平成28年度（2016年度）センター試験　数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ・Ｂ]　（100点，60分）

数　学　Ⅱ（全問必答）

第１問（配点　30）

[１]

<解答>

(1)　ア 4　イ 2　ウエ −2　オ 3

(2)　カ ②　キ ③　ク ①　ケ ①

(3)　コ 6　サ 7　シ ③　ス 3　セ 8　ソタ −2

<解説>

(1)

$$8^{\frac{5}{6}}=(2^3)^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}=\text{ア}\sqrt{\text{イ}}$$

$$\log_{27}\frac{1}{9}=\log_{27}1-\log_{27}9=-\frac{\log 9}{\log 27}=-\frac{2\log 3}{3\log 3}=\frac{-2}{3}=\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$$

(2)

$y=f(x)=2^x$,

$y=g_1(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$y=g_2(x)=\log_2 x$，$y=g_3(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$，$y=g_4(x)=\log_2\dfrac{1}{x}$ とおく。

$f(-x)=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=g_1(x)$

したがって，$y=2^x$ のグラフと $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは y 軸に関して対象，カ＝②

$y=\log_2 x$ から，$x=2^y$，ここで x と y を交換すると $y=2^x$ となる。

したがって，$y=2^x$ のグラフと $y=\log_2 x$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対象，キ＝③

$y=\log_{\frac{1}{2}} x=\dfrac{\log x}{\log_2\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 1-\log_2 2}=-\log_2 x$，$\therefore\ g_3(x)=-g_2(x)$

したがって，$y=\log_2 x$ のグラフと $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは x 軸に関して対象，ク＝①

$y=\log_2\dfrac{1}{x}=\log_2 1-\log_2 x=-\log_2 x$，$\therefore\ g_4(x)=-g_2(x)$

したがって，$y=\log_2 x$ のグラフと $y=\log_2\dfrac{1}{x}$ は x 軸に関して対象，ケ＝①

(3)

$x>0$ として，関数 $y=\left(\log_2\dfrac{x}{4}\right)^2-4\log_4 x+3$ の最小値を求める。

$t=\log_2 x$ とおけば,

$y=(\log_2 x-\log_2 4)^2-\dfrac{4\log_2 x}{\log_2 4}+3=(t-2)^2-2t+3=t^2-6t+7=t^2-$コ$t+$サ

xが$x>0$の範囲を動くとき，$\lim_{x\to 0}\log_2 x=-\infty$，$\lim_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$だから，

tのとり得る値の範囲は実数全体である。シ＝③

したがって，$y=t^2-6t+7=(t-3)^2-2$ だから，yは$t=3=$スのとき，

すなわち $x=2^3=8=$セのとき，最小値 $-2=$ソタをとる。

コメント：

(2)は種々の指数関数，対数関数の関係性を問う。x軸に関して対象なグラフとは，$y\to -y$としたときに得られる関数のグラフである。y軸に関して対象なグラフとは$x\to -x$としたときに得られる関数のグラフである。直線$y=x$に関して対象なグラフとはx，yを交換したときに得られる関数のグラフである。

［2］

＜解答＞

(1)　チ 4　ツ 4　テ 1　ト 4　ナ 3　ニ 1

(2)　ヌ 4　ネ 5　ノハ -3　ヒ 5　フ 5　ヘ 5

＜解説＞

$$\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=0 \quad ①$$

(1)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で①を満たすxの個数について考える。

①の両辺に $\sin^2 x\cos^2 x$ をかけると，

$(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin^2 x\cos^2 x+k(\sin^2 x-\cos^2 x)=(\sin^2 x\cos^2 x-k)(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$=\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k\right)\cos 2x=\left(\dfrac{\sin^2 2x}{\text{チ}}-k\right)\cos 2x=0 \quad ②$

ここで2倍角の公式，$\sin 2x=2\sin x\cos x$，$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ を用いた。

$2x=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $x=\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{\text{ツ}}$ のときは $\cos 2x=0$ だから，②はつねに成り立ち，kの値に関係なくつねに①が成り立つ。

また $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $0<\sin^2 2x\leqq 1$ であるから，$0<\dfrac{\sin^2 2x}{4}\leqq\dfrac{1}{4}$であって，

