}$ の値を求めよう。まず，$a=\dfrac{セ}{ソ}\pi$のとき．③が成り立つから

$$\cos 2a=-\frac{タ+\sqrt{チ}}{ツ}$$

であることがわかる。したがって，$\cos\dfrac{a}{2}=-\cos\left(\pi-\dfrac{a}{2}\right)$を利用すると

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{テ+\sqrt{ト}}{ナ}$$

である。

＜解説＞

ア１　イ２　ウ２　エオ −1　カ２　キ４　クケ −1　コ５　サ４　シ５　ス２　セ２　ソ５

タ1　チ5　ツ4　テ1　ト5　ナ4

(1)

加法定理により，

$\sin(x-a)+\sin(x+a)=\sin x\cos a-\sin a\cos x+\sin x\cos a+\sin a\cos x=2\sin x\cos a$

$\sin(x-2a)+\sin(x+2a)=\sin x\cos 2a-\sin 2a\cos x+\sin x\cos 2a+\sin 2a\cos x=2\sin x\cos 2a$

したがって，$f(x)=(1+2\cos a+2\cos 2a)\sin x$

さらに，2倍角の公式を用いると，$\cos 2a=2\cos^2 a-1$だから，

$f(x)=(-1+2\cos a+4\cos^2 a)\sin x$　②'

(2)

②'により，すべての実数xに対して$f(x)=0$が成り立つのは

$-1+2\cos a+4\cos^2 a=0$のときである。これを解くと，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$から，$\cos a>0$だから

$\cos a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$　③'

が得られる。すべての実数xに対して$f(x)=0$が成り立つようなaがただ一つ定まる。

そこで，①で$x=\dfrac{a}{2}$のとき，$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=0$である。すなわち，

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\sin\left(\frac{a}{2}-2a\right)+\sin\left(\frac{a}{2}-a\right)+\sin\frac{a}{2}+\sin\left(\frac{a}{2}+a\right)+\sin\left(\frac{a}{2}+2a\right)$$
$$=\sin\left(\frac{a}{2}+2a\right)=\sin\left(\frac{5a}{2}\right)=0$$

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$だから，$a=\dfrac{2}{5}\pi$

(3)

③'を用いて，$\cos 2a=2\cos^2 a-1=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\cos\dfrac{a}{2}=-\cos\left(\pi-\dfrac{a}{2}\right)$だから，$a=\dfrac{2}{5}\pi$として，

$\cos\dfrac{a}{2}=-\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=-\cos 2a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

コメント：加法定理，2倍角の公式など三角関数の基礎知識の的確な活用を必要とする。計算は特段に煩瑣なものではないから，落ち着いてケアレスミスのないように。(3)は$\cos\dfrac{a}{2}=-\cos\left(\pi-\dfrac{a}{2}\right)$をどう利用するのか，少し戸惑うかも知れない。$a=\dfrac{2}{5}\pi$のとき，$\cos\dfrac{a}{2}=-\cos 2a$になるのが味噌である。

第4問（配点 20）

p，qを実数として，xの3次式$f(x)$を

$f(x)=x^3+px^2+qx+30$

とする。

(1)　$f(x)$のxに虚数$3+i$を代入すると

$$f(3+i)=ア p+イ q+48+(ウ p+q+エオ)i$$

となる。

(2)　3次方程式$f(x)=0$の一つの解が$3+i$であるとき，他の解を求めよう。

$3+i$が方程式$f(x)=0$の解であるから

$$ア p+イ q+48=0,\ ウ p+q+エオ=0$$

となり，p，qの値は

$$p=-カ,\ q=-キ$$

である。このとき，$f(x)$を因数分解すると

$$f(x)=(x+ク)(x^2-ケ x+コサ)$$

となり，方程式$f(x)=0$の他の解は

$$シス,\ セ-i$$

である。

(3)　3次方程式$f(x)=0$が実数解-5と二つの虚数解α，βをもつとする。このとき，$\alpha^2+\beta^2$をpを用いて表し，$\alpha^2+\beta^2$のとり得る値の範囲を求めよう。

