平成29年度（2017年度）センター試験　数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ・Ｂ]　（100点，60分）

数　学　Ⅱ（全問必答）

第１問（配点　30）

［１］

＜解答＞

アイ 17　ウエ 15　オ 4　カ 4　キ 5　ク 1　ケ 3　コ 2　サ 5　シ 5　ス －　セ 3　ソ 3

＜解説＞

連立方程式

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{4}{15} \quad ①$$

$$\cos\alpha\cos\beta = -\frac{2\sqrt{15}}{15} \quad ②$$

ただし，$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$であり，$\alpha < \beta$かつ

$$|\cos\alpha| \geqq |\cos\beta| \quad ③$$

とする。このとき，$\cos\alpha$と$\cos\beta$の値を求めよう。

2倍角の公式を①に適用すると，

$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1 = \frac{4}{15}$，$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{17}{15} = \frac{\text{アイ}}{\text{ウエ}}$

また②から，$\cos^2\alpha\cos^2\beta = \frac{4}{15} = \frac{\text{オ}}{15}$

$\cos^2\alpha$と$\cos^2\beta$は2次方程式

$x^2 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)x + \cos^2\alpha\cos^2\beta = x^2 - \frac{17}{15}x + \frac{4}{15} = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right) = 0$の解だから，

条件③を用いると，$\cos^2\alpha = \frac{4}{5} = \frac{\text{キ}}{\text{カ}}$，$\cos^2\beta = \frac{1}{3} = \frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$

よって，②と条件$0 \leqq \alpha \leqq \pi$，$0 \leqq \beta \leqq \pi$，$\alpha < \beta$から

$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\text{コ}\sqrt{\text{サ}}}{\text{シ}}$，$\cos\beta = \frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{\text{ス}\sqrt{\text{セ}}}{\text{ソ}}$

コメント：

2次方程式の解と係数の関係を用いて，$\cos^2\alpha$と$\cos^2\beta$の値を求めることに気づくこと。余弦関数は，$\frac{1}{2}\pi \leqq \beta \leqq \pi$で$-1 \leqq \cos\beta \leqq 0$となることに注意すること。②から，$\cos\alpha$と$\cos\beta$の正負は逆である。

［2］
＜解答＞

タ 0　チ 1　ツ 3　テ 1　ト 3　ナ 1　ニ 1　ヌ 8　ネ 3　ノ 6　ハ 6　ヒ 2　フ 6　ヘ ⑥

＜解説＞

座標平面上に点A$\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$をとり，関数$y=\log_2 x$のグラフ上に2点B$(p,\log_2 p)$，C$(q,\log_2 q)$をとる。線分ABを1：2に内分する点がCであるとき，p，qの値を求めよう。

真数の条件により，$p>0=$タ，$q>0=$タである。ただし，対数$\log_a b$に対し，aを底といい，bを真数という。

線分ABを1：2に内分する点の座標は，pを用いて

$$\left(\frac{2\times 0+1\times p}{1+2},\frac{2\times 3/2+1\times \log_2 p}{1+2}\right)=\left(\frac{1}{3}p,\frac{1}{3}\log_2 p+1\right)=\left(\frac{チ}{ツ}p,\frac{テ}{ト}\log_2 p+ナ\right)$$

と表される。これがCの座標と一致するので

$$\frac{チ}{ツ}p=\frac{1}{3}p=q \quad ④$$

$$\frac{テ}{ト}\log_2 p+ナ=\frac{1}{3}\log_2 p+1=\log_2 q \quad ⑤$$

が成り立つ。

⑤を変形すると，$\log_2 p=3\log_2 q-3=\log_2 q^3-\log_2 2^3=\log_2\left(\dfrac{q}{2}\right)^3$，$\therefore\ p=\dfrac{1}{8}q^3=\dfrac{ニ}{ヌ}q^{ネ}$　⑥

