平成27年度（2015年度）センター試験　数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ・Ｂ]　（100点，60分）

数　学　Ⅱ（全問必答）

第１問（配点　30）

［１］

＜解答＞

(1)　ア２　イ１　ウ５　エ４　オ６　カ４　キ５

(2)　ク３　ケ６　コ３　サ２　シ９

＜解説＞

図１のような図を大雑把に描いて考える。図１はかなり正確なものだが，限られた時間だから，大雑把で良い。問題を頭の中に描いて，大要を把握するためだ。

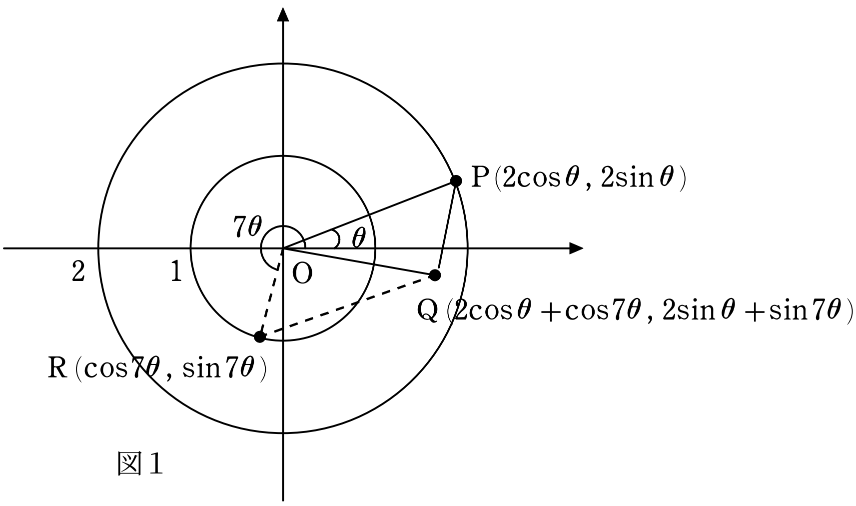

図１

(1)

θはOPとx軸とのなす角であり，Ｐは半径2 の円周上の点であることは直ぐわかる。

$PQ^2=\{(2\cos\theta+\cos7\theta)-2\cos\theta\}^2+\{(2\sin\theta+\sin7\theta)-2\sin\theta\}^2=\cos^27\theta+\sin^27\theta=1$

OP＝ア＝2，PQ＝イ＝1

$OQ^2=(2\cos\theta+\cos7\theta)^2+(2\sin\theta+\sin7\theta)^2$

$\quad=4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(\cos^27\theta+\sin^27\theta)+4(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)$

$\quad=$ウ$+$エ$(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)=3+4(\cos7\theta\cos\theta+\sin7\theta\sin\theta)$

$\quad=5+4\cos($オ$\theta)=5+4\cos(7\theta-\theta)=5+4\cos6\theta$

$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$だから，$\dfrac{3\pi}{4}\leqq6\theta\leqq\dfrac{3\pi}{2}$，したがって$-1\leqq\cos6\theta\leqq0$，

したがって$\cos6\theta$は$6\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，すなわち$\theta=\dfrac{\pi}{\text{カ}}=\dfrac{\pi}{4}$のとき，最大値0をとるので，

OQは最大値$\sqrt{\text{キ}}=\sqrt{5}$をとる。

(2)

点Pの座標 $x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$ を代入して0になるのは，ク③式である。

$$(\sin\theta)(2\cos\theta+\cos7\theta)-(\cos\theta)(2\sin\theta+\sin7\theta)=\sin\theta\cos7\theta-\cos\theta\sin7\theta$$
$$=\sin(\theta-7\theta)=-\sin6\theta=0$$

$6\theta=\pi$だから，$\theta=\dfrac{\pi}{ケ}=\dfrac{\pi}{6}$

(3)

(1)の考察を利用して，

$\angle$OQPが直角ならば，$OQ^2=OP^2-PQ^2=4-1=3$，$\therefore OQ=\sqrt{コ}=\sqrt{3}$

$OQ^2=5+4\cos6\theta=3$，$\cos6\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3\pi}{4}\leqq6\theta\leqq\dfrac{3\pi}{2}$だから，$6\theta=\dfrac{4}{3}\pi$，$\therefore\ \theta=\dfrac{サ}{シ}=\dfrac{2}{9}\pi$