$k>\dfrac{1}{4}=\dfrac{\text{テ}}{\text{ト}}$のとき，①を満たす$x$は$\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{\text{ツ}}$ のみである。

一方，$0<k<\dfrac{1}{4}=\dfrac{\text{テ}}{\text{ト}}$のとき，②から $k=\dfrac{\sin^2 2x}{4}$，$\therefore \sin 2x=\pm 2\sqrt{k}$，

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$だから，$\sin 2x=2\sqrt{k}$，これを満たす $0<2x<\pi$ は2 個あるので，xも2 個ある。

したがって①を満たすxの個数は，$x=\dfrac{\pi}{4}$と併せて，$3=$ナ個である。

$k=\dfrac{1}{4}=\dfrac{\text{テ}}{\text{ト}}$のときは $2x=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $x=\dfrac{\pi}{4}$となって，$1=$ニ個である。

(2)　$k=\dfrac{4}{25}$ とし，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で ① を満たす x について考えよう。

② により，$\sin 2x=2\sqrt{k}=\dfrac{4}{5}=\dfrac{ヌ}{ネ}$ であるから

$\cos 2x=-\sqrt{1-\sin^2 2x}=\dfrac{-3}{5}=\dfrac{ノハ}{ヒ}$ である。

2倍角の公式により $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{5}$ であるから，

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos x>0$ を考慮して，$\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{フ}}{ヘ}$ である。

コメント：

三角関数の方程式の解とその個数に関する問題である。2倍角の公式，変数の範囲と三角関数の値の正負の関係を理解していなければならない。解の個数は k の値にかかわらず解となる $x=\dfrac{\pi}{4}$ の1個を併せることを忘れない。

第２問（配点 30）

＜解答＞

(1)　ア 4　イ 2　ウ 4　エ 4　オ 7　カキ 12　クケ −1　コ 2　サシ 25　スセ 48

(2)　ソ 1　タ 2　チ 2　ツ ①　テ 6　ト 2　ナ 6　ニ 4　ヌ 4　ネノ −1　ハ 3　ヒ 2

＜解説＞

座標平面上で，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ を C_1 とし，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を C_2 とする。

(1)　実数 a に対して，2 直線 $x=a$，$x=a+1$ と C_1，C_2 で囲まれた図形 D の面積 S は

$$S=\int_a^{a+1}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}x^2\right\}dx=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{ア}x^2+\frac{1}{イ}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{12}+\frac{x}{2}\right]_a^{a+1}=\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}=\frac{a^2}{ウ}+\frac{a}{エ}+\frac{オ}{カキ}$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^2+a+\frac{7}{3}\right)=\frac{1}{4}\left\{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{7}{3}\right\}=\frac{1}{4}\left\{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{12}\right\}$$

したがって S は $a=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{クケ}{コ}$ で最小値 $\dfrac{25}{48}=\dfrac{サシ}{スセ}$ をとる。

(2)　4点 $(a, 0)$，$(a+1, 0)$，$(a+1, 1)$，$(a, 1)$ を頂点とする正方形を R で表す。a が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき，正方形 R と(1)の図形 D の共通部分の面積を T とおく。T が最大となる a の値を求めよう。

放物線 C_1 で $y=1$ とおけば，$x^2=1$，$\therefore\ x=\pm 1$，したがって直線 $y=1$ は，C_1 と $(\pm ソ,\ 1)=(\pm 1,\ 1)$ で交わる。

放物線 C_2 で $y=1$ とおけば，$x^2=4$，$\therefore\ x=\pm 2$，したがって直線 $y=1$ は，C_2 と $(\pm タ,\ 1)=(\pm 2,\ 1)$ で交わる。

したがって，正方形 R と図形 D の共通部分が空集合にならないのは，すなわち，正方形 R と図形 D が共通部分をもつためには，直線 $y=1$ と C_2 の交点 $(\pm 2,\ 1)$ が頂点 $(a, 1)$ より右にあることが必

