平成26年度（2014年度）センター試験　数学Ⅱ　数学Ⅱ･数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ・Ｂ]　（100点，60分）

数　学　Ⅱ（全問必答）

第１問（配点　30）

［１］

＜解答＞

(1)　ア３　イ４　ウ３　エ４　オ４　カ３

(2)　キ２　ク２　ケ１　コ１　サ４　シ２　ス４

(3)　セ ④

＜解説＞

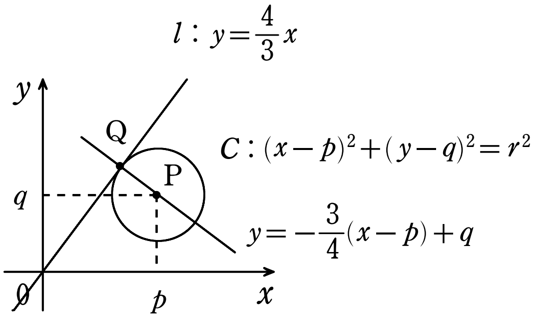

図１

(1)

図１のような図を描いて考える。

直線lに垂直な方程式の傾きは，lの傾きは$\frac{4}{3}$だから，$-1\div\frac{4}{3}=-\frac{3}{4}$

したがって，点Pを通り直線lに垂直な直線の方程式は，$y=-\frac{ア}{イ}(x-p)+q=-\frac{3}{4}(x-p)+q$

Pからlに引いた垂線とlとの交点Qの座標を求めるには，

$\frac{4}{3}x=-\frac{3}{4}(x-p)+q$とおいて，$x=\frac{3}{25}(ウp+エq)=\frac{3}{25}(3p+4q)$，$y=\frac{4}{3}x=\frac{4}{25}(3p+4q)$だから，

交点Qの座標は，$\left(\frac{3}{25}(ウp+エq),\ \frac{4}{25}(ウp+エq)\right)$となる。

点P$(p,\ q)$を中心とする円Cがlに接するのだから，接点はQであり，半径rはPQに等しいので，

$r^2=(\mathrm{PQ})^2=\left\{\frac{3}{25}(3p+4q)-p\right\}^2+\left\{\frac{4}{25}(3p+4q)-q\right\}^2=\left(\frac{4}{25}\right)^2(4p-3q)^2+\left(\frac{3}{25}\right)^2(4p-3q)^2$

$=\frac{1}{25}(4p-3q)^2$

したがって，$r=\frac{1}{5}|オp+カq|=\frac{1}{5}|4p-3q|$　①

(2)

円Cがx軸に接し，点R(2，2)を通る場合について，Cの方程式を求める。

Cはx軸に接するので，Cの半径rはqに等しい。

したがって①により，$q=\frac{1}{5}|4p-3q|$，$\therefore |4p-3q|=5q$

したがって$4p\geqq 3q$のとき，$4p-3q=5q$，$\therefore p=2q$，一方$4p<3q$のとき，$3q-4p=5q$，$\therefore p=-\frac{1}{2}q$

しかるに$p>0$，$q>0$だから，$p=-\frac{1}{2}q$は解ではない。したがって，$p=$キ$q=2q$

Cは点Rを通るので，求めるCの方程式は

$(x-2q)^2+(y-q)^2=(2-2q)^2+(2-q)^2=q^2$だから，$q^2-3q+2=(q-2)(q-1)=0$，$\therefore q=2，1$

したがって，Cは$q=1$のとき，$(x-$ク$)^2+(y-$ケ$)^2=(x-2)^2+(y-1)^2=$コ$=1$　②

$q=2$のとき，$(x-$サ$)^2+(y-$シ$)^2=(x-4)^2+(y-2)^2=$ス$=4$　③

(3)

方程式②の表す円の中心Sの座標は(2，1)，方程式③の表す円の中心Tの座標は(4，2)であるから，直線STは原点Oを通り，OS：OTは1：2だから，点Oは線分STを1：2に外分する。したがって，セは「④　1：2に外分」である。

コメント：円と直線の図形を方程式により扱う問題。分かり易い問題だから，スムーズに解答したい。
直交する直線の傾きの積は-1であることを用いる。外分，内分の意味を的確に理解していなければならない。

［2］

<解答>

ソ3　タ8　チ2　ツ3　テ1　ト0　ナ1　ニ2　ヌ3　ネ2　ノハ27　ヒ5　フ1　ヘ6

<解説>

自然数m，nに対して，不等式

$\log_2 m^3+\log_3 n^2\leqq 3$　④

を考える。

$m=2$，$n=1$のとき，$\log_2 m^3+\log_3 n^2=$ソ$=3\log_2 m+2\log_3 n=3\log_2 2+2\log_3 1=3+0=3$

このm，nの値の組は④を満たす。

$m=4$，$n=3$のとき，$\log_2 m^3+\log_3 n^2=$タ$=3\log_2 4+2\log_3 3=6+2=8$

このm，nの値の組は④を満たさない。

不等式④を満たす自然数m，nの組の個数を調べよう。④は

$\log_2 m+\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}\log_3 n=\log_2 m+\frac{2}{3}\log_3 n\leqq$テ$=1$　⑤