コメント：

三角関数を利用した図形の問題である。点Pが半径2の円周上の偏角θの点であること，点Qが点Pに半径1の円周上の偏角7θの点の座標を加えた点であることは直ぐわかる。大雑把に図１のような図を描いておく。後は単純に数式を追えば良い。θの範囲に気をつけること。

[２]

＜解答＞

(1)　ス２　セソ -3　タ２　チツ -2　テ３

(2)　トナ -2　ニ２　ヌ２　ネノ -5　ハ４

＜解説＞

(1)

$x\sqrt{y^3}=a$　①，$x^2y^3=a^2$　③

$\sqrt[3]{x}\,y=b$　②，$xy^3=b^3$　④

③÷④により，$x=a^{ス}b^{セソ}=a^2b^{-3}$，これを②に代入して，$a^{\frac{2}{3}}b^{-1}y=b$，$\therefore\ y=a^{p}b^{タ}=a^{p}b^2$

ただし，$p=\dfrac{チツ}{テ}=\dfrac{-2}{3}$

(2)

$b=2\sqrt[3]{a^4}$，$x=a^2b^{-3}=a^2(2\sqrt[3]{a^4})^{-3}=2^{-3}\dfrac{a^2}{(\sqrt[3]{a^4})^3}=2^{-3}a^{-2}=2^{セソ}a^{トナ}$　⑤

③から，$y^3=a^2x^{-2}=a^2(2^{-3}a^{-2})^{-2}=2^6a^6$，$\therefore\ y=2^2a^2=2^{タ}a^{ニ}$　⑥

相加平均と相乗平均の関係は，$\dfrac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$だから，$x+y$の最小値は$\sqrt{2}=\sqrt{ヌ}$である。

xとyの相加平均と相乗平均が等しくなる条件は$x=y$のときだから，

⑤，⑥から$2^{-3}a^{-2}=2^2a^2$，$\therefore\ a=\dfrac{ネノ}{ハ}=\dfrac{-5}{4}$

コメント：

正の実数のべき乗問題である。相加平均と相乗平均の関係は覚えていなければならない。そして，相加平均が最小値となるのは，相乗平均と等しいときである。相加平均と相乗平均が等しくなるのは，2 変数の場合，2変数が等しいときであることも覚えていなければならない。

第２問（配点 30）

＜解答＞

(1)　ア a　イ 2　ウ 0　エ a

(2)　オ a　カ 2　キ a　ク 2　ケコ -1　サ a　シ 1　ス 2

　セ 1　ソ 8　タ 3　チツ 12　テ 3　トナ 24　ニ 3　ヌ 1　ネノ -1　ハヒ 12

＜解説＞

(1)

$f(x)$の平均変化率は $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{1}{h}\dfrac{1}{2}\{(a+h)^2-a^2\}=ア+\dfrac{h}{イ}=a+\dfrac{h}{2}$

したがって，求める微分係数は

$f'(a)=\lim\limits_{h\to ウ}\left(ア+\dfrac{h}{イ}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(a+\dfrac{h}{2}\right)=エ=a$

(2)

点P$\left(a\,,\,\dfrac{1}{2}a^2\right)$における$C$の接線$l$の方程式は，傾きが$a$だから，

$y-\dfrac{1}{2}a^2=a(x-a)$，したがって $y=オx-\dfrac{1}{カ}a^2=ax-\dfrac{1}{2}a^2$　①

①で$y=0$とおけば，$x=\dfrac{1}{2}a$だから，直線lとx軸の交点Qの座標は$\left(\dfrac{キ}{ク}\,,\,0\right)=\left(\dfrac{a}{2}\,,\,0\right)$である。

点Q$\left(\dfrac{a}{2}\,,\,0\right)$を通り$l$に垂直な直線$m$とすると，その傾きは $-\dfrac{1}{a}$ だから，

$y=-\dfrac{1}{a}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{ケコ}{サ}x+\dfrac{シ}{ス}=\dfrac{-1}{a}x+\dfrac{1}{2}$