要である。すなわち $a \leqq 2$，したがって $0 \leqq a \leqq 2 =$ チのときである。

ソ $\leqq a \leqq$ チ，すなわち $1 \leqq a \leqq 2$ のとき，正方形 R は放物線 C_1 と x 軸の間にあり，この範囲でaが増加するとき，T は減少する（ツ）。なぜなら，頂点 $(a, 1)$ は C_1 から離れ C_2 に近づいていくのでR とD の共通部分は小さくなるからである。したがってツ＝⓪

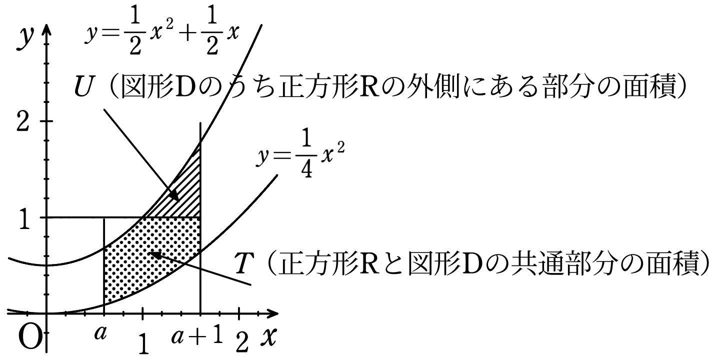

図１

したがって，Tが最大になるa の値は，$0 \leqq a \leqq 1 =$ ソの範囲にある。

$0 \leqq a \leqq 1$のとき，(1)の図形 D のうち，正方形 R の外側にある部分の面積 U は

$$U=\int_1^{a+1}\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-1\right\}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^{a+1}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}(a+1)^3-(a+1)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{\text{テ}}+\frac{a^2}{\text{ト}}$$

よって$0 \leqq a \leqq 1 =$ ソにおいて

$$T=S-U=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}\right)-\left(\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}\right)=-\frac{a^3}{6}-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}$$

$$=-\frac{a^3}{\text{ナ}}-\frac{a^2}{\text{ニ}}+\frac{a}{\text{ヌ}}+\frac{\text{オ}}{\text{カキ}} \quad ①$$

①の右辺を$f(a)=-\frac{a^3}{6}-\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}$とおく。

$f'(a)=-\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\left(a^2+a-\frac{1}{2}\right)=0$となるのは，$a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

図２のように$f(a)$は変化するから，①の右辺の増減を調べることにより，T は

$$a=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{\text{ネノ}+\sqrt{\text{ハ}}}{\text{ヒ}}$$

で最大値をとることがわかる。

a	0		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		1
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗		↘	

図２

コメント：

２次関数と図形の問題。図を描いて，題意を把握しよう。難しい問題ではないが，煩瑣なところがあるので，落ち着いて取り組もう。

第３問（配点　20）

<解答>

(1)　アイ −a　ウ２　エ a　オ１　カ２　キク −a　ケ２　コ２

(2)　サ１　シ a　ス２　セ０　ソタ −2　チ４　ツ３　テ２　ト４

(3)　ナ１　ニ４　ヌ６　ネ２

<解説>

座標平面上に4点A $(-1, 0)$，B $(1, 0)$，P $(-1, 3)$，Q $(1, 1)$がある。線分 PQ 上に点 R をとり，そのx座標をaとする。さらに，三角形 ABR の外接円をCとし，その中心を S とする。

これらを図１に示す。

(1)　線分 PQ は直線 $y=-x+2$ 上にあるから，点 Rの座標をaを用いて表すと

$(a, -a+2) = (a, \text{アイ}+\text{ウ})$

また線分AR の中点をM とする。Mの座標を a を用いて表すと

x座標は $\dfrac{-1+a}{2}$，y座標は $\dfrac{-a+2}{2}$ だから，$\left(\dfrac{a-1}{2}, \dfrac{-a+2}{2}\right) = \left(\dfrac{\text{エ}-\text{オ}}{\text{カ}}, \dfrac{\text{キク}+\text{ケ}}{\text{コ}}\right)$