-5が方程式$f(x)=0$の解であることから

$$q=5p-ソタ$$

が成り立つ。したがって，$f(x)$はpを用いて

$$f(x)=(x+5)\{x^2+(p-チ)x+ツ\}$$

と表される。このとき，方程式

$$x^2+(p-チ)x+ツ=0$$

が虚数解α，βをもつようなpのとり得る値の範囲は

$$テ-ト\sqrt{ナ}<p<テ+ト\sqrt{ナ}\quad ①$$

である。

解と係数の関係により，$\alpha^2+\beta^2$はpを用いて

$$\alpha^2+\beta^2=p^2-ニヌ p+ネノ\quad ②$$

と表される。

したがって，①と②により，$\alpha^2+\beta^2$のとり得る値の範囲は

$$ハヒフ\leqq\alpha^2+\beta^2<ヘホ$$

である。

＜解説＞

ア 8　イ 3　ウ 6　エオ 26　カ 3　キ 8　ク 3　ケ 6　コサ 10　シス −3　セ 3　ソタ 19　チ 5
ツ 6　テ 5　ト 2　ナ 6　ニヌ 10　ネノ 13　ハヒフ −12　ヘホ 12

(1)

$$f(3+i)=(3+i)^3+p(3+i)^2+q(3+i)+30=(27+27i-9-i)+p(9+6i-1)+q(3+i)+30$$
$$=8p+3q+48+(6p+q+26)i$$

(2)

$3+i$が方程式$f(x)=0$の解であるから

$$8p+3q+48=0,\ 6p+q+26=0$$

これを解くと，$p=-3$，$q=-8$

したがって，$f(x)=x^3-3x^2-8x+30=(x+3)(x^2-6x+10)=0$とすれば，

$x=-3$，$x^2-6x+10=0$により，$x=3\pm i$，したがって$3+i$の他の解は，$x=-3$，$3-i$

ここで$f(x)=x^3-3x^2-8x+30=(x+3)(x^2-6x+10)$なる因数分解の方法がポイントである。これを考えてみる。

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$だから，$f(x)$のグラフは$x$軸と交わるので，$f(x)=0$は少なくとも一つの実数解をもつ（一般に3次関数のグラフは必ずx軸と交わるので，3次方程式は少なくとも一つの実数解をもつ）。

したがって，a，b，cを実数として，$f(x)=x^3-3x^2-8x+30=(x+a)(x^2+bx+c)$と因数分解される。

$f(x)=0$の解の一つが$3+i$は，$x^2+bx+c=0$の解だから，$(3+i)^2+b(3+i)+c=0$

したがって，$(9+i^2+3b+c)+(6+b)i=0$，したがって$b=-6$，$c=-9+1-3b=10$となり，

$f(x)=x^3-3x^2-8x+30=(x+a)(x^2-6x+10)=(x+3)(x^2-6x+10)$が得られる。

(3)

$f(-5)=-125+25p-5q+30=0$だから，$q=5p-19$

したがって，$f(x)=x^3+px^2+(5p-19)x+30=(x+5)\{x^2+(p-5)x+6\}$

$x^2+(p-5)x+6=0$が虚数解をもつ条件は，2次方程式の解の判別式，$(p-5)^2-24<0$だから，

$$5-2\sqrt{6}<p<5+2\sqrt{6} \quad ① \quad \text{である。}$$

解と係数の関係により$\alpha+\beta=-(p-5)$，$\alpha\beta=6$を用いて，

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(p-5)^2-12=p^2-10p+13$　②

①により，$-12\leqq(p-5)^2-12<12$，したがって$-12\leqq\alpha^2+\beta^2<12$

コメント：実数を係数とする3次方程式は解説にも書いたように，少なくとも一つの実数解をもつ。すると，実数を係数とする1次関数と2次関数に必ず因数分解できる。このことを前提として，因数分解されたときにできる2次方程式が虚数解をもつときの問題である。3次方程式だと驚くのではなく，2次方程式の問題だと思えば良い。