図２のように，△APQ＝台形AOP’P－△AOQ－△PP’Q

したがって $S=\dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a^2}{2}\times\dfrac{a}{2}$

$=\dfrac{a(a^2+セ)}{ソ}=\dfrac{a(a^2+1)}{8}$

直線APの方程式は $y=\dfrac{a^2-1}{2a}x+\dfrac{1}{2}$ だから，

$T=\displaystyle\int_0^a\left\{\left(\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}x^2\right\}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{a^2-1}{2a}x^2+x\right]_0^a$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-a^3}{3}+\dfrac{a^3-a}{2}+a\right)=\dfrac{a(a^2+タ)}{チツ}=\dfrac{a(a^2+3)}{12}$

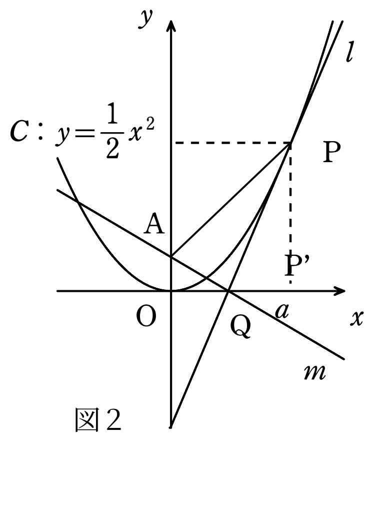

図２

$$S-T=\frac{a(a^2+1)}{8}-\frac{a(a^2+3)}{12}=\frac{a(a^2-\text{テ})}{\text{トナ}}=\frac{a(a^2-3)}{24}$$

$a>0$だから，$S-T>0$となるようなaのとり得る値の範囲は$a>\sqrt{\text{ニ}}=\sqrt{3}$

$S-T=f(a)=\dfrac{a(a^2-3)}{24}$とおいて，$f'(a)=\dfrac{a^2-1}{8}=\dfrac{(a+1)(a-1)}{8}$，$f(a)$は図３のように変化する。

したがって，$a=\text{ヌ}=1$のとき，最小値 $f(1)=\dfrac{\text{ネノ}}{\text{ハヒ}}=\dfrac{-1}{12}$をとる。

a	0		1	
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

図３

コメント：

2次関数の微分，積分の問題。微分の定義は的確に理解しておこう。(1)のような問題は基礎の理解がしっかりしていないと，ミスしやすい。(2)では垂直な直線の傾きどうしの関係は理解しておこう。
図２のような図を描いて，面積を求める図形を具体的に明らかにしよう。

第３問（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア ①

(2)　イウ -1　エ 2　オ 2　カキ -3　ク 5　ケ 4　コ 4　サ 5　シ 3

(3)　ス 3　セ 5　ソ 1　タ 1　チ 5　ツ 3　テ 2　ト 5　ナ 2　ニヌ 10　ネ 5

＜解説＞

(1)

点A(p,q)とx軸に関して対称な点Bのx座標は変化せず，y座標は正負が変わる。
したがって，点B$(p,-q)$ ①

(2)

直線ACの傾きは，$\dfrac{s-q}{r-p}$。

ACが直線$y=2x$と垂直なので，$\dfrac{s-q}{r-p}\times 2=-1$，$\therefore\ s-q=\dfrac{\text{イウ}}{\text{エ}}(r-p)=\dfrac{-1}{2}(r-p)$　①

線分ACの中点は$\left(\dfrac{p+r}{\text{オ}},\dfrac{q+s}{\text{オ}}\right)=\left(\dfrac{p+r}{2},\dfrac{q+s}{2}\right)$

中点は直線$y=2x$上にあるから，$\dfrac{q+s}{2}=p+r$　②

①，②から$r=\dfrac{\text{カキ}}{\text{ク}}p+\dfrac{\text{ケ}}{\text{ク}}q=\dfrac{-3}{5}p+\dfrac{4}{5}q$，$s=\dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}p+\dfrac{\text{シ}}{\text{サ}}q=\dfrac{4}{5}p+\dfrac{3}{5}q$

(3)