(2)　外接円Cの中心 S は，線分AB の垂直二等分線と，線分 AR の垂直二等分線 l との交点である。このことを用いてS の座標を求めよう。

線分AB の垂直二等分線はy軸である。また，l は，(1)の点 M を通り，線分AR に垂直である。

AR の傾きは$\dfrac{-a+2}{a-(-1)} = \dfrac{2-a}{a+1}$だから，（$l$の傾き）×（ARの傾き）$=-1$より，

l の傾きは $\dfrac{a+1}{a-2} = \dfrac{a+\text{サ}}{\text{シ}-\text{ス}}$ である。l の方程式は $y-\dfrac{-a+2}{2} = \dfrac{a+1}{a-2}\left(x-\dfrac{a-1}{2}\right)$

$x=0$とおけば，$y = \dfrac{-2a^2+4a-3}{2a-4}$

以上のことから，S の座標は

$\left(0, \dfrac{-2a^2+4a-3}{2a-4}\right) = \left(\text{セ}, \dfrac{\text{ソタ}a^2+\text{チ}a-\text{ツ}}{\text{テ}a-\text{ト}}\right)$ であることがわかる。

(3)　円Cが点 R で直線 PQ に接するときの aの値を求めよう。

Cが直線 PQ に接するとき，直線 RS は直線 PQ に垂直だから，直線 PQ の傾き-1から直線 RS の傾きは$1 = \text{ナ}$である。

一方点 R $(a, -a+2)$と点 S$\left(0, \dfrac{-2a^2+4a-3}{2a-4}\right)$ を結ぶ直線の傾きは

$\dfrac{\dfrac{-2a^2+4a-3}{2a-4}-(-a+2)}{0-a} = 1$ だから，$a = \dfrac{4-\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\text{ニ}-\sqrt{\text{ヌ}}}{\text{ネ}}$

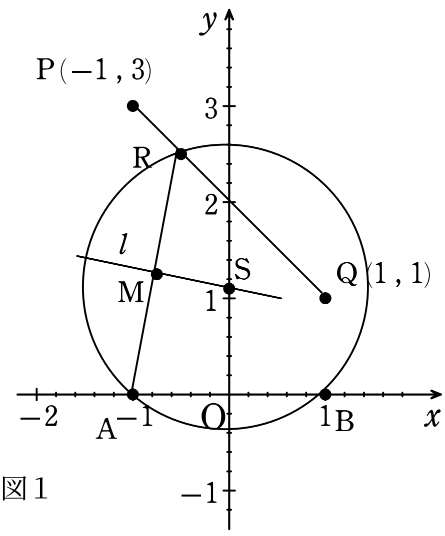

図1

コメント：

図形と関数の問題。直線の方程式，直線の傾き，直角に交わる２つの直線の傾きの関係，等々の基礎的な知識をスムーズに活用できるようにしたい。

第４問（配点 20）

＜解答＞

(1)　アイウ -96　エオ -1　カ 2　キ 6　ク 5　ケ 8　コ 2　サ 3

(2)　シ 8　ス 4　セ 8　ソ 1　タ 3　チツ -5　テ 3

＜解説＞

(1)　４次方程式 $x^4+2x^2+25=0$ の解を求めよう。

$t=x^2$ とおいて得られる２次方程式 $t^2+2t+25=0$ の判別式を D とするとき

$D=2^2-4\times1\times25=-96=$ アイウ<0

２次方程式の解は，$t=-1\pm2\sqrt{6}\,i=$ エオ$\pm$カ$\sqrt{キ}\,i$

２乗すると虚数 t になる複素数を求める代わりに，以下のように考える。

上の４次方程式を，正の実数 A，B により $(x^2+A)^2-Bx^2=x^4+(2A-B)x^2+A^2=0$と変形すると

$A^2=25$，$\therefore A=5=$ ク，$2A-B=2$，$\therefore B=8=$ ケ

したがって，等式

$(x^2+A)^2-Bx^2=(x^2+\sqrt{B}\,x+A)(x^2-\sqrt{B}\,x+A)=0$ を利用すると，

４次方程式 $x^4+2x^2+25=0$ の解は

$x^2+\sqrt{B}\,x+A=x^2+\sqrt{8}\,x+5=(x+\sqrt{2})^2+3=0$から，$x=-\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\,i=-\sqrt{コ}\pm\sqrt{サ}\,i$