④と⑥を連立させた方程式を解いて，$p>0$，$q>0$に注意すると

$p=3q=\dfrac{1}{8}q^3$から，$q=2\sqrt{6}=ヒ\sqrt{フ}$，$p=6\sqrt{6}=ノ\sqrt{ハ}$

また，Cのy座標$\log_2(2\sqrt{6})$の値を，小数第2位を四捨五入して小数第１位まで求める。

$$\log_2(2\sqrt{6})=\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2 6=1+\frac{1}{2}(\log_2 2+\log_2 3)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}=1.5+\frac{1}{2}\times\frac{0.4771}{0.3010}$$

$$=1.5+\frac{1}{2}\times 1.55=2.275\fallingdotseq 2.3=⑥=ヘ$$

コメント：

2点を内分する点の座標に関する公式は覚えておくこと。対数演算の基礎を理解していなければならない。

第２問（配点 30）

＜解答＞

(1)　ア 2　イ 1　ウ 2　エ 2　オ 1　カ 2　キ 1　ク 1　ケ 1　コ 4　サ 2　シ 4　ス 4　セ 2

(2)　ソ 0　タ 1　チ 2　ツ 2　テ 3　ト 2　ナ 3　ニ 8　ヌネ 27

(3)　ノ 7　ハ 3　ヒ 3　フ a　ヘ ②

＜解説＞

Oを原点とする座標平面上の放物線$y=x^2+1$をCとし，点$(a\ ,\ 2a)$をPとする。

(1)　点Pを通り，放物線Cに接する直線の方程式を求めよう。

$y'=2x$，C上の点$(t\ ,\ t^2+1)$における接線の傾きは$2t$だから，

C上の点$(t\ ,\ t^2+1)$における接線の方程式は

$y-(t^2+1)=2t(x-t)$，$\therefore\ y=2tx-t^2+1=$アtx$-t^2+$イ

この直線がPを通るとすると，$2a=2ta-t^2+1$だから，tは方程式

$t^2-2at+2a-1=(t-2a+1)(t-1)=t^2-$ウ$at+$エ$a-1=0$を満たすから，

$t=2a-1=$カ$a-$キ，$1=$クである。よって，$2a-1≒1$のとき，すなわち

$a≒1=$ケのとき，Pを通る接線は2本あり，それらの方程式は

$y=2tx-t^2+1=2(2a-1)x-(2a-1)^2+1=(4a-2)x-4a^2+4a=($コ$a-$サ$)x-$シ$a^2+$ス$a$　①

と

$y=2tx-t^2+1=2x=$セx

である。

(2)　(1)の方程式①で表される直線をlとする。図１のような図を描いて考える。

lとy軸との交点を$\mathrm{R}(0\ ,\ r)$とすると，

①で$x=0$とおけば，$r=-4a^2+4a=-$シa^2+スaである。$r>0$となるのは，

ソ$=0<a<1=$タのときであり，このとき，三角形OPRの面積Sは

$$S=\frac{1}{2}(-4a^2+4a)\times a=2(a^2-a^3)=\text{チ}(a^{\text{ツ}}-a^{\text{テ}})$$

となる。

$0<a<1$のとき，$S'(a)=2a(2-3a)$で，図２のように$S(a)=2(a^2-a^3)$は変化するので，

Sは$a=\dfrac{2}{3}=\dfrac{\text{ト}}{\text{ナ}}$で最大値$S\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{27}=\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌネ}}$をとる。