点B$(p\,,\,-q)$，点C$(r\,,\,s)$を結ぶ線分BCを1：3に内分する点D$(t\,,\,u)$は，

$$t=\frac{3p+r}{4}=\frac{ス}{セ}p+\frac{ソ}{セ}q=\frac{3}{5}p+\frac{1}{5}q$$

$$u=\frac{-3q+s}{4}=\frac{タ}{チ}p-\frac{ツ}{チ}q=\frac{1}{5}p-\frac{3}{5}q$$

$$\mathrm{OD}^2=\frac{2}{5}p^2+\frac{2}{5}q^2=\frac{2}{5}(p^2+q^2)=\frac{テ}{ト}\mathrm{OA}^2=\frac{2}{5}\mathrm{OA}^2$$

(4)

$$\mathrm{OD}^2=\frac{2}{5}\mathrm{OA}^2\ \therefore\ \mathrm{OD}=\sqrt{\frac{2}{5}}\mathrm{OA}=2\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{ナ\sqrt{ニヌ}}{ネ}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

したがって，Aが Oを中心とする半径2の円周上にあるとき，DはOを中心とする半径$\frac{2\sqrt{10}}{5}$の円の周上にある。

コメント：

一次直線の変換の問題。直線に関して対称な点どうしの関係，垂直な直線の傾きどうしの関係などの基本事項は的確に理解しておくこと。

第４問（配点 20）

＜解答＞

(1)　アイウ -16　エ 3　オカ -2　キ 4　ク 3　ケ 7　コ 1　サ 2　シ 5　ス 2

(2)　セ 1　ソ 1　タ 3　チ 3　ツ 2　テ 2　ト 3　ナニ 19　ヌ 6

＜解説＞

(1)

$P(1+2i)=(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)-5=-16-3a+b-5+(-2+4a+2b)i=0$

実数部，虚数部ともに0だから，$-16-3a+b-5=0$，$-2+4a+2b=0$

これを解いて，$a=-ク=-3$，$b=ケ=7$を得る。

したがって，$P(x)=x^3-3x^2+7x-5$　①

①を視察すると，$x=1$のときすなわち $P(1)=0$であるから，因数定理により

$$P(x)=(x-コ)(x^2-サx+シ)=(x-1)(x^2-2x+5)$$

$x^2-2x+5=0$として，$x=1\pm 2i$，したがって，$P(x)=0$の$1+2i$以外の解は，コ$=1$と$1-スi=1-2i$である。

(2)

$Q(x)=x^3+px^2+px+1=0$は異なる三つの負の実数解 α，β，γ をもつ。ただし$\alpha<\beta<\gamma$ である。$(\beta-\alpha):(\gamma-\beta)=3:2$　② を満たすとき，三つの解 α，β，γとpの値を求める。

$Q(x)=x^3+px^2+px+1$をよく見れば，$Q(-1)=0$であることがわかる。因数分解すると，

$Q(x)=x^3+px^2+px+1=(x^3+1)+px(x+1)=(x+1)(x^2-x+1)+px(x+1)$

$=(x+1)\{x^2+(p-1)x+1\}=(x+\text{セ})\{x^2+(p-\text{ソ})x+1\}$

$f(x)=x^2+(p-1)x+1=0$　③ が二つの負の実数解をもつ条件を考える。

$f(0)=1>0$だから，放物線の頂点の位置が負となることが条件である。すなわち，

$f(x)=\left(x+\dfrac{p-1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2+1$，したがって$-\dfrac{p-1}{2}<0$ かつ $-\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2+1<0$

$-\dfrac{p-1}{2}<0$ から $p>1$，$-\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^2+1<0$から$p>3$，したがって $p>\text{タ}=3$

方程式③の二つ解の積は1だから，解の一つは絶対値が1より大きく，他の解の絶対値は1より小さい。したがって，$\beta=-\text{セ}=-1$であり，αとγ は方程式③の解である。

解と係数の関係から，$\alpha+\gamma=-(p-1)$，$\alpha\gamma=1$，②から$-(1+\alpha):(\gamma+1)=3:2$

これらの関係から，$\alpha=-\dfrac{\text{ツ}}{\text{チ}}=-\dfrac{3}{2}$，$\gamma=-\dfrac{\text{テ}}{\text{ト}}=-\dfrac{2}{3}$，$p=\dfrac{\text{ナニ}}{\text{ヌ}}=\dfrac{19}{6}$である。