$x^2-\sqrt{B}\,x+A=x^2-\sqrt{8}\,x+5=(x-\sqrt{2})^2+3=0$から，$x=\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\,i=\sqrt{コ}\pm\sqrt{サ}\,i$

(2)　q，r を実数として，整式 $P(x)=x^3-2x^2+qx+2r$ を考える。３次方程式 $P(x)=0$ の解が-2 と二つの自然数 α，$\beta\,(\alpha<\beta)$であるとき，α，β と q，r を求める。

$P(-2)=0$ であるから，$r=q+8=q+$シ，したがって因数定理により

$P(x)=(x+2)(x^2-4x+q+8)=(x+2)(x^2-$ス$x+q+$セ$)$

　ここで，２次方程式 $x^2-4x+q+8=0$

は二つの自然数 α，β（$\alpha<\beta$）を解にもつから，２次方程式の解と係数の関係により，

$\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=q+8$

これを満足する自然数 α，β（$\alpha<\beta$）は，

$\alpha=1=$ソ，$\beta=3=$タであり，$q=\alpha\beta-8=-5=$チツ，$r=q+8=3=$テ

コメント：

４次方程式，３次方程式，２次方程式の解に関する問題。因数定理や解と係数の関係等を利用する。複素数解を扱う。

＜総評＞

第１問［１］　指数関数，対数関数の問題。難易度Ｃ

［２］　三角関数を変数とする方程式の問題。難易度Ｂ

第２問　放物線と直線によって形成される図形の面積に関する問題。難易度はＢ＋

第３問　関数と図形に関する問題。直線どうしが直交する条件等は理解しておくこと。難易度はＢ－

第４問　因数定理や解と係数の関係等を利用して２，３，４次方程式を扱う。複素数解を含む。
難易度はＢ

数学Ⅱ・数学Ｂ

（注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第１問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第１問に同じ

第２問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第２問に同じ

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア 5　イ 6　ウエ 22

(2)　オ 1　カ 2　キ 3　ク 2　ケ 2　コ 1　サ 2　シ 1　ス 2　セソ 13　タチ 15

(3)　ツ 1　テ 2　ト 1　ナ 2　ニ 1　ヌ 4　ネ 1　ノ 4　ハヒフ 507　ヘホ 10

＜解説＞

真分数を分母の小さい順に，分母が同じ場合には分子の小さい順に並べてできる数列

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，…

を $\{a_n\}$ とする。

$a_n=\dfrac{l}{k}$　$(2\leqq k,\ l=1,2,...,k-1)$　とおく。

$n=\sum_{j=2}^{k}(j-1)+l=\dfrac{k(k-1)}{2}+l$

(1)

暗算で考えよう。$k=2$では項の数は1 項，$k=3$では2 項，$k=4$では3 項，$k=5$では4 項，$k=6$では5 項だから，$k=6$までの項数は15 項，したがって $a_{15}=\dfrac{5}{6}=\dfrac{ア}{イ}$

$k=7$までの項数は，$k=7$では6 項だから，21 項

したがって分母に初めて8が現れる項は$a_{22}=a_{ウエ}$である。

(2)

k を2 以上の自然数とする。数列$\{a_n\}$において，$\dfrac{1}{k}$ が初めて現れる項を第M_k 項とし，$\dfrac{k-1}{k}$ が初めて現れる項を第N_k 項とする。

k に対応する項の数は $(k-1)$ 項だから，

$M_k=\sum_{j=2}^{k-1}(j-1)+1=\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{3}{2}k+2=\dfrac{オ}{カ}k^2-\dfrac{キ}{ク}k+ケ$

$N_k=M_k+(k-2)=\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{1}{2}k=\dfrac{コ}{サ}k^2-\dfrac{シ}{ス}$

この関係を利用して，a_{104} の値を求める。

$M_k\leqq 104\leqq N_k$ だから，$\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{3}{2}k+2\leqq 104\leqq\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{1}{2}k$

$\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{3}{2}k+2\leqq 104$ から，$k\leqq\sqrt{206.25}+1.5$