＜総評＞

第１問［１］　直線と円の方程式の問題。難易度はＣ

［２］　指数関数の連立方程式の問題。難易度はＣ

第２問　2次関数の接線や面積計算の問題。難易度はＢ－

第３問　三角関数の方程式の問題。難易度はＢ

第４問　2次方程式の問題を3次方程式と困惑して難しく思わないように。難易度はＡ－

数学Ⅱ・数学Ｂ

第１問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第１問に同じ

第２問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第２問に同じ

第３問（選択問題）（配点　20）

(1)　数列 $\{p_n\}$ は次を満たすとする。

$$p_1=3,\ p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad ①$$

数列 $\{p_n\}$の一般項と，初項から第n項までの和を求めよう。まず，①から

$$p_{n+1}-\frac{ウ}{イ}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{ア}{イ}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となるので，数列 $\{p_n\}$の一般項は

$$p_n=\frac{1}{ウ\cdot エ^{n-2}}+\frac{カ}{オ}$$

である。したがって，自然数nに対して

$$\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{キ}{ク}\left(1-\frac{1}{ケ^n}\right)+\frac{コ\,n}{サ}$$

である。

(2)　正の数からなる数列 $\{a_n\}$ は，初項から第3項が$a_1=3$，$a_2=3$，$a_3=3$であり，すべての自然数nに対して

$$a_{n+3}=\frac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+2}} \qquad ②$$

を満たすとする。また，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を，自然数nに対して，$b_n=a_{2n-1}$，$c_n=a_{2n}$で定める。

数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求めよう。まず②から

$$a_4=\frac{a_1+a_2}{a_3}=シ,\ a_5=3,\ a_6=\frac{ス}{セ},\ a_7=3 \text{である。}$$

したがって，$b_1=b_2=b_3=b_4=3$となるので

$$b_n=3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad ③$$

と推定できる。

③を示すためには，$b_1=3$から，すべての自然数nに対して

$$b_{n+1}=b_n \qquad ④$$

であることを示せばよい。このことを「まず，$n=1$のとき④が成り立つことを示し，次に，$n=k$のとき④が成り立つと仮定すると，$n=k+1$のときも④が成り立つことを示す方法」を用いて証明しよう。この方法をソという。ソに当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　組立除法　　①　弧度法　　②　数学的帰納法　　③背理法

[Ⅰ]　$n=1$のとき，$b_1=3$，$b_2=3$であることから④は成り立つ。

[Ⅱ]　$n=k$のとき，④が成り立つ，すなわち

$$b_{k+1}=b_k \quad ⑤$$

と仮定する。$n=k+1$のとき，②のnに$2k$を代入して得られる等式と，$2k-1$を代入して得られる等式から

$$b_{k+2}=\frac{c_k+タ_{k+1}}{チ_{k+1}},\ c_{k+1}=\frac{ツ_k+c_k}{テ_{k+1}}$$

となるので，b_{k+2}は

$$b_{k+2}=\frac{(ト_k+ナ_{k+1})ニ_{k+1}}{b_k+c_k}$$

と表される。したがって，⑤により，$b_{k+2}=b_{k+1}$が成り立つので，④は$n=k+1$のときにも成り立つ。

[Ⅰ]，[Ⅱ]により，すべての自然数nに対して④の成り立つことが証明された。したがって，③が成り立つので，数列$\{b_n\}$の一般項は$b_n=3$である。

次に，②のnを$2n-1$に置き換えて得られる等式と③から

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となり，$c_1=$ヌであることと①から，数列$\{c_n\}$の一般項は，(1)で求めた数列$\{p_n\}$の一般項と等しくなることがわかる。

<解説>

ア 3　イ 2　ウ 2　エ 3　オ 3　カ 2　キ 9　ク 4　ケ 3　コ 3　サ 2　シ 2　ス 5　セ 3　ソ ②

タ b　チ c　ツ b　テ b　ト c　ナ b　ニ b　ヌ 3

(1)