と変形できる。

nが自然数のとき，$n=1$が最小だから，$\log_3 n$のとり得る最小の値はト$=\log_3 1=0$である。

したがって⑤により，$\log_2 m \leqq 1$でなければならない。したがって，$m=$ナ$=1$または$m=$ニ$=2$でなければならない。

$m=1$の場合，⑤は$\log_3 n \leqq \frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}=\frac{3}{2}$となる。これを変形すると，$2\log_3 n=\log_3 n^2 \leqq 3$だから，

$n^2 \leqq 3^3=$ノハ$=27$と変形できる。よって，$m=1$のとき，⑤を満たす自然数nのとり得る値の範囲は，$n \leqq \sqrt{27}$だから，$n \leqq$ヒ$=5$である。したがって，$m=1$の場合，④を満たす自然数m，nの組の個数はヒ$=5$である。

同様にして$m=2$の場合，⑤は$\log_2 2+\frac{2}{3}\log_3 n=1+\frac{2}{3}\log_3 n \leqq 1$，したがって$\log_3 n \leqq 0$であり，

⑤を満たす自然数nは$n=1$である。すなわち$m=2$の場合，④を満たす自然数m，nの組の個数はフ$=1$である。

以上のことから，④を満たす自然数m，nの組の個数はヘ$=5+1=6$である。

コメント：対数の基本的な性質を知っていなければならない。特段難しいところはないだろう。自然数の定義も知っていなければならない。

第２問（配点 30）

＜解答＞

(1)　ア 3　イ 2　ウ 0　エ ⓪

(2)　オ 3　カキ −1　ク 1　ケ 3　コ 3　サ 2　シ 3　ス 1　セソ −1　タ 2
　チツ −9　テ 4　ト1　ナ 4　ニ 2　ヌ 4　ネノ 11

＜解説＞

pを実数とし，$f(x)=x^3-px$とする。

(1)

関数$f(x)$が極値をもつためのpの条件を求める。$f(x)$の導関数は，$f'(x)=$ア$x^{\text{イ}}-p=3x^2-p$である。したがって，$f(x)$が$x=a$で極値をとるならば，ア$a^{\text{イ}}-p=3a^2-p=$ウ$=0$がなり立つ。

したがって，極値をとるためには，$3a^2=p$だから，$p \geqq 0$でなければならない。しかるに$p=0$では，$f'(x)=x^2 \geqq 0$となって，$f'(x)$の符号が変化しない。

したがって，$x=a$前後での$f'(x)$の符号の変化を考えることにより，$p>0$すなわちpが条件エ$=$⓪を満たす場合は，$f(x)$は必ず極値をもつ。

(2)

$f(x)$が$x=\frac{p}{3}$で極値をとるので，$a=\frac{p}{3}$とすれば，$\frac{p^2}{3}-p=\frac{p}{3}(p-3)=0$だから，$p=$オ$=3$

したがって，$f'(x)=3x^2-p=3x^2-3=0$，$\therefore x=\pm 1$

図２のように$f(x)$は変化するから，$x=$カキ$=-1$で極大値をとり，$x=$ク$=1$で極小値をとる。

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

図２

曲線Cの接線で，点Aを通り傾きが0でないものをlとする。lの方程式を求めよう。lとCの接点のx座標をbとすると，lは点$(b,\ f(b))$におけるCの接線であるから，その傾きは$f'(b)=3b^2-p=3b^2-3$，したがってlの方程式はbを用いて，$y=($ケb^2-コ$)(x-b)+f(b)=(3b^2-3)(x-b)+f(b)$となる。

また，lは点A すなわち，$\left(\dfrac{p}{3},\ f\left(\dfrac{p}{3}\right)\right)=(1,\ -2)$を通るから，

$y=(3b^2-3)(x-b)+f(b)$に，$x=1$，$y=-2$を代入して，

$-2=(3b^2-3)(1-b)+f(b)=(3b^2-3)(1-b)+b^3-3b=-2b^3+3b^2-3$

したがって方程式，サb^3-シ$b^2+1=2b^3-3b^2+1=0$，を得る。

$2b^3-3b^2+1=(2b+1)(b-1)^2=0$だから，この方程式の解は，$b=$ス$=1$，$\dfrac{\text{セソ}}{\text{タ}}=\dfrac{-1}{2}$である。

しかるに$b=1$のとき$f'(b)=3b^2-p=3b^2-3=0$となって傾きが0となる。lの傾きが0でないので，lの方程式，$y=(3b^2-3)(x-b)+f(b)$に$b=\dfrac{-1}{2}$を代入して，lの方程式は

$$y=\frac{\text{チツ}}{\text{テ}}x+\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}=\frac{-9}{4}x+\frac{1}{4}$$

点A$(1,\ -2)$を頂点とする放物線は，$y=q(x-1)^2-2$，とおくことができる。原点を通るので，$q=2$となる。したがって放物線Dの方程式は，$y=$ニx^2-ヌ$x=2(x-1)^2-2=2x^2-4x$

直線lと放物線Dに囲まれた図形のうち，不等式$x\geqq 0$の表す領域に含まれる部分の面積Sは，

$$S=\int_0^1\left\{\left(-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)-(2x^2-4x)\right\}dx=\int_0^1\left(-2x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4}=\frac{-16+21+6}{24}=\frac{\text{ネノ}}{24}=\frac{11}{24}$$