コメント：

3次方程式，2次方程式の解の問題。(1)では複素数解を扱う。数学の指導要領改訂によって，複素数が数学Ⅱで扱われるようになり，2015年のセンター試験から出題範囲に入った。3次方程式といっても，一つの解が与えられるので，実質2次方程式の問題である。

<総評>

第１問［１］　座標平面上の点の極座標表示と三角関数の問題。難易度はＢ－

［２］　指数方程式の問題。難易度はＢ－

第２問　2次関数の微分積分に関する問題。難易度はＢ

第３問　点と直線に関する問題。難易度はＣ

第４問　3次関数，2次関数の式の変形や解と係数の関係に関する問題。難易度はＢ

数学Ⅱ・数学Ｂ　（注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第１問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第１問に同じ

第２問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第２問に同じ

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

<解答>

(1)　ア４　イ８　ウ６　エ２　オ③

(2)　カ８　キ７　ク３　ケ２　コ３　サ２　シ１　ス２　セ１　ソ２

(3)　タ６　チ６

(4)　ツ４　テ４　ト２　ナ２　ニ８　ヌネ13

<解説>

(1)

$2^1=2=a_1$, $2^2=4=a_2=$ア, $2^3=8=a_3=$イ, $2^4=16$, $\therefore\ a_4=6=$ウ, $2^5=32$, $\therefore\ a_5=2=$エ,

$2^6=64$, $\therefore\ a_6=4$

$a_n=2a_{n-1}-\left[\dfrac{2a_{n-1}}{10}\right]\times 10$，ただし$[x]$は実数$x$の整数部を表す。

したがって$a_{j-1}=a_{k-1}$ ならば $a_j=a_k$ だから，a_n　($n=1, 2, 3, \ldots$) は　2 , 4 , 8 , 6 を繰り返す。

したがって，すべての自然数nに対して，$a_{オ}=a_{n+4}=a_n$

(2)

$b_1=1$, $b_{n+1}=\dfrac{a_n b_n}{4}$　　($n=1, 2, 3, \ldots$)　　①

①を繰り返し用いると，

$$b_{n+4}=\frac{a_{n+3}b_{n+3}}{4}=\frac{a_{n+3}}{4}\frac{a_{n+2}b_{n+2}}{4}=\frac{a_{n+3}a_{n+2}}{4^2}\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{4}=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}}{4^3}\frac{a_n b_n}{4}$$

$$=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{4^4}b_n=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^8}b_n=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^{カ}}b_n$$

(1)で明らかなように，数列a_1, a_2, a_3, a_4, ・・・は２，４，８，６，を繰り返すので，

$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n=6\times 8\times 4\times 2=3\cdot 2^7=3\cdot 2^{キ}$

したがって，$b_{n+4}=\dfrac{ク}{ケ}b_n=\dfrac{3}{2}b_n$　②

①から，$b_2=\dfrac{a_1b_1}{4}=\dfrac{2\times 1}{4}=\dfrac{1}{2}$，$b_3=\dfrac{a_2b_2}{4}=\dfrac{4}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$b_4=\dfrac{a_3b_3}{4}=\dfrac{8}{4}\times\dfrac{1}{2}=1$

②を繰り返し用いれば，

$$b_{4k-3}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)-3}=\frac{3}{2}\frac{3}{2}b_{4(k-2)-3}=\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_1=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{コ}{サ}\right)^{k-1}$$

$$b_{4k-2}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)-2}=\frac{3}{2}\frac{3}{2}b_{4(k-2)-2}=\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\frac{シ}{ス}\left(\frac{コ}{サ}\right)^{k-1}$$

$$b_{4k-1}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)-1}=\frac{3}{2}\frac{3}{2}b_{4(k-2)-1}=\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_3=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\frac{セ}{ソ}\left(\frac{コ}{サ}\right)^{k-1}$$

$$b_{4k}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)}=\frac{3}{2}\frac{3}{2}b_{4(k-2)}=\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_4=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\left(\frac{コ}{サ}\right)^{k-1}$$

(3)