$104\leqq\dfrac{1}{2}k^2-\dfrac{1}{2}$から，$k\geqq\sqrt{208.25}+0.5$

したがって，$\sqrt{208.25}+0.5\leqq k\leqq\sqrt{206.25}+1.5$，したがって $14.9<k<15.9$

これを満たす自然数は $k=15$ で，したがって$M_k=92$，$N_k=105$

よって，$a_{104}=\dfrac{13}{15}=\dfrac{セソ}{タチ}$

(3)

k を 2 以上の自然数とする。数列$\{a_n\}$の第 M_k 項から第N_k 項までの和は

$\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{k}+\cdots+\dfrac{k-1}{k}=\dfrac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}j=\dfrac{1}{2}k-\dfrac{1}{2}=\dfrac{ツ}{テ}k-\dfrac{ト}{ナ}$

したがって，数列$\{a_n\}$の初項から第N_k 項までの和は$\dfrac{1}{2}\sum_{i=2}^{k}(i-1)=\dfrac{1}{4}k^2-\dfrac{1}{4}k=\dfrac{ニ}{ヌ}k^2-\dfrac{ネ}{ノ}k$

よって，$\sum_{n=1}^{103}a_n=\sum_{n=1}^{105}a_n-a_{104}-a_{105}=\dfrac{1}{4}\times15^2-\dfrac{1}{4}\times15-\dfrac{13}{15}-\dfrac{14}{15}=\dfrac{507}{10}=\dfrac{ハヒフ}{ヘホ}$

コメント：

(1)では項の数15 に対応する k，l を求める。暗算でできる範囲だから，k に対応する項の数を数えて，求めよう。(2)ではk に対応する項の先頭の項 $(l=1)$ までの項の数，最後の項 $(l=k-1)$ までの項の数を

求める。数列の和の問題となる。自然数kが求まれば，M_k，N_kが求まる。$N_k=105$に対応する$l=k-1=14$だから，a_{104}に対応する$l=14-(105-104)=13$であることがわかる。

(3)では，$\sum_{n=1}^{105} a_n$がわかるので，$\sum_{n=1}^{103} a_n = \sum_{n=1}^{105} a_n - a_{104} - a_{105}$として計算することがポイントである。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア３　イ２　ウ３　エ１　オ２　カ１　キ２　ク１　ケ３　コ１　サ２　シ２

(2)　ス０　セソ90　タ２　チ１　ツ３　テ２　ト３　ナ２　ニ２　ヌ３

＜解説＞

四面体OABCにおいて，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=60°$であるとする。また，辺OA上に点Pをとり，辺BC上に点Qをとる。以下，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおく。

(1)

$0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 1$であるような実数s，tを用いて$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$と表す。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°=3\times 2\times\frac{1}{2}=3$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60°=3\times 2\times\frac{1}{2}=3$，$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=3=$ア，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°=2\times 2\times\frac{1}{2}=2=$イ

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-s\vec{a}$

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PQ}|=\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-s\vec{a}\}^2$

$=(1-t)^2\vec{b}\cdot\vec{b}+t^2\vec{c}\cdot\vec{c}+s^2\vec{a}\cdot\vec{a}+2(1-t)t\vec{b}\cdot\vec{c}-2st\vec{c}\cdot\vec{a}-2s(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=4(1-t)^2+4t^2+9s^2+4(1-t)t-6st-6s(1-t)=9s^2-6s+4t^2-4t+4$

$=(3s-1)^2+(2t-1)^2+2=($ウ$s-$エ$)^2+($オ$t-$カ$)^2+$キ

したがって，$|\overrightarrow{PQ}|$が最小となるのは，$s=\frac{1}{3}=\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$，$t=\frac{1}{2}=\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$のときであり，

このとき，$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2}=\sqrt{\text{シ}}$となる。

(2)

三角形ABCの重心をGとする。$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2}$のとき，三角形GPQの面積を求めよう。

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PQ}=\vec{a}\cdot\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-s\vec{a}\}=\vec{a}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3=0=$ス，

$\therefore\ \angle APQ=90°=$セソ°

したがって，三角形APQの面積は$\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}(\mathrm{OA}-\mathrm{OP})\sqrt{2}=\frac{1}{2}(3-1)\sqrt{2}=\sqrt{2}=\sqrt{\text{タ}}$