$p_{n+1}-d=\frac{1}{3}(p_n-d)$とおくと，①により$d=\frac{3}{2}$

したがって，$p_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{3}{2}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad$①'

$q_{n+1}=p_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}q_n$ とおくことができる。

すると，q_nは初項$q_1=\frac{1}{3}\left(p_1-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$，公比$\frac{1}{3}$の等比数列だから$q_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{3}{2}\right)$，

したがって$p_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}+\frac{3}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\cdot 3^{k-2}}+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}+\frac{3n}{2}$$

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$は初項1，公比$\frac{1}{3}$の等比数列の和だから，$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{1-(1/3)^n}{1-(1/3)}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

したがって，$\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{3n}{2}$

(2)

$$a_4=\frac{a_1+a_2}{a_3}=\frac{3+3}{3}=2\text{，}\ a_6=\frac{a_3+a_4}{a_5}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3}$$

④を証明するために，ここで提示している方法は数学的帰納法である。

$$b_{k+2}=a_{2k+3}=\frac{a_{2k}+a_{2k+1}}{a_{2k+2}}=\frac{c_k+b_{k+1}}{c_{k+1}}$$

$$c_{k+1}=a_{2k+2}=\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{a_{2k+1}}=\frac{b_k+c_k}{b_{k+1}}$$

したがって，$b_{k+2}=\dfrac{c_k+b_{k+1}}{c_{k+1}}=\dfrac{(c_k+b_{k+1})b_{k+1}}{b_k+c_k}$

しかるに⑤において$b_{k+1}=b_k$が仮定されているから，$b_{k+2}=\dfrac{(c_k+b_k)b_{k+1}}{b_k+c_k}=b_{k+1}$

$c_1=a_2=3$となることは自明である。

コメント：(1)は等比数列の一般項とその和を求める問題に帰着する。①から①’を求め，p_nからq_nに至る変形は教科書にも掲載されているように，数列の一般項を求める常套的な方法だから，活用できなければならない。教科書を良く読み理解し，練習問題をこなしていればできる。

数学的帰納法によって，数列の一般項を求める過程を問題にしている。

この方法は，変数を含む式が一般的に成立することを証明する代わりに，

(ｉ) 変数が特定の値の時に式が成立する

(ⅱ) 変数が一般的な値で成立することを仮定すると，その値を少し変化させても成立する

という二つの事実から，式の成立を一般的に証明するものである。

第４問（選択問題）（配点　20）

OA＝5，OC＝4，∠AOC＝θである平行四辺形OABCにおいて，線分OAを3：2に内分する点をDとする。また，点Aを通り直線BDに垂直な直線と直線OCの交点をEとする。ただし，$0<\theta<\pi$とする。

以下，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおき，実数$t$を用いて$\overrightarrow{OE}=t\vec{c}$と表す。

(1)　tを$\cos\theta$を用いて表そう。

$$\overrightarrow{AE}=t\vec{c}-\vec{a},\ \overrightarrow{DB}=\frac{ア}{イ}\vec{a}+\vec{c},\ \vec{a}\cdot\vec{c}=ウエ\cos\theta$$

となるので，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB}=$オにより

$$t=\frac{カ(キ\cos\theta+1)}{ク(\cos(\theta+ケ))}\quad ①$$

となる。

(2)　点Eは線分OC上にあるとする。θのとり得る値の範囲を求めよう。ただし，線分OCは両端のO，Cを含むものとする。以下，$r=\cos\theta$とおく。

点Eが線分OC上にあることから，$0\leqq t\leqq 1$である。$-1<r<1$なので，①の右辺の$\cos\theta$をrに置き換えた分母ク$(r+ケ)$は正である。したがって，条件$0\leqq t\leqq 1$は

$0 \leqq$ カ(キ$r+1$)$\leqq$ ク($r+$ケ)　②

となる。

rについての不等式②を解くことにより，θのとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{\text{コ}} \leqq \theta \leqq \frac{\text{サ}}{\text{シ}}\pi$$