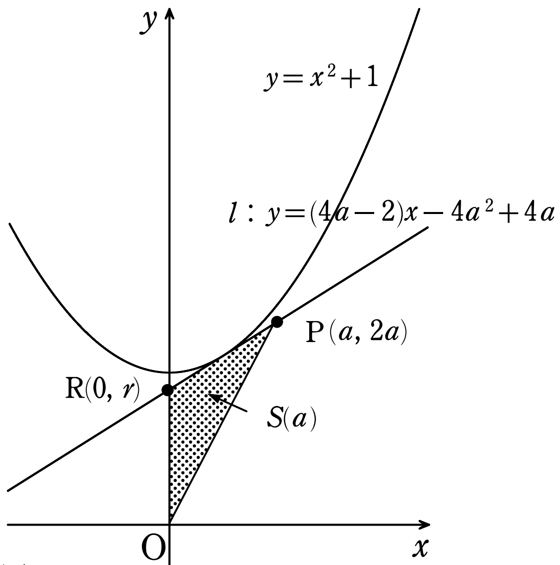

図１

a	0		2/3	
$S'(a)$		+	0	−
$S(a)$		↗		↘

図２

(3)　$0<a<1$のとき，放物線Cと(2)の直線lおよび２直線$x=0$，$x=a$で囲まれた図形の面積をTとすると，

$$T=\int_0^a\{x^2+1-(4a-2)x-(-4a^2+4a)\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3-(2a-1)x^2+(2a-1)^2x\right]_0^a$$

$$=\frac{7}{3}a^3-3a^2+a=\frac{ノ}{ハ}a^3-ヒa^2+フ$$

$\frac{2}{3}\leqq a<1$のとき，$T'(a)=7a^2-6a+1>0$だから，Tは増加する。②

コメント：

2次曲線の接線，それが作る図形の面積等の問題で，図１のような略図を描いて，題意を正確に把握すること。

第３問（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア３　イ４　ウ３

(2)　エオ 10

(3)　カ４　キ６　クケ 25　コサ −4　シ３　ス３

(4)　セ３　ソ４　タ８　チ２

(5)　ツテト −12　ナ５　ニ４　ヌネ −4　ノ５　ハ８

＜解説＞

座標平面上に2点A (0, 3)，B (8 , 9)をとる。

(1) 2点A，Bを通る直線の方程式は$y-3=\frac{9-3}{8-0}(x-0)$，$\therefore\ y=\frac{3}{4}x+3=\frac{ア}{イ}x+ウ$

(2) 線分ABの長さは$\sqrt{(8-0)^2+(9-3)^2}=\sqrt{100}=10=$エオ

(3) 線分ABを直径とする円Cの方程式は，ABの中点(4 , 6)が円の中心で，半径が5だから

$$(x-カ)^2+(y-キ)^2=(x-4)^2+(y-6)^2=5^2=25=クケ,$$

また，AにおけるCの接線の方程式は，線分ABに垂直だから，傾きは$-\frac{1}{3/4}=-\frac{4}{3}$，したがって

$$y-3=-\frac{4}{3}x,\ \therefore\ y=\frac{-4}{3}x+3=\frac{コサ}{シ}x+ス\quad ①$$

(4) 三角形ABPの面積が20である点Pの軌跡は，AB=10だから，直線ABと平行で距離が4の2直線

その直線を$y=\frac{3}{4}x+t$，すなわち$3x-4y+4t=0$とおく。

円の中心からの距離は$4=\frac{|3\times4-4\times6+4t|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|4t-12|}{5}$，$\therefore$ $4t-12=\pm20$，$\therefore$ $t=8,\ -2$

したがって，$y=\frac{3}{4}x+8=\frac{セ}{ソ}x+タ$　②

$$y=\frac{3}{4}x-2=\frac{セ}{ソ}x-チ$$

(5) 直線①と②の交点のx座標は$\frac{-4}{3}x+3=\frac{3}{4}x+8$を解いて，$\frac{-12}{5}=\frac{ツテト}{ナ}$である。

円Cと直線②の交点のx座標は$(x-4)^2+\left(\frac{3}{4}x+8-6\right)^2=25$を解いて,

$x=\frac{8\pm12}{5}$, したがって $4=$ニと$\frac{-4}{5}=\frac{ネヌ}{ノ}$である。

(6) 三角形ABP の面積が20であり, かつ三角形ABP が直角三角形であるような点P は全部で8 =ハ個ある。なぜなら, 点P の軌跡である2 直線と円 Cの交点とA, B からなる三角形が直角三角形であり, そのような交点は4 個あるからである。加えて, 点AとB における円 Cの接線と2 直線の交点からなる三角形が直角三角形であり, そのような交点が4 個ある。合計8 個となる。

コメント:

直線と点との距離に関する公式を覚えていれば, (4)は容易に解答できる。そうでないと, 余分の計算を強いられる。点(x_1, y_1)と直線$ax+by+c$の距離dは, $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

この式を直ちに思い出せない場合はどうするか。最も簡単な方法は, 直線$y=\frac{3}{4}x$ を垂直方向に4 だけ平行移動するということは, y 方向へ 5 移動するということであることを図４のような略図を描いて把握することだ。

(6)は接線と2直線の交点もまた直角三角形を形成することを忘れないこと。

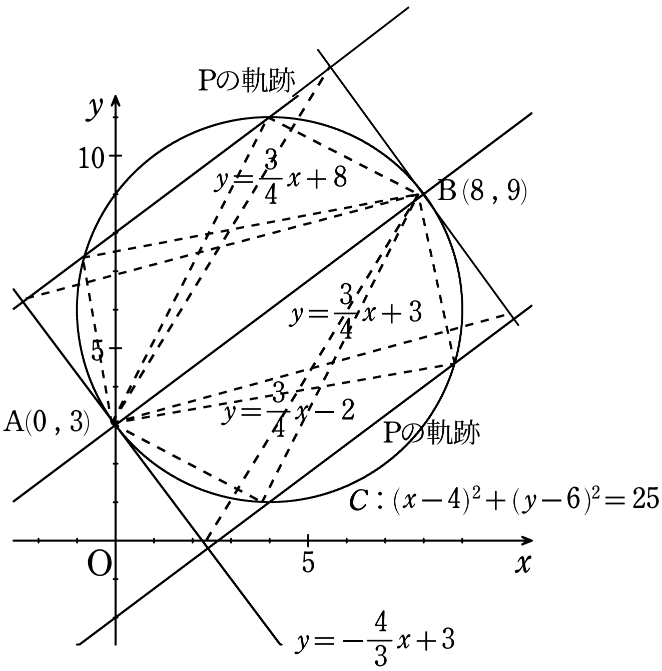

図１

第４問（配点 20）

＜解答＞

(1)　ア６　イ５　ウエ -4　オ９　カ２　キ５

(2)　クケ -1　コ c　サ２　シスセ $-2c$　ソ４　タ１　チａ　ツ ④　テ１　トナ -4　ニヌ -2　ネ２

＜解説＞

(1)　4 次式 $P(x)$ は，x^4 の係数が1で，x^2-2x+3で割り切れるとする。

また，$P(x)$ は $P(1)=12$ ，$P(2)=15$を満たすとする。

$P(x)=(x^2-2x+3)S(x)=(x^2-2x+3)(x^2+mx+n)$とおくと，

$P(1)=2S(1)=12$，$\therefore\ S(1)=6=1+m+n=$ア，$P(2)=3S(2)=15$，$\therefore\ S(2)=5=4+2m+n=$イ

したがって，$m=-4=$ウエ，$n=9=$オ

方程式$S(x)=x^2-4x+9=(x-2)^2+5=0$の解は $2\pm\sqrt{5}\,i=$カ$\pm\sqrt{キ}\,i$

(2)　2次式$Q(x)=x^2+kx+l$ (k，lは実数)を考える。cを正の実数として，$\alpha=c+\dfrac{1}{c}i$とする。

方程式$Q(x)=0$は複素数解 α を解のもつとする。$Q(x)$のxにαを代入すると

$$Q(\alpha)=\left(c+\frac{1}{c}i\right)^2+k\left(c+\frac{1}{c}i\right)+l$$

$$=\frac{-1}{c^2}+c^2+ck+l+\left(2+\frac{k}{c}\right)i=\frac{クケ}{c^2}+c^2+コk+l+\left(サ+\frac{k}{c}\right)i=0$$