コメント：3次関数，2次関数の微分，積分に関する問題。特に難しい要素のない，素直な設問である。
グラフを大雑把に描いて，問題の全容を頭に入れておこう。

第３問（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア２　イ１　ウ１　エ１　オ６　カ５　キ６　ク３　ケ２　コ ①

(2)　サ１　シ４　ス９　セ８　ソ２　タ２　チ ⑨　ツ ⑤　または　チ ⑤　ツ ⑨　テト -9　ナ８

(3)　ニ ②

＜解説＞

関数$y=\sin x-\cos 2x$のグラフについて考える。ただし，$0\leqq x\leqq 2\pi$とする。

(1)

三角関数の2倍角の公式を利用すれば，$\cos 2x=1-2\sin^2 x$，だから

$$\sin x-\cos 2x=\text{ア}\sin^2 x+\sin x-\text{イ}=2\sin^2 x+\sin x-1 \quad ①$$
$$=(2\sin x-\text{ウ})(\sin x+\text{エ})=(2\sin x-1)(\sin x+1)$$

である。

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$において，$\sin x-\cos 2x=0$となるxの値は,

$2\sin x-1=0$から，$\sin x=\dfrac{1}{2}$だから，$x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$

$\sin x+1=0$から，$\sin x=-1$だから，$x=\dfrac{3\pi}{2}$

したがって，小さい順に，$\dfrac{\pi}{\text{オ}}$，$\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}\pi$，$\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}\pi$，すなわち$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$であることがわかる。

また，$\sin x+1\geqq 0$だから，$y=\sin x-\cos 2x=(2\sin x-1)(\sin x+1)>0$となる$x$の範囲は,

$\sin x+1\fallingdotseq 0$であり，$2\sin x-1>0$となるxの範囲である。それは，明らかに① $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}$である。

(2)

$$\sin x-\cos 2x=2\sin^2 x+\sin x-1=2\left(\sin x+\frac{\text{サ}}{\text{シ}}\right)^2-\frac{\text{ス}}{\text{セ}}=2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8} \quad ②$$

よって②から，$y=\sin x-\cos 2x$は$\sin x=1$，すなわち$x=\text{ソ}=$②$=\dfrac{\pi}{2}$において,

最大値タ$=2\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}=\dfrac{25}{8}-\dfrac{9}{8}=2$ をとる。

また②から，$\sin x=-\dfrac{1}{4}$において最小値$\dfrac{\text{テト}}{\text{ナ}}=\dfrac{-9}{8}$をとる。

$\sin\alpha=\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}=\dfrac{1}{4}$だから，$\sin(2\pi-\alpha)=\sin 2\pi\cos(-\alpha)-\sin\alpha\cos 2\pi=-\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}$

さらに，$\sin(\pi+\alpha)=\sin\pi\cos\alpha+\sin\alpha\cos\pi=-\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}$

したがって，$x=\text{チ}=2\pi-\alpha=$⑨または$x=\text{ツ}=\pi+\alpha=$⑤において最小値をとる。

(3)

(1)，(2)の結果を用いて，$y=\sin x-\cos 2x$のグラフの概形として適切なものを選ぶ問題である。

$x=\dfrac{\pi}{2}$で最大値2をとるので，③，④，⑤は棄却される。最小値は２つあるので，⓪①は棄却される。

残るのは②である。最小値$-\dfrac{9}{8}$をとるxは$\pi+\alpha$，$2\pi-\alpha$であり，②のグラフが示すところである。

コメント：三角関数の2次式に関する問題。2倍角の公式を用いて，$\cos 2x$を$\sin x$によって表現する。
すると，与えられた関数は$\sin x$の2次式になる。因数分解によって，$y=0$となる$\sin x$を求めることができる。

第４問（配点 20）

<解答>

ア１　イ c　ウ１　エ２　オ７　カ３　キ２　ク１　ケ８　コ３

サ１　シ c　スセ 10　ソ３　タチ 11　ツ３　テ２　ト２　ナ３　ニ５　ヌ７　ネ３

<解説>

$P(x)=x^3+cx^2+dx+2$

$P(-1)=-1+c-d+2=c-d+1=0$，したがって，$d=c+$ア$=c+1$

$P(x)=x^3+cx^2+dx+2=x^3+cx^2+(c+1)x+2=(x+1)\{x^2+(\text{イ}-\text{ウ})x+\text{エ}\}$

$=(x+1)\{x^2+(c-1)x+2\}$　①

$P(2)=3(4+2c-2+2)=3(4+2c)<-2$だから，$c<-\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}=-\dfrac{7}{3}$　②

nを3以上の自然数とするとき，$P(n)=(n+1)\{n^2+(c-1)n+2\}\geqq 0$を$c$ について解く。

$n^2+(c-1)n+2\geqq 0$だから，$c\geqq -\dfrac{\text{キ}}{n}+\text{ク}-n=-\dfrac{2}{n}+1-n$　③

$n\geqq 3$のとき，nの値が大きくなると，③の右辺の値は小さくなるので，③が最大の値となるのは，

$n=3$のとき。したがって③で$n=3$とおくと$c\geqq -\dfrac{2}{n}+1-n=-\dfrac{2}{3}+1-3=-\dfrac{8}{3}$