$S_n=\sum_{j=1}^{n}b_j$，(2)の結果を用いれば，

$$S_{4m}=\sum_{j=1}^{4m}b_j=\sum_{k=1}^{m}(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k})=3\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$

$$=3\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^m}{1-\frac{3}{2}}=6\left(\frac{3}{2}\right)^m-6=タ\left(\frac{コ}{サ}\right)^m-チ$$

(4)

(2)の結果を用いれば,

$$b_{4k-3}b_{4k-2}b_{4k-1}b_{4k}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(k-1)}=\frac{1}{ツ}\left(\frac{コ}{サ}\right)^{テ(k-1)}$$

$$T_{4m}=(b_1b_2b_3b_4)(b_5b_6b_7b_8)\cdots(b_{4m-3}b_{4m-2}b_{4m-1}b_{4m})$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^8\cdots\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-1)}=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{4+8+\ldots+4(m-1)}$$

$$=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{2m^2-2m..}=\frac{1}{ツ^m}\left(\frac{コ}{サ}\right)^{トm^2-ナm..}$$

ここで, $4+8+\cdots+4(m-1)=4\times\frac{(1+m-1)(m-1)}{2}=2m(m-1)=2m^2-2m$

$$T_{10}=(b_1b_2b_3b_4)(b_5b_6b_7b_8)\,b_9b_{10}=T_{4\times2}b_{4\times3-3}b_{4\times3-2}=\frac{1}{4^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{4..}\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3^8}{2^{13}}=\frac{3^{ニ}}{2^{ヌネ}}$$

コメント：

数列の問題。受験生の数学的センス, 思考力, 計算力を問う, なかなか良く考えられた問題である。とはいえ, 限られた時間の中で考えるので, 直感的な判断で解答方針を定めなければならず, 日頃の勉強量がものをいうかも知れない。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア 1　イ 3　ウ 2　エ －　オ 1　カ 2　キ 0　ク 5　ケ 4　コ 7　サ 3
　シス 21　セ 4　ソ 7　タ 3　チツ 24

(2)　テ 7　ト 9　ナ 1　ニ 3　ヌネ −7　ノハ 36　ヒ 7　フ 9　ヘホ 21

＜解説＞

(1)

図１のような図を描いて考える。$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{ア}{イ}\vec{a}+\frac{ウ}{イ}\vec{b}$

$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$と表すと,

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\vec{b}-\vec{a}$, したがって $\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t(\vec{b}-\vec{a})=-t\vec{a}+\vec{b}=エt\vec{a}+\vec{b}$

ここで, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle OAB=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=\frac{1}{2}=\frac{オ}{カ}$,

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OQ}$だから, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0=キ$,

すなわち$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)(-t\vec{a}+\vec{b})=-\frac{1}{3}t\vec{a}^2+\frac{1}{3}(1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{b}^2=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{6}(1-2t)+\frac{2}{3}=0$

したがって，$t=\frac{5}{4}=\frac{ク}{ケ}$

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\overrightarrow{OP}^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\vec{a}^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{b}^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{コ}}{サ}$$

$$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\overrightarrow{OQ}^2}=\sqrt{\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{16}\vec{a}^2-\frac{10}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{5}{4}+1}=\frac{\sqrt{21}}{4}=\frac{\sqrt{シス}}{セ}$$

よって三角形OPQの面積S_1は，$S_1=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{3}\frac{\sqrt{21}}{4}=\frac{ソ\sqrt{タ}}{チツ}=\frac{7\sqrt{3}}{24}$

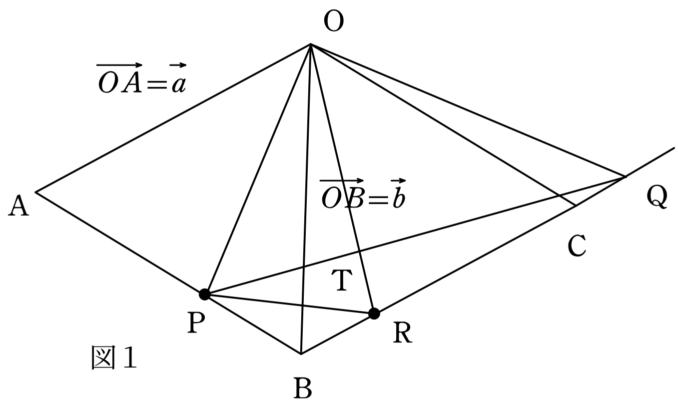

図１

(2)