したがって，$\dfrac{-1}{c^2}+c^2+ck+l=0$，$2+\dfrac{k}{c}=0$，これらを解いて，

$k=-2c=$シスセ，$l=\dfrac{1}{c^2}+c^2=\dfrac{c^4+1}{c^2}=\dfrac{c^{ソ}+タ}{c^2}$

二項定理から，$\alpha^4=\left(c+\dfrac{1}{c}i\right)^4=\displaystyle\sum_{n=0}^{4}{}_4C_n c^{4-n}\left(\frac{1}{c}i\right)^n=\sum_{n=0}^{4}{}_4C_n c^{4-2n}i^n=c^4+4c^2i-6+4c^{-2}i^3+c^{-4}$

$$=\left(c^4+\frac{1}{c^4}-6\right)+4\left(c^2-\frac{1}{c^2}\right)i=チ+ツi$$

相加平均≧相乗平均だから，$\dfrac{1}{2}\left(c^4+\dfrac{1}{c^4}\right)\geqq\sqrt{c^4\left(\dfrac{1}{c^4}\right)}=1$，等号は$c^4=\dfrac{1}{c^4}$のとき

cは正の実数だから，$c=1=$テで$\left(c^4+\dfrac{1}{c^4}\right)$は最小値2をとるので，

αの実数部$\left(c^4+\dfrac{1}{c^4}-6\right)$は最小値$-4=$トナをとり，

そのとき$k=-2c=-2=$ニヌ，$l=\dfrac{1}{c^2}+c^2=2=$ネである。

コメント：

二項定理，相加平均，相乗平均等について，スムーズに利用できなければならない。

＜総評＞

第１問［１］　三角関数の連立方程式に関する問題。難易度Ｂ－

［２］　対数関数のグラフと演算に関する問題。難易度Ｂ

第２問　放物線と直線によって形成される図形の面積に関する問題。難易度はＢ＋

第３問　円と直線の方程式と図形に関する問題。ミスが誘発され易いところがある。難易度はＢ

第４問　4次式の因数分解，2次方程式の複素数解に関わる問題。難易度はＢ－

数学Ⅱ・数学Ｂ　（注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第１問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第１問に同じ

第２問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第２問に同じ

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア８　イ７

(2)　ウａ　エａ　オａ　カｂ　キａ　ク３　ケ２

(3)　コ４　サシ16　ス１　セ１　ソ３　タ２　チ９　ツ２　テト32　ナ９

＜解説＞

以下において考察する数列の項は，すべて実数であるとする。

(1)　等比数列$\{s_n\}$の初項が1，公比が2であるとき，数列は１，２，４，８，・・・　であるから，

$s_1s_2s_3=8=$ア，　$s_1+s_2+s_3=7=$イ

(2)　$\{s_n\}$を初項x，公比rの等比数列とする。a，bを実数（ただし$a\fallingdotseq 0$）とし，

$\{s_n\}$の最初の３項が

$s_1s_2s_3=a^3$　①

$s_1+s_2+s_3=b$　②

を満たすとする。①から，$s_1s_2s_3=x\times xr\times xr^2=(xr)^3=a^3$だから，このとき

$xr=a=$ウ　③

②から，$x+xr+xr^2=(1+r+r^2)x=b$　②’

③，②’からxを消去して，$(1+r+r^2)a=br$，∴ $ar^2+(a-b)r+a=$ エ$r^2+($オ$-$カ$)r+$キ$=0$　④

④を満たす実数rが存在するためには，2次方程式④の解の判別式 $D=(a-b)^2-4a^2\geqq 0$，すなわち

$3a^2+2ab-b^2=$クa^2+ケ$ab-b^2\leqq 0$　⑤

(3)　$a=64$，$b=336$のとき，(2)の条件①，②を満たし，公比が1より大きい等比数列$\{s_n\}$を考える。

④は$64r^2-272r+64=16(4r-1)(r-4)=0$だから，$r=4=$コ，$x=\dfrac{a}{r}=\dfrac{64}{4}=16=$サシ

$\{s_n\}$を用いて，数列$\{t_n\}$を

$t_n=s_n\log_{コ}s_n=s_n\log_4 s_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$

と定める。$s_n=xr^{n-1}=16\cdot 4^{n-1}=4^{n+1}$だから，

$t_n=s_n\log_4 s_n=4^{n+1}\{\log_4(4^{n+1})\}=4^{n+1}(n+1)=(n+1)4^{n+1}=(n+$ス$)\cdot$コ$^{n+セ}$