また$t=\frac{1}{2}$から，QはBCの中点だから，点A，G，Qは１直線上にある。

重心の性質から，AG：GQ=2：1だから，

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}=\frac{チ}{ツ}\overrightarrow{OA}+\frac{テ}{ト}\overrightarrow{OQ}$

点G は線分AQ を2：1=ナ：1 に内分する点である。

以上のことから，三角形 GPQ の面積は$\frac{1}{3}\times$（三角形 APQ の面積）$=\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{ニ}}{ヌ}$

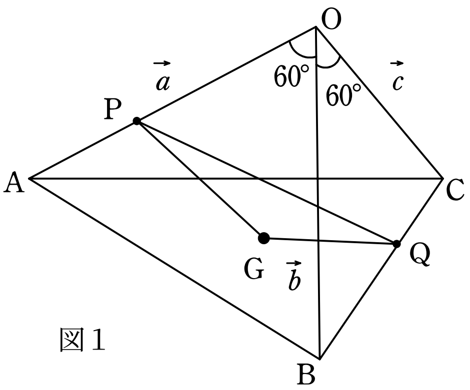

図１

コメント：

ベクトルを用いた図形の辺長や面積の関係を求める問題。ベクトルの加算，減算，内積等の演算を図形と関連付けながら的確にできること。対辺の内分点や外分点のベクトルを両辺のベクトルの和によって表すのは常套的方法だから，習熟していること。昨年も第３問がこの分野だった。

三角形の重心の性質を理解しておこう。

(1)で $|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PQ}|=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}}{\cos\theta}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-s\vec{a}\}^2$であることを補足する。

このとき当然 $\theta=0$である。

第５問（選択問題）（配点　20）

<解答>

(1)　ア 2　イ 2　ウ 6　エ 4　オ 9　カ 4　キ 1

(2)　ク －　ケ 4　コ ⓪　サ ①　シ ⑨　ス ⑧

(3)　セソタ 300　チツ 15　テ 2　トナ 00　ニヌネ 023

(4)　ノハヒ 380　フヘホ 420

<解説>

n を自然数とする。原点O から出発して数直線上をn 回移動する点A を考える。点A は，1回ごとに，確率 p で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。

ここで，$0<p<1$である。n 回移動した後の点 A の座標をXとし，n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を Y とする。

(1)

$p=\frac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 Xのとり得る値を小さい順に考える。

最も小さい値は，（負，負）と移動した場合で，$X=-1+(-1)=-2=-ア$

次は（正，負）あるいは（負，正）と移動した場合で，$X=3-1=-1+3=2=イ$

最も大きい値は，（正，正）と移動した場合で，$X=3+3=6=$ ウ

$X=-2$ をとる確率は

（場合の数）×（負移動の確率）×（負移動の確率）$=1\times(1-p)\times(1-p)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}=\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$

$X=2$をとる確率は，同様に，$2p(1-p)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}=\frac{\text{カ}}{\text{オ}}$

$X=6$をとる確率は，同様に，$1\times p\times p=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}=\frac{\text{キ}}{\text{オ}}$

(2)

n 回移動したとき，正の向きに $3Y$，負の向きに$-(n-Y)$ 移動するので，X と Y の間に

$X=3Y-(n-Y)=-n+4Y=$ ク$n+$ケY　の関係が成り立つ。

確率変数 Y は確率 p の2 項分布に従うから， n 回の移動によるYの期待値は $\overline{Y_n}=np=$ コ$=$ ⓪

Yの分散は$np(1-p)=$ ①$=$サ

確率変数の変換によるXの平均は $\overline{X_n}=4\overline{Y_n}-n=4np-n=$ ⑨$=$シ

同様に X の分散は $4^2np(1-p)=16np(1-p)=$ ⑧$=$ス

(3)

$p=\frac{1}{4}$のとき，1200 回移動した後の点Aの座標Xが120以上になる確率の近似値を求めよう。

(2)により，Yの平均は $np=1200\times\frac{1}{4}=300=$ セソタ

標準偏差は$\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{300\times\frac{3}{4}}=15=$チツ