であることがわかる。

(3)　$\cos\theta = -\frac{1}{8}$とする。直線AEと直線BDの交点をFとし，三角形BEFの面積を求めよう。①により，

$t=\frac{\text{ス}}{\text{セ}}$となり$\overrightarrow{OF}=\frac{\text{ソ}}{\text{タ}}\vec{a}+\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}\vec{c}$となる。

したがって，点Fは線分AEを1：チに内分する。このことと，平行四辺形OABCの面積は

$\frac{\text{トナ}\sqrt{\text{ニ}}}{\text{ヌ}}$であることから，三角形BEFの面積は$\frac{\text{ネ}\sqrt{\text{ノ}}}{\text{ハ}}$である。

<解説>

ア 2　イ 5　ウエ 20　オ 0　カ 5　キ 2　ク 4　ケ 2　コ 3　サ 2　シ 3　ス 1　セ 2　ソ 2　タ 3
チ 1　ツ 6　テ 2　トナ 15　ニ 7　ヌ 2　ネ 5　ノ 7　ハ 2

(1)

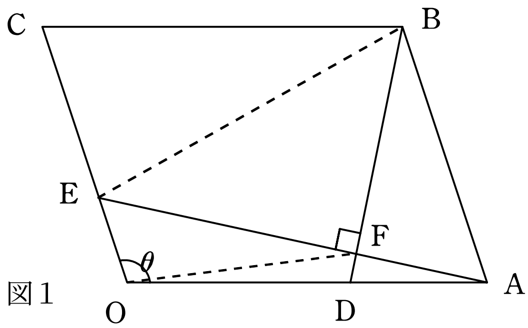

図1

図1を参照する。

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB}=-\frac{3}{5}\vec{a}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{5}\vec{a}+\vec{a}+\vec{c}=\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta=5\times4\cos\theta=20\cos\theta$

$\overrightarrow{AE}$と$\overrightarrow{DB}$は直交しているので，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB}=(t\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}\right)=0$

$(t\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}\right)=t|\vec{c}|^2+\left(\frac{2t}{5}-1\right)\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{2}{5}|\vec{a}|^2=16t+20\left(\frac{2t}{5}-1\right)\cos\theta-10=0$

したがって，$8(\cos\theta+2)t=20\cos\theta+10$，$t=\frac{5(2\cos\theta+1)}{4(\cos\theta+2)}$　①’

(2)

②は①’により，$0\leqq5(2r+1)\leqq4(r+2)$

rについて解くと$-\frac{1}{2}\leqq r\leqq\frac{1}{2}$なので，$\theta$のとり得る値の範囲は$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$

(3)

①'で$\cos\theta=-\frac{1}{8}$とすれば，$t=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DF}=\frac{3}{5}\vec{a}+\overrightarrow{DF}$，$\overrightarrow{DF}$を求めよう。

△ABDにおいて余弦の定理により

$DB^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos(\pi-\theta)=4^2+2^2-\frac{2\times4\times2}{8}=18$，$\mathrm{DB}=3\sqrt{2}$

$\mathrm{DF}=p$，$\mathrm{FB}=q$とおけば，$p+q=3\sqrt{2}$，$2^2-p^2=4^2-q^2$だから，$p=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{6}\mathrm{DB}$

したがって，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{15}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{c}$，したがって，$\overrightarrow{OF}=\frac{3}{5}\vec{a}+\overrightarrow{DF}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{c}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$

したがって，点Fは線分AEを1：2に内分する。

平行四辺形OABCの面積は$\mathrm{OA}\times\mathrm{OC}\sin(\pi-\theta)=5\times4\sin\theta=20\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{15\sqrt{7}}{2}$

△BEFの面積$=\frac{FE}{AE}\times$△ABE$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$▱OABC$=\frac{5\sqrt{7}}{2}$