$\{t_n\}$の初項から第 n 項までの和 U_n は,

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}t_k=\sum_{k=1}^{n}(k+1)4^{k+1}\text{ , コ}U_n=4U_n=4\sum_{k=1}^{n}(k+1)4^{k+1}=\sum_{k=2}^{n+1}k4^{k+1}$$

$$U_n-4U_n=-3U_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)4^{k+1}-\sum_{k=2}^{n+1}k4^{k+1}=(1+1)4^{1+1}+\sum_{k=2}^{n}4^{k+1}-(n+1)4^{n+1+1}$$

$$=32+\frac{4^{n+2}-4^3}{3}-(n+1)4^{n+2}$$

したがって, $U_n=\dfrac{3n+2}{9}\cdot 4^{n+2}-\dfrac{32}{9}=\dfrac{\text{ソ}n+\text{タ}}{\text{チ}}\cdot\text{コ}^{n+\text{ツ}}-\dfrac{\text{テト}}{\text{ナ}}$

コメント：

選択問題第３問は昨年同様に，数列の問題。等比数列の和の公式などを使いこなすこと。

$4\sum_{k=1}^{n}(k+1)4^{k+1}=\sum_{k=2}^{n+1}k4^{k+1}$のような表現上の変換を行うことによって，和の計算が容易になる。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア１　イ３　ウ２

(2)　エ５　オ２　カ３　キ２　ク１　ケ３　コ４　サ３　シ２　ス３　セ４　ソ３　タ２　チ３　ツ３

(3)　テ２　ト a　ナ３　ニ －　ヌ２　ネ１　ノ２　ハ a　ヒ５　フヘ 12

＜解説＞

座標平面上に点A (2 , 0)をとり，原点Oを中心とする半径が２の円周上に点B，C，D，E，Fを，点A，B，C，D，E，Fが順に正六角形の頂点となるようにとる。ただし，Bは第１象限にあるとする。図１のような略図を描いて考える。

(1)　点Bの座標は x 座標が $2\cos 60^\circ=1$, y 座標が $2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$ だから，$(1\,,\sqrt{3}\,)=(\text{ア},\ \sqrt{\text{イ}}\,)$

点Dの座標は x 座標が $2\cos 180^\circ=-2$, y 座標が $2\sin 180^\circ=0$ だから，$(-2\,,0\,)=(-\text{ウ},\ 0\,)$

(2)　線分BDの中点をMとし，直線 AMと直線 CDの交点をNとする。$\overrightarrow{ON}$ を求めよう。

$\overrightarrow{ON}$ は実数 r, s を用いて, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+r\,\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}+s\,\overrightarrow{DC}$ と2通りに表すことができる。

Mは線分BDの中点だから，Mの座標は $\left(-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり，したがって

$$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2}-2\,,\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)=\left(-\frac{5}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{\text{エ}}{\text{オ}}\,,\frac{\sqrt{\text{カ}}}{\text{キ}}\right)$$

Cの座標は $(2\cos 120^\circ\,,2\sin 120^\circ\,)=(-1\,,\sqrt{3}\,)$ であり，したがって

$$\overrightarrow{DC}=(-1-(-2),\sqrt{3}-0)=(1\,,\sqrt{3}\,)=(\text{ク}\,,\sqrt{\text{ケ}}\,)$$

$$\overrightarrow{OA}+r\,\overrightarrow{AM}=(2\,,0\,)+r\left(-\frac{5}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(2-\frac{5}{2}r\,,\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

$$\overrightarrow{OD}+s\,\overrightarrow{DC}=(-2\,,0\,)+s(1\,,\sqrt{3}\,)=(-2+s\,,\sqrt{3}\,s\,)$$

したがって，$\left(2-\dfrac{5}{2}r\,,\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)=(-2+s\,,\sqrt{3}\,s\,)$，これより $2-\dfrac{5}{2}r=-2+s$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}\,s$