$X=-1200+4Y$だから，$X\geqq 120$とすれば,

$Y=\frac{X}{4}+300\geqq\frac{120}{4}+300=330$，$\therefore\ \frac{Y-300}{15}\geqq 2.00=$ テ．トナ

したがって求める確率は，$P(X\geqq 120)=P\left(\frac{Y-300}{15}\geqq 2.00\right)=P\left(\frac{Y-\text{セソタ}}{\text{チツ}}\geqq\text{テ．トナ}\right)$

いま，標準正規分布に従う確率変数をZとすると，$n=1200$ は十分に大きいので， 2 項分布が近似的に正規分布に等しくなるので，求める確率の近似値は正規分布表から

$P(Z\geqq$ テ．トナ$)=P(Z\geqq 2.00)=0.5-0.4772=0.0228\fallingdotseq 0.023=0.$ニヌネ

すなわち添付の正規分布表において，$z_0=2.00$に対応する値が0.4772となっているということは,

$z_0\leqq 2.00$になる確率が0.4772ということである。

$z_0\geqq 0.00$の確率は 0.5 だから，$P(Z\geqq 2.00)=0.5-0.4772$ となる。

(4)

p の値がわからないとする。2400 回移動した後の点Aの座標が$X=1440$ のとき，p に対する信頼度 95%の信頼区間を求めよう。

n 回移動したときにY がとる値をyとし $r=\frac{y}{n}$とおく。nが十分に大きいならば，確率変数 $R=\frac{Y}{n}$ は近似的に平均p，分散 $\frac{p(1-p)}{n}$ の正規分布に従う。

$n=2400$ は十分に大きいので，このことを利用し分散を $\dfrac{r(1-r)}{n}$ で置き換える。

$Y=\dfrac{1}{4}(n+X)$ だから，

$y=\dfrac{1}{4}(2400+1440)=960$，$r=\dfrac{y}{n}=\dfrac{960}{2400}=0.4$ ，$\dfrac{r(1-r)}{n}=\dfrac{0.4(1-0.4)}{2400}=0.0001$

標準偏差は$\sigma=\sqrt{\dfrac{r(1-r)}{n}}=0.01$，確率変数$\left(\dfrac{R-p}{\sigma}\right)=\left(\dfrac{R-p}{0.01}\right)$は標準正規分布に従うので，

$\left(\dfrac{R-p}{0.01}\right)$が 95%まで存在する範囲は正規分布表により

$\left|\dfrac{R-p}{0.01}\right|\leqq 1.96$ ，$R-0.0196\leqq p\leqq R+0.0196$ ，ここで$R=r=0.4$とすれば，

$\therefore\ 0.3804\leqq p\leqq 0.4196$，$\therefore$ 0.ノハヒ$\leqq p\leqq$ 0.フヘホ，ノハヒ$=380$，フヘホ$=420$

このことは，pの存在する確率が95%の範囲が$0.3804\leqq p\leqq 0.4196$ということである。すなわち $0.3804\leqq p\leqq 0.4196$であることが95%の確からしさであることを示す。

コメント：

(1)，(2)では２項分布における確率変数の平均，分散，また確率変数の変換による平均，分散の変化を理解していること。これらは数学Ｂの教科書に記載されている基本的事項だから，例題や練習問題を解いて，理解しておきたい。

(3)では標準正規分布表の読み方を理解していなければならない。

(4)では信頼度の概念，平均値の推定とその信頼度の求め方を理解していなければならない。教科書に記載されていることを，反復理解しておけば大丈夫である。

＜総評＞

例年通りすべて，教科書の記載に応じた基本的な問題である。センター試験数学は，教科書を繰り返し繰り返し読んで，しっかり理解することが基本である。解答のスピードが求められ，スピードの差が点数の差となって表れる場合が多いので，例題や過去問に反復して取り組み，習熟することが重要だと思う。

第１問　数学Ⅱの第１問に同じ。

第２問　数学Ⅱの第２問に同じ。

第３問　昨年同様，数列の問題。良く工夫された面白い問題。難易度はＢ

第４問　図形のベクトルによる取扱いの問題。難易度はＢ

第５問　確率統計の問題。(4)がやや難しいか。難易度はＢ＋

170215