コメント：まずは図を描いて問題の概要を把握しよう。図形の辺をベクトルによって表現する。ベクトルの和，差，内積の意味するところは的確に理解していなければならない。(3)はθを特定した場合の問題。$\overrightarrow{OF}$を単純にベクトルの加減算だけで求めることはできない。θを特定したときの図形の条件を反映しなければならない。ここでは，$\cos\theta=-\frac{1}{8}$での線分DFの長さを求める。

内分点の位置ベクトルと内分比の関係は教科書に掲載されているので，理解しておくこと。

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解説＞

ア７　イ０　ウ４　エオ00　カ７　キ０　クケ16　コ２　サ９　シ７　ス②　セ０　ソタチ200
ツテ12　ト４　ナニ－3　ヌネノ000　ハ①　ヒ４　フヘ 84

(1)

国語の得点の平均値Aは，10人の生徒の得点を加算した結果を10で除して，7.0である。

国語の得点の分散Bの値は，10人の(得点－平均値)^{2}を加算した結果を10で除して，4.00である。

国語の得点の中央値は，上から得点を数えて，5番目と6番目の値が7点なので，7.0点である。

(2)

10人の英語の総得点は8.0×10＝80点。CとD以外の得点の和は64点。

したがって，C＋D＝80－64＝16　①

分散1.00を10倍した値が10人の(得点－平均値)^{2}を加算した値になる。CとD以外の(得点－平均値)^{2}の和は8なので，$(\mathrm{C}-8)^2+(\mathrm{D}-8)^2=1.00\times10-8=2$　②

C＞Dとして，①，②を解くと，Cは9点，Dは7点である。

(3)

10人の国語と英語の得点の相関図（散布図）は，横軸に国語の得点，縦軸に英語の得点をとったも

のである。英語の最高点は9点，最低点は6点だから，最高点が10点の⓪と最低点が7点の③は該当しない。また，国語10点の生徒は英語8点と9点である。英語7点の①は該当しない。したがって，適切なものは，②である。

相関係数は各生徒の$\left\{\dfrac{\text{国語の(得点}-\text{平均値)}}{\text{国語の標準偏差}}\right\}\times\left\{\dfrac{\text{英語の(得点}-\text{平均値)}}{\text{英語の標準偏差}}\right\}$を加算して生徒数10人で除したものである。標準偏差はそれぞれ2.0，1.0である。したがって，2/10＝0.200である。

(4)

国語と数学の得点の合計の平均値は$\dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} w_k=\dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}(x_k+y_k)=\dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k+\dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} y_k=7+5.4=12.4$

（国語と数学の相関係数）$=\dfrac{T}{10}\div\{$(国語の標準偏差＝2.0)×(数学の標準偏差＝1.2)$\}$だから，

$T=-0.125\times 2.0\times 1.2\times 10=-3.000$

$$(w_k-\overline{w})^2=\{(x_k+y_k)-(\overline{x}+\overline{y})\}^2=\{(x_k-\overline{x})+(y_k-\overline{y})\}^2=(x_k-\overline{x})^2+(y_k-\overline{y})^2+2(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$$

したがって，

$$s_w{}^2=\frac{(w_1-\overline{w})^2+(w_2-\overline{w})^2+\ldots+(w_{10}-\overline{w})^2}{10}$$

$$=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_{10}-\overline{x})^2}{10}+\frac{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\ldots+(y_{10}-\overline{y})^2}{10}$$

$$+\frac{2\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\ldots+(x_{10}-\overline{x})(y_{10}-\overline{y})\}}{10}$$

$$=s_x{}^2+s_y{}^2+\frac{1}{5}T=4+1.44-0.6=4.84$$

コメント：統計の基本的問題である。平均値，分散，中央値，相関図，相関係数，標準偏差などの統計量の定義と意味は基本事項だから，的確に理解していなければならない。

(3)の相関係数は標準偏差＝$\sqrt{\text{分散}}$として計算する。問題の表に(得点－平均値)，(得点－平均値)^2，(国語の得点－平均値)×(英語の得点－平均値)などの欄を追加して数字を書く。

