平成30年度（2018年度）センター試験　数学Ⅱ　数学Ⅱ･数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ･Ｂ]　（100点，60分）

数　学　Ⅱ（全問必答）

第１問（配点　30）

<解答>

［１］ ア２　イ４　ウ５　エオカ345　キ６　ク３　ケ３　コ２　サシ29　スセ30

［２］ ソ２　タ３　チ１　ツ２　テ０　ト３　ナ９　ニ２　ヌ３　ネ４　ノ４　ハヒ27

<解説>

［１］

(1)　ラジアンとは円弧の中心角の大きさを（円弧の長さ／円の半径）で表したものだから，
1ラジアンは，②半径が1，弧の長さが1の扇形の中心角の大きさ，である。

(2)　144°を弧度で表