これらを解いて，$r=\dfrac{4}{3}=\dfrac{コ}{サ}$，$s=\dfrac{2}{3}=\dfrac{シ}{ス}$

よって，$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}+s\,\overrightarrow{DC}=\left(-2+\dfrac{2}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\left(-\dfrac{セ}{ソ},\dfrac{タ\sqrt{チ}}{ツ}\right)$

(3) 線分 BF 上に点P をとり，そのy 座標をaとする。点P から直線 CE に引いた垂線と，点Cから直線EPに引いた垂線との交点をHとする。

Pは点$(1\,,\,a\,)$だから$\overrightarrow{EP}=(1-(-1)\,,\,a-(-\sqrt{3}\,)\,)=(2\,,\,a+\sqrt{3}\,)=(テ\,,\,ト+\sqrt{ナ}\,)$

Hの座標を$(h\,,\,a\,)$とおくと，$\overrightarrow{CH}=(h+1\,,\,a-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EP}\perp\overrightarrow{CH}$だから，

$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{CH}=2h+2+a^2-3=2h+a^2-1=0$，$\therefore\ h=\dfrac{-a^2+1}{2}$，

したがってHの座標をaを用いて表すと$\left(\dfrac{-a^2+1}{2}\,,\,a\right)=\left(\dfrac{ニa^{ヌ}+ネ}{2}\,,\,ハ\right)$

さらに，$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{OH}$のなす角をθとする。$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$のときの$a$の値を求める。

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OH}|\cos\theta$を利用して，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=(1\,,\,a\,)\cdot\left(\dfrac{-a^2+1}{2}\,,\,a\right)=\dfrac{-a^2+1}{2}+a^2=\dfrac{a^2+1}{2}$

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+1}$，$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{a^2+1}{2}$，

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OH}|}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{12}{13}$，$\therefore\ a=\pm\dfrac{5}{12}=\pm\dfrac{ヒ}{フヘ}$

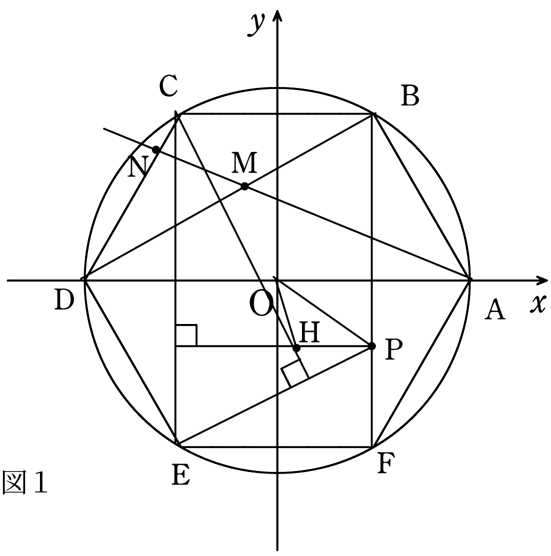

図１

コメント：

図１のような略図を描いて，題意を的確に把握する（ここでは，数式処理ソフトを用いて，誤解のないように正確に描いている。当然，試験では，鉛筆で手早く略図を描くこと。日ごろから略図を描いて慣れておくと良い）。ベクトルを用いて図形の座標や長さを求める問題。

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　アイウ 152　エ 8　オカ 27

(2)　キ 1　クケ 25　コサ 89

(3)　シ 1　ス 8　セ a　ソ 3　タチ $2a$　ツ 3　テ 7

＜解説＞

(1)　１回の試行において，事象Aの起こる確率がp，起こらない確率が$1-p$であるとする。この試行をn回繰り返すとき，事象Aの起こる回数をWとする。

確率変数Wの平均値（期待値）$m = np = \dfrac{1216}{27} = \dfrac{64\times 19}{27}$　①

確率変数Wの標準偏差 $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \dfrac{152}{27} = \dfrac{8\times 19}{27}$　②