$\overrightarrow{OT}=r\overrightarrow{OR}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}$

(1)から，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OQ}=-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}$

また$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}$

したがって，$r\left(\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}\right)=(1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+s\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{19}{4}s\right)\vec{a}+\frac{1}{3}(2+s)\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$の係数は左辺，右辺で等しいから，$-\frac{1}{4}r=\frac{1}{3}\left(1-\frac{19}{4}s\right)$，$r=\frac{1}{3}(2+s)$

$\therefore r=\frac{テ}{ト}=\frac{7}{9}$，$s=\frac{ナ}{ニ}=\frac{1}{3}$

よって，$\overrightarrow{OT}=r\overrightarrow{OR}=\frac{7}{9}\left(\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}\right)=\frac{-7}{36}\vec{a}+\frac{7}{9}\vec{b}=\frac{ヌネ}{ノハ}\vec{a}+\frac{ヒ}{フ}\vec{b}$

次に，$\frac{\text{三角形}OPT\text{の面積}}{\text{三角形}PRT\text{の面積}}=\frac{OT}{TR}=\frac{OT}{OR-OT}=\frac{\frac{7}{9}OR}{OR-\frac{7}{9}OR}=\frac{7}{2}$

$\overrightarrow{OT}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OQ}$から，TはPQを1：2に内分する点

したがって，$\frac{\text{三角形}OPQ\text{の面積}}{\text{三角形}OPT\text{の面積}}=\frac{PQ}{PT}=3$

$$\frac{\text{三角形}OPQ\text{の面積}}{\text{三角形}PRT\text{の面積}}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\text{三角形}OPQ\text{の面積}}{\text{三角形}OPT\text{の面積}}\times\frac{\text{三角形}OPT\text{の面積}}{\text{三角形}PRT\text{の面積}}=3\times\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$$

$S_1 : S_2 = 21 : 2 =$ へホ：2

コメント：

　ベクトルを用いた図形の辺長や面積の関係を求める問題。ベクトルの加算，減算，内積等の演算を図形と関連付けながら的確にできること。対辺の内分点や外分点のベクトルを両辺のベクトルの和によって表すのは常套的方法だから，習熟していること。

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア 1　イウ 35　エオ 12　カキ 18　ク 4　ケコ 12　サ 7　シス 24　セソ 49

(2)　タ ③

(3)　チ 1　ツ 3　テ 0　ト 5

＜解説＞

(1)

　7個の球から3個の球を取り出す場合の数は，$_7C_3 = \dfrac{7!}{(7-3)!3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35$

3個の球を取り出したとき，W個が白である場合の数は，赤球の個数は$(3-W)$個だから，$_4C_W \cdot {}_3C_{3-W}$

したがって，

$$P(W=0) = \frac{_4C_0 \cdot {}_3C_3}{35} = \frac{1}{35} = \frac{\text{ア}}{\text{イウ}},\quad P(W=1) = \frac{_4C_1 \cdot {}_3C_2}{35} = \frac{4\times 3}{35} = \frac{12}{35} = \frac{\text{エオ}}{\text{イウ}}$$

$$P(W=2) = \frac{_4C_2 \cdot {}_3C_1}{35} = \frac{6\times 3}{35} = \frac{18}{35} = \frac{\text{カキ}}{\text{イウ}},\quad P(W=3) = \frac{_4C_3 \cdot {}_3C_0}{35} = \frac{4\times 1}{35} = \frac{4}{35} = \frac{\text{ク}}{\text{イウ}}$$

　期待値（平均）$E = \displaystyle\sum_{W=0}^{3} WP(W) = \frac{12}{35} + 2\times\frac{18}{35} + 3\times\frac{4}{35} = \frac{12}{7} = \frac{\text{ケコ}}{\text{サ}}$