②を考慮して，cのとり得る値の範囲は，$-\dfrac{\text{コ}}{\text{ケ}}=-\dfrac{8}{3}\leqq c<-\dfrac{7}{3}$　④

3次関数$y=P(x)$のグラフを考えると，$P(0)=2>0$かつ$P(2)<0$であるから，方程式$P(x)=0$は0と2の間に実数解αをもつ。

①により，このα は2 次方程式 $x^2+(c-1)x+2=0$ の解である。この方程式の解をβとすると，解と係数の関係により，$\alpha+\beta$ は c を用いて

$\alpha+\beta=$サ$-$シ$=1-c$と表される。このことは，解と係数の関係として覚えておく事項だが，

再確認すると，$x^2+(c-1)x+2=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$によって明らかである。

したがって，$c=1-(\alpha+\beta)$だから，④により$-\dfrac{8}{3}\leqq 1-(\alpha+\beta)<-\dfrac{7}{3}$，

したがって，$\dfrac{\text{スセ}}{\text{ソ}}=\dfrac{10}{3}<\alpha+\beta\leqq\dfrac{11}{3}$　⑤

解と係数の関係により$\alpha\beta=2$であり，また$\alpha>0$であるから，$\beta=\dfrac{2}{\alpha}$とすれば，

⑤は$\dfrac{10}{3}<\alpha+\dfrac{2}{\alpha}\leqq\dfrac{11}{3}$，すなわち$\dfrac{10}{3}\alpha<\alpha^2+2\leqq\dfrac{11}{3}\alpha$となる。

$\alpha^2+2-\dfrac{10}{3}\alpha=\left(\alpha-\dfrac{5}{3}\right)^2-\dfrac{7}{9}>0$，したがって$\left(\alpha-\dfrac{5}{3}\right)^2>\dfrac{7}{9}$，

したがって $\alpha>\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ あるいは $\alpha<\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$　⑥

$\alpha^2+2-\dfrac{11}{3}\alpha=\left(\alpha-\dfrac{11}{6}\right)^2-\dfrac{49}{36}\leqq 0$，したがって$\left(\alpha-\dfrac{11}{6}\right)^2\leqq\dfrac{49}{36}$，したがって $\dfrac{2}{3}\leqq\alpha\leqq 3$　⑦

$0<\alpha<2$に注意して，⑥，⑦から$\dfrac{\text{ト}}{\text{ナ}}=\dfrac{2}{3}\leqq\alpha<\dfrac{\text{ニ}-\sqrt{\text{ヌ}}}{\text{ネ}}=\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$であることがわかる。

コメント：昨年と同様に3次方程式の問題が出た。昨年も指摘したように，実数を係数とする3次方程式は少なくとも一つの実数解をもつ。すると，実数を係数とする1次関数と2次関数に必ず因数分解できる。ここでは$x=-1$という解が与えられているので，①のように因数分解される。2次方程式の解と係数の関係は覚えていなければならない。

＜総評＞

第１問［１］　直線と円の方程式の問題。難易度はＣ

［２］　指数関数の不等式の問題。難易度はＣ

第２問　3次関数，2次関数の微分積分に関する問題。難易度はＢ－

第３問　三角関数の方程式の問題。難易度はＢ

第４問　3次関数，2次関数の式の変形や解と係数の関係に関する問題。難易度はＢ

数学Ⅱ・数学Ｂ

（注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第１問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第１問に同じ

第２問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第２問に同じ

第３問～第６問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　アイ 15　ウエ 28　オ 4　カ 5　キ 2　ク 2　ケ 3　コ 1

(2)　サ 6　シス 35　セ 2　ソ 1　タ 5　チ 5　ツ 3　テ 3　ト 6　ナ 3　ニ 3　ヌ 2　ネ 2　ノ 3

＜解説＞

数列$\{a_n\}$は初項は6であり，$\{a_n\}$の階差数列は初項が9，公差が4の等差数列である。

(1)

$\{a_n\}$の階差数列をu_nとすれば，$u_n=a_{n+1}-a_n=9+4(n-1)$　[*1]

したがって，$n=1$とおけば，$u_1=a_2-a_1=a_2-6=9$，$\therefore\ a_2=$アイ$=15$

同様に，$n=2$とおけば，$u_2=a_3-a_2=a_3-15=9+4=13$，$\therefore\ a_3=$ウエ$=28$

$\{a_n\}$の階差数列u_nの一般項は，[1*]より $u_n=$オ$n+$カ$=4n+5$ である。

これを利用して数列$\{a_n\}$の一般項を求めてみよう。

$u_1+u_2+\cdots+u_{n-2}+u_{n-1}=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_n-a_{n-1})$

$=a_n-a_1=a_n-6$　[*2]

しかるに，$u_1+u_2+\cdots+u_{n-2}+u_{n-1}$ は初項が9，公差が4の等差数列の$(n-1)$項までの和だから

$u_1+u_2+\cdots+u_{n-2}+u_{n-1}=\dfrac{1}{2}(n-1)\{2\times 9+4(n-2)\}=(n-1)(2n+5)=2n^2+3n-5$