(4)では，相関係数の定義を正しく把握していなければならない。

第６問（選択問題）（配点　20）

＜解説＞

アイ 50　ウ ⑥　エ ⑧　オ ⓪　カキクケ 2212　コ ⓪　サ ③　シ 2　スセ 27　ソ ①

(1)

3進数表示が1212である自然数は，$1\times 3^3+2\times 3^2+1\times 3^1+2=27+18+3+2=50$

(2)

ウでは，$X=3^{p-1}$に対応する係数a_{p-1}を求めて印刷する。したがって，ウはINT(N/X)で，これが係数a_{p-1}になる。

エでは，Nから$a_{p-1}3^{p-1}$を差し引いて，次のループで$X=3^{p-2}$に対応する係数a_{p-2}を求める準備をする。したがって，エはN－INT(N/X)*Xである。なぜなら，INT(N/X)＝a_{p-1}，$X=3^{p-1}$だから。

オでは，$X=3^{p-1}$を$X=3^{p-2}$とXを一桁下の位に移す。したがって，オはX/3である。

［プログラム２］の変数Mに77を入力して実行すると，130行において，

77－INT(77/3)*3＝77－25×3＝2，140行でM＝INT(77/3)＝25，次に130行において，

25－INT(25/3)*3＝25－8×3＝1，140行でM＝INT(25/3)＝8，次に130行において，

8－INT(8/3)*3＝8－2×3＝2，140行でM＝INT(8/3)＝2，次に130行において，

2－INT(2/3)*3＝2－0＝2，150行でI＝5＝P+1となって終了

したがって，130行で印刷された数字を逆に並べて，カキクケは2212

(3)

Nは3進法表現の上位の桁から調べる自然数，Mは同じ自然数Nの3進法の下位の桁から調べ るときの変数だから，130行ではMにNを代入しておく。

Aは3進法の上位の桁の数，Bは対応する下位の桁の数で，A≒Bなら，3進法表示の数字の列において，対応する上位の桁の数と下位の桁の数が一致しないことになるから，240行で　”一致しない”と印刷する。したがって，サはIF A<>B THEN GOTO 240である。

［プログラム３］を実行して変数N＝436を入力する。$436=1\times3^5+2\times3^4+1\times3^3+0\times3^2+1\times3+1$だから，3進数表示の数字列は121011となる。これを逆に並べると，110121である。すると，2つめで数字が異なる。したがって，200行のIF文は2回実行されて，240行の”一致しない”を印刷する。この判定が行われたときのXは$3^5/3^I$で，I＝2だから，Xは$3^5/3^2=3^3=27$である。200行のIF文が真ならば，240行に行くのだから，ソは⓪である。

コメント：自然数の3進法表示の数字列を求めるプログラムの問題である。3のべき乗で自然数を割ったときの商が求める数字である。数字列を上位の桁から求めるプログラムと下位の桁から求めるプログラムを理解する。当然ながら，プログラムの行の一つ一つが果たしている機能を理解する必要がある。難しい数学計算をしているわけではないが，プログラム独特の表現をスムーズに理解できるように習熟していなければならない。

＜総評＞

例年通りすべて，教科書の記載に応じた基本的な問題である。教科書をしっかり理解し，過去問や類似問を繰り返し解き，分からない箇所は教科書に戻って学ぶことを繰り返すことが，高得点につながるであろう。

第１問　数学Ⅱの第１問に同じ。難易度は［１］，［２］ともＣ

第２問　数学Ⅱの第２問に同じ。難易度はＢ－

第３問　等比数列の一般項および和の導出に関する問題。難易度はＢ＋

第４問　平面図形のベクトルによる取扱いの問題。難易度はＢ＋

第５問　データの統計処理の基礎的な問題。簡単な計算を間違えないこと。難易度はＢ

第６問　自然数の3進法表示の数字列を求めるプログラムの問題。難易度はＢ

130226