①，②から，$n=152=$アイウ，$p=\dfrac{8}{27}=\dfrac{\text{エ}}{\text{オカ}}$

(2)　(1)の反復試行において，Wが38 以上となる確率の近似値を求めよう。

$W \geqq 38$とすれば，$\dfrac{W-m}{\sigma} = \dfrac{W-1216/27}{152/27} \geqq \dfrac{38-1216/27}{152/27} = -\dfrac{10}{8} = -1.25$

したがって，$P(W \geqq 38) = P\left(\dfrac{W-m}{\sigma} \geqq -1.25\right) = P\left(\dfrac{W-m}{\sigma} \geqq -\text{キ}.\text{クケ}\right)$

$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$とおき，Wの分布を正規分布で近似して，与えられた標準正規分布表から$P(Z \geqq -1.25)$を求める。

$P(Z \geqq -1.25) = P(-1.25 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z) = P(0 \leqq Z \leqq 1.25) + P(0 \leqq Z)$

$P(0 \leqq Z) = 0.5$，正規分布表から$P(0 \leqq Z \leqq 1.25) = 0.3944$

したがって，$P(Z \geqq -1.25) = 0.5 + P(0 \leqq Z \leqq 1.25) = 0.5 + 0.3944 = 0.8944$

したがって，$P(Z \geqq -\text{キ}.\text{クケ}) = P(Z \geqq -1.25) = 0.89 = 0.$コサ

(3)　連続型確率変数Xのとり得る値xの範囲が$s \leqq x \leqq t$で，確率密度関数が$f(x)$のとき，Xの平均$E(x)$は次の式で与えられる。

$$E(x) = \int_s^t xf(x)dx$$

aを正の実数とする。連続型確率変数Xのとり得る値xの範囲が$-a \leqq x \leqq 2a$で，確率密度関数が

$$f(x) = \frac{2}{3a^2}(x+a) \qquad (-a \leqq x \leqq 0\text{のとき})$$

$$\frac{1}{3a^2}(2a-x) \qquad (0 \leqq x \leqq 2a\text{のとき})$$

であるとする。このとき，$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$となる確率は

$$\int_a^{\frac{3}{2}a} \frac{1}{3a^2}(2a-x)dx = \frac{1}{3a^2}\left[2ax - \frac{1}{2}x^2\right]_a^{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{8} = \frac{\text{シ}}{\text{ス}}$$

また，Xの平均は

$$E(x)=\int_{-a}^{2a} xf(x)dx=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}x(x+a)dx+\int_{0}^{2a}\frac{1}{3a^2}x(2a-x)dx$$

$$=\frac{2}{3a^2}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_{-a}^{0}+\frac{1}{3a^2}\left[ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2a}=\frac{a}{3}=\frac{セ}{ソ}$$

さらに，$Y=2X+7$とおくと，Yの平均は $2\times\frac{a}{3}+7=\frac{2a}{3}+7=\frac{タチ}{ツ}+テ$

ただし，$E(y)=E(2x+7)=2E(x)+E(7)=2E(x)+7$であることを利用した。

コメント：

(1)では二項分布の平均値と標準偏差の公式を覚えていなければならない。(2)では標準正規分布関数と表の意味を理解していなければならない。正規分布関数は偶関数であること，$-\infty\leqq Z\leqq\infty$のとき，関数と$Z$軸とが囲む面積は1であることなどを理解しておく。

(3)では，xの範囲に応じて，被積分関数となる確率密度関数を選択すること。

＜総評＞

教科書の記載に応じた基本的な問題である。センター試験数学は，教科書を繰り返し読んで理解することが基本である。そして教科書に出ている練習問題にトライし，理解を確かなものにする。解答のスピードが求められ，スピードの差が点数の差となって表れるので，練習問題に反復して取り組み，習熟することが重要だと思う。

第１問　数学Ⅱの第１問に同じ。

第２問　数学Ⅱの第２問に同じ。

第３問　昨年同様，数列の問題。対数による数列の変換や和を求める(3)はやや煩瑣。難易度はＢ＋

第４問　図形のベクトルによる取扱いの問題。難易度はＢ

第５問　確率統計の問題。去年より易しい。難易度はＢ

170729