したがって，[*2]より$a_n-6=2n^2+3n-5$，したがって $a_n=\text{キ}n^{\text{ク}}+\text{ケ}n+\text{コ}=2n^2+3n+1$　①

(2)

数列$\{b_n\}$は，初項が$\dfrac{2}{5}$で，漸化式

$$b_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}-1}b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad ②$$

を満たすとする。$n=1$とおいて，$b_2=\dfrac{\text{サ}}{\text{シス}}=\dfrac{a_1}{a_2-1}b_1=\dfrac{6}{15-1}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{35}$

①からa_n，a_{n+1}を求めて②に代入すると，

$b_{n+1}=\dfrac{\text{セ}n+\text{ソ}}{\text{セ}n+\text{タ}}b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}-1}b_n=\dfrac{2n^2+3n+1}{2(n+1)^2+3(n+1)}b_n=\dfrac{2n+1}{2n+5}b_n$　③

③を変形すると，$b_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+5}b_n=\dfrac{2n+1}{2n+5}\dfrac{2n+3}{2n+3}b_n$ だから，

$(2n+5)(2n+3)b_{n+1}=(2n+3)(2n+1)b_n$　③’

ここで，$c_n=(\text{セ}n+\text{ソ})b_n=(2n+1)b_n$　④

とおいて，③，③’をc_nとc_{n+1}を用いて変形すると，すべての自然数nに対して

$(\text{セ}n+\text{チ})c_{n+1}=(2n+5)c_{n+1}=(\text{セ}n+\text{ツ})c_n=(2n+3)c_n$

が成り立つことがわかる。これにより

$d_n=(\text{セ}n+\text{テ})c_n=(2n+3)c_n$　⑤

とおくと，すべての自然数nに対して，$d_{n+1}=d_n$が成り立つことがわかる。

$d_1=\text{ト}=5c_1=5\times 3b_1=5\times 3\times\dfrac{2}{5}=6$であるから，すべての自然数$n$に対して，$d_n=6$である。

⑤から，$c_n=\dfrac{d_n}{2n+3}=\dfrac{6}{2n+3}$，したがって④から$(2n+1)b_n=\dfrac{6}{2n+3}$だから，数列$\{b_n\}$の一般項は

$b_n=\dfrac{\text{ト}}{(\text{セ}n+\text{ソ})(\text{セ}n+\text{テ})}=\dfrac{6}{(2n+1)(2n+3)}$である。

これを変形すると，$b_n=\dfrac{\text{ナ}}{\text{セ}n+\text{ソ}}-\dfrac{\text{ニ}}{\text{セ}n+\text{テ}}=\dfrac{3}{2n+1}-\dfrac{3}{2n+3}$　[*3]

これを利用すると，数列$\{b_n\}$の初項から第n項までの和S_nは

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=3\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right\}=3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{2n}{2n+3}$$

コメント：まずは階差数列の定義を的確に把握している必要がある。その上で，ここでは階差数列の一般項が[*1]のように表現する。等差数列のn項までの和はすらすら記述できなければならない。

(2)では③から③’へ変形するのがミソだが，$(2n+3)$の項を導入することで，左辺，右辺が同一形式になることに着目する。b_nを[*3]のような差分で表すことは常套的方法だから，覚えておこう。

第４問（選択問題）（配点　20）

座標空間において，立方体OABC－DEFGの頂点を

O (0, 0, 0)，A (3, 0, 0)，B (3, 3, 0)，C (0, 3, 0)，

D (0, 0, 3)，E (3, 0, 3)，F (3, 3, 3)，G (0, 3, 3)

とし，ODを2：1に内分する点をK，OAを1：2に内分する点をLとする。

BF上の点M，FG上の点NおよびK，Lの4点は同一平面上にあり，四角形KLMNは平行四辺形であるとする。

<解答>

(1)　アイ -1　ウ 0　エ 2　オ ③　カ 1　キ 2　ク 2　ケ 0　コ 5　サシ 14　スセ 70

(2)　ソ 0　タ 2　チツ -5　テ 3　ト 9　ナニ 35　ヌ 3　ネノ 70　ハヒ 35　フ 1

<解説>

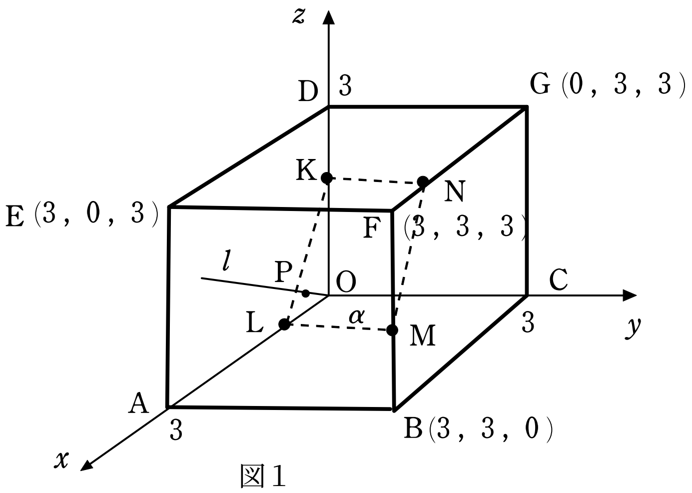

図１

(1)