　分散は$(\text{個数}-\text{平均})^2$の期待値であるから，

$$\text{分散} = \sum_{W=0}^{3}(W-E)^2P(W) = \left\{\left(0-\frac{12}{7}\right)^2\frac{1}{35} + \left(1-\frac{12}{7}\right)^2\frac{12}{35} + \left(2-\frac{12}{7}\right)^2\frac{18}{35} + \left(3-\frac{12}{7}\right)^2\frac{4}{35}\right\}$$

$$= \frac{24}{49} = \frac{\text{シス}}{\text{セソ}}$$

　平均，分散の定義式は的確に理解していなければならない。

(2)

　添付の標準正規分布表を参照する。確率変数Zが標準正規分布に従うので，

$P(-\text{タ} \leqq Z \leqq \text{タ})$は，$Z_0 = Z$に対応する表の値の2倍を示す。すると，$Z=2.58$のとき，

$P=0.4951\times 2=0.9902$と最も適切である。$Z=2.33$のとき，$P=0.4901\times 2=0.9802$である。

(3)

　標本平均を$\overline{X}$とすると，nが十分大きいとき，近似的に正規分布$N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$に従う。したがって，

確率変数$Z = \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$は近似的に標準正規分布$N(0, 1)$に従う。

確率変数Z全体の95%を含む範囲は，添付の標準正規分布表によれば，$|Z| \leqq 1.96$である。すなわち，$|Z| \leqq 1.96$である確率すなわち $P(|Z| \leqq 1.96) = 0.95$だから，

$$P(|Z| \leqq 1.96) = P\left(\left| \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \leqq 1.96 \right) = P\left(|\overline{X} - m| \leqq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 0.95$$

存在確率が95%となる$|\overline{X} - m|$の範囲が$|\overline{X} - m| \leqq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$である。

すなわち，$\overline{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$が母平均$m$の信頼度95%の区間である。

信頼区間の幅$L_1 = B - A = \left(\overline{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left(\overline{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.92 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

同様に，確率変数Z全体の99%を含む範囲は，添付の標準正規分布表によれば，$|z| \leqq 2.58$である。

信頼区間の幅$L_2 = D - C = \left(\overline{X} + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left(\overline{X} - 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + 2.58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5.16 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore \frac{L_2}{L_1} = \frac{5.16}{3.92} = 1.3 =$チ．ツ

確率変数$Z' = \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}}$は近似的に標準正規分布$N(0,\ 1)$に従う。

したがって，$P(|Z'| \leqq 1.96) = P\left(\left| \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}} \right| \leqq 1.96 \right) = P\left(|\overline{X} - m| \leqq 1.96 \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \right) = 0.95$

信頼区間の幅$L_3 = F - E = \left(\overline{X} + 1.96 \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \right) - \left(\overline{X} - 1.96 \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \right) = 1.96 \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} + 1.96 \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} = 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore \frac{L_3}{L_1} = \frac{1.96}{3.92} = 0.5 =$テ．ト

コメント：

確率統計の問題。(1)は確率の基礎的な問題。教科書に掲載されている事項を的確に理解しておこう。場合の数を数えるために必要な組み合わせの数の計算方法，平均値，分散の定義と計算方法などは基本である。(2)は標準正規分布の意味を理解していなければならない。

(3)は標本平均から母平均を推定する場合の信頼区間の考え方を問う。標本平均と母平均の差異（誤差）を$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$で除した確率変数が，標本数nが十分大きいときは，標準正規分布$N(0,\ 1)$に従うことを理解していなければならない。これらは教科書に記載に通りである。

＜総評＞

例年通りすべて，教科書の記載に応じた基本的な問題である。何度も繰り返すが，センター試験数学は，教科書を繰り返し繰り返し読んで，しっかり理解することが基本である。理解度を確かめるために，例題や過去問に取り組み，間違ったら，教科書に戻って勉強することだ。

第１問　数学Ⅱの第１問に同じ。難易度はＢ－

第２問　数学Ⅱの第２問に同じ。難易度はＢ

第３問　数列の問題。数学思考力や表現力を問う良問である。難易度はＢ＋

第４問　図形のベクトルによる取扱いの問題。難易度はＢ

第５問　確率統計の問題。(3)がやや難しいか。難易度はＢ＋

150707