問題文から図１のような図を描いて，題意を把握しよう。

四角形 KLMN の面積を求めよう。点K はODを2：1に内分する点だから，その座標は (0, 0, 2)。点L はOAを1：2 に内分する点だから，その座標は (1, 0, 0)。

したがってベクトル$\overrightarrow{LK}$を成分で表すと

$\overrightarrow{LK}$=(アイ，ウ，エ)=(0, 0, 2)−(1, 0, 0)=(−1, 0, 2)

四角形 KLMN が平行四辺形であり，LKの対辺がMNだから，$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MN}$= ③

ここで，M(3, 3, s)，N(t, 3, 3)と表すと，

$\overrightarrow{MN}$=(t, 3, 3)−(3, 3, s)=(t−3, 0, 3−s)=$\overrightarrow{LK}$=(−1, 0, 2) だから

s=カ=1，t=キ=2となり，NはFG を1：ク=1：2 に内分することがわかる。

また$\overrightarrow{LK}$と$\overrightarrow{LM}$ について，$\overrightarrow{LM}$=(3, 3, 1)−(1, 0, 0)=(2, 3, 1)だから，

$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}$=ケ=(−1, 0, 2)・(2, 3, 1)=−2+2=0

したがって，$\overrightarrow{LK}$と$\overrightarrow{LM}$は直交する。すなわち，$\angle$KLM＝90°

また，$|\overrightarrow{LK}|=\sqrt{コ}=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ ，$|\overrightarrow{LM}|=\sqrt{サシ}=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$ だから，

四角形KLMNの面積$\sqrt{スセ}=\sqrt{5}\times\sqrt{14}=\sqrt{70}$ である。

(2)

四角形KLMNを含む平面をαとし，点Oを通り平面 αと垂直に交わる直線をl，αとlの交点をPとする。$|\overrightarrow{OP}|$と三角錐OLMNの体積を求めよう。

P$(p,\ q,\ r)$とおくと，$\overrightarrow{OP}$ は$\overrightarrow{LK}$ および$\overrightarrow{LM}$ と垂直であるから，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LK}=(p,\ q,\ r)\cdot(-1,\ 0,\ 2)=-p+2r=ソ=0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LM}=(p,\ q,\ r)\cdot(2,\ 3,\ 1)=2p+3q+r=ソ=0$

となるので，$p=タr=2r$，$q=\dfrac{チツ}{テ}r=\dfrac{-5}{3}r$であることがわかる。

$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{PL}$が垂直なので，$\overrightarrow{PL}=(1,\ 0,\ 0)-(p,\ q,\ r)=(1-p,\ -q,\ -r)$であることを考慮して，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PL}=(p,\ q,\ r)\cdot(1-p,\ -q,\ -r)=p-p^2-q^2-r^2=2r-4r^2-\dfrac{25}{9}r^2-r^2=2r-\dfrac{70}{9}r^2=0$

したがって，$r=\dfrac{ト}{ナニ}=\dfrac{9}{35}$となる。$p=2r=\dfrac{18}{35}$，$q=\dfrac{-5}{3}r=\dfrac{-3}{7}$

$$|\overrightarrow{OP}|=\frac{ヌ\sqrt{ネノ}}{ハヒ}=\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\sqrt{4r^2+\frac{25}{9}r^2+r^2}=\sqrt{\frac{70}{9}}\,r=\sqrt{\frac{70}{9}}\,\frac{9}{35}=\frac{3\sqrt{70}}{35}$$

$|\overrightarrow{OP}|$は三角形LMNを底面とする三角錐OLMNの高さであるから，

三角錐OLMNの体積＝フ＝$\dfrac{1}{3}\times$（三角形LMNの面積）$\times|\overrightarrow{OP}|$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times（四角形KLMNの面積）\times|\overrightarrow{OP}|=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{70}\times\frac{3\sqrt{70}}{35}=1$$

コメント：立体図形の点を3次元ベクトルによって表現し，ベクトル演算によって立体図形の特性を求める問題である。まずはおよその図を描いて問題の概要を的確に把握しよう。(1)は紛れのない問題だから，素直に考えていけば良い。内分点を理解していれば，与えられた点K，Lの座標を求めることは容易である。２つのベクトルの内積が0ということは，ベクトルの方向が垂直である（直交している）ということであることを理解していなければならない。

(2)では垂直に交わるベクトルの内積が0であることが多用される。

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　アイ 14　ウエ 10　オカ 00　キク 32　ケ 4　コサ 18　シス 14

(2)　セ ⓪

(3)　ソタ 15　チ 0　ツ 5

(4)　テ 8　ト ④　ナ ①

＜解説＞

(1)

生徒の英語の得点をE_k（k=1，2，・・，8，9)とし，平均点をE，分散をB_Eとする。

生徒５の英語の得点Ａを求める。

$$\sum_{k=1}^{9} E_k = \sum_{k=1,\, k\neq 5}^{9} E_k + \mathrm{A} = E \times 9 = \frac{\sum_{k=1}^{9} E_k}{9} \times 9$$ だから，

生徒１～９までの英語の得点の総和＝（生徒５を除く得点の和）＋Ａ＝130＋Ａ

＝平均点×生徒数＝16.0×9＝144

Ａ＝アイ＝144－130＝14

9人の英語の得点の分散B_Eを求める。

$$B_E = ウエ.オカ = \frac{\sum_{k=1}^{9} (E_k - E)^2}{9} = \frac{90}{9} = 10.00$$

生徒の数学の得点をS_k（k=1，2，・・，8，9)とし，平均点をS，分散をB_Sとする。

生徒６，７の数学の得点Ｃ，Ｄを求める。英語と同じ考え方により，

Ｃ＋Ｄ＝（生徒１～９までの数学の得点の総和）－（生徒６，７を除く得点の和）

＝15.0×9－103＝32

英語と数学の相関係数は，$r = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{9} \frac{E_k - E}{s_E} \times \frac{S_k - S}{s_S}$　①

ただし，s_Eは英語の標準偏差，s_Sは数学の標準偏差である。

$s_E = \sqrt{B_E} = \sqrt{10}$，$s_S = \sqrt{B_S} = \sqrt{10}$ だから，$r = 0.500 = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{10} (E_k - E)(S_k - S) = \frac{37 - 2D + 2C}{90}$

したがって，Ｃ－Ｄ＝4，したがってＣ＝18，Ｄ＝14

(2)

英語の下から2番目の得点は14点である。しかるに①と②では11点である。したがって，これらは棄却される。数学の下から2番目の得点は14点である。しかるに③は12点で，棄却される。残るのは⓪である。念のため確認すると，表の（国語の点，数学の点）と⓪の散布図は正しく対応している。

(3)

生徒１０の得点6が加わったことによる平均値Ｅを求める。

$$\mathrm{E} = ソタ．チ = \frac{生徒10が加わったときの総得点}{10} = \frac{加わる前の総得点＋生徒10の得点}{10}$$

$$= \frac{16 \times 9 + 6}{10} = 15.0$$

生徒１０の数学の得点Ｆを求める。

Ｆ＝ツ＝（生徒１０が加わったときの総得点）－（生徒１０が加わわる前の総得点）

＝14×10－15×9＝5

(4)

1人の生徒が転出して，英語も数学も平均値が変わらなかったということは，その生徒の得点が平均値と等しいということである。英語の平均値が15.0，数学の平均値が14.0だから，これと等しい得点の生徒は８である。したがって，テ＝８。

転出した生徒８の英語の得点が平均値に等しいので，平均値からの偏差は0であり，人数が1人減少するので，その分だけ分散は増加する。すなわち，$\dfrac{v'}{v}=$ト$=\dfrac{10}{9}=$④

このことを数式で考えると下の通りで，$E_8-E=E_8-15=0$ がポイントである。

$$v=\frac{\sum_{k=1}^{10}(E_k-E)^2}{10}=\frac{\sum_{k=1}^{10}(E_k-15)^2}{10}=\frac{\sum_{k=1,\neq 8}^{10}(E_k-15)^2+(E_8-15)^2}{10}=\frac{\sum_{k=1,\neq 8}^{10}(E_k-15)^2}{10}$$

$$v'=\frac{\sum_{k=1}^{10}(E_k-E)^2-(E_8-E)^2}{9}=\frac{\sum_{k=1}^{10}(E_k-15)^2-(E_8-15)^2}{9}=\frac{\sum_{k=1,\neq 8}^{10}(E_k-15)^2}{9}$$

相関係数の式①を参照する。

10人についての相関係数は $r=\dfrac{1}{10}\sum_{k=1}^{9}\dfrac{E_k-E}{s_E}\times\dfrac{S_k-S}{s_S}$

生徒８が転出することによる英語と数学の標準偏差は，分散が上のように$\dfrac{10}{9}$倍に変化するので，s_Eとs_Sは$\sqrt{\dfrac{10}{9}}$倍に変化する。また平均値との偏差$(E_8-E)=0$，$(S_8-S)=0$なので，生徒数が10から9に変化することに対応して$\dfrac{10}{9}$倍の変化が発生する。

したがって，相関係数の変化は，$\dfrac{r'}{r}=$ナ$=\dfrac{10}{9}\times\left(\sqrt{\dfrac{9}{10}}\right)^2=1=$①

コメント：数表に記載されたデータの統計値を考える問題で，例年同様である。平均，分散は一般的な表現形式を書き下すことができること。また相関係数についても同様であるが，やや煩瑣となるので，難しい問題といえる。相関係数がどのように変化するかは，相関係数の定義から的確に理解することが必要である。

第６問（選択問題）（配点　20）

２以上の自然数Nに対して，1からNまでの自然数の積

$N!=1\times 2\times\cdots\times N$

の素因数分解を考える。

＜解答＞

(1)　ア４　イ２

(2)　ウ ②　エ ③　オ６　カキ97

(3)　クケコ110　サ ④　シスセ501　ソタチ501

(4)　ツ ②　テ ⑧　ト９　ナ２

＜解説＞

(1)

$6!=1\times 2\times\cdots\times 6==2^{ア}\times 3^{イ}\times 5=2^4\times 3^2\times 5$

したがって，6!は素因数2をア個=4個，素因数3をイ個=2個，素因数5を1個もつ。

(2)

N!がもつ素因数2の個数を求めるプログラムに関する問題である。

[プログラム1]

```
100 INPUT PROMPT "N=":N
110 LET D=2
120 LET C=0
130 LET M=N
140 FOR J=1 TO N
150     LET M=INT(M/D)
160     LET  ウ
170     IF  エ  THEN GOTO 190
180 NEXT J
190 PRINT "素因数";D;"は";C;"個"
200 END
```

変数Cは素因数2の個数を数える。MはN以下の偶数の個数で，Jが1ずつ増えるに従い半分になる。これをCが数えていくのだから，ウには，②のC=C+Mが当てはまる。

エは140のFOR文の終了条件を示す。M=1<2=Dのとき，偶数は1個になる。したがって，エには③のM<Dが当てはまる。

N=101ではMは以下のように変化する。すなわち，50 , 25 , 12 , 6 , 3 , 1 。JはFOR文を実行する回数を示すから，Jの値はオ=6である。

変数CはMの値を加算したものだから，Cの値はカキ=50+25+12+6+3+1 =97 。

(3)

求める個数の対象となる素因数は変数Dに記憶されるのだから，クケコ=110行をLET D=5 に変更すれば良いので，サは④である。

2014を5で割り続けた整数部分，すなわちMは以下のように変化する。すなわち，402 , 80 , 16 , 3 。したがって，2014!は素因数5 をシスセ=402+80+16+3=501個もつ。

2014を2で割り続けた整数部分，すなわちMは以下のように変化する。

すなわち，1007 , 503 , 251 , 125 , 62 , 31 , 15 ,7 , 3 , 1 。

したがって，2014!は素因数2 をシスセ=1007+503+251+125+62 +31+15+7+3+1 =2005個もつ。

10=2×5と素因数分解されるので，2014!は5の素因数の個数501個に等しい10を因数としてもつ。したがって，2014!を10で割り切れる限り割続けると，ソタチ=501回割れる。

(4)

N!がもつ素因数とその個数を順に出力するように[プログラム1]を変更した。

[プログラム2]

```
100 INPUT PROMPT "N=":N
110 FOR D=2 TO N
111     FOR K=2 TO D-1
112         IF ツ THEN テ
```

```
113      NEXT K
120       LET C=0
130       LET M=N
140       FOR J=1 TO N
150           LET M=INT(M/D)
160           LET  ウ
170           IF  エ  THEN GOTO 190
180    NEXT J
190    PRINT "素因数";D;"は";C;"個"
191 NEXT D
200 END
```

[プログラム2]の111行から113行までの処理はDが素数であるかどうかを判定するためのものである。ツでは素数かどうかの判断を行うが，そのために自身の数より小さい数で割り切れれば，素数ではない。割り切れるかどうかの判断は，割り算の商が整数部分のみで，小数点以下がないということにある。DがKで割り切れるかどうかは，割り算の商の整数部分をK倍した数がDに等しければ，商には小数点以下がない，すなわち割り切れると判断できる。その場合，Dは素数ではない。したがって，ツは⓪のD=INT(D/K)*Kである。

素数でないことがわかれば，Dを1増やす必要があるので，NEXT Dへ動作がとぶ。したがって，テは⑧のGOTO 191である。

26より小さい素数は2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19だから，9 個ある。したがって，190 行は9 個の素数に対して実行されるので，ト=9 回実行される。

26を19で割ると，商の整数部分は1なので変数C は1。

26を17で割ると，商の整数部分は1なので変数C は1。

26を13で割ると，商の整数部分は2 なので変数C は2。

26を11で割ると，商の整数部分は2なので変数C は2。

26を7で割ると，商の整数部分は3なので変数C は3。

したがって，変数C の値が2となるのはナ=2 回である。

コメント：$N!$の素因数を求めるプログラムの問題である。求めるアルゴリズムの説明があり，プログラムが提示されている。アルゴリズムはなかなか洗練されている。まずはこれを的確に理解する必要がある。その上で，プログラミングの作法を身に着けている必要がある。(1)は準備運動である。

(2)は素因数を2とした場合の個数を求めるプログラムを例示して，空白部を埋める問題である。アルゴリズムを理解していれば，わかるだろう。

(3)は2 以外の素因数の個数を求めるプログラムを考える。素数が5の場合を例とするが，手計算で素因数の個数を求める。アルゴリズム理解の的確性が問われる。

(4)は素数かどうかの判定を行い，素数であると判断された数に対してのみ，素因数の個数を求めるプログラムを実行して，$N!$を構成するすべての素因数の個数を求めるプログラムの問題である。

<総評>

　例年通りすべて，教科書の記載に応じた基本的な問題である。何度も繰り返すが，センター試験数学は，教科書を繰り返し繰り返し読んで，しっかり理解することが基本である。理解度を確かめるために，例題や過去問に取り組み，間違ったら，教科書に戻って勉強することだ。

第１問　数学Ⅱの第１問に同じ。難易度はＣ

第２問　数学Ⅱの第２問に同じ。難易度はＢ－

第３問　等差数列，階差数列の問題である。難易度はＢ＋

第４問　立体図形のベクトルによる取扱いの問題。難易度はＢ

第５問　データの統計処理の基礎的な問題。簡単な計算を間違えないこと。難易度はＢ

第６問　自然数の階乗の素因数の個数をを求めるプログラムの問題。難易度はＢ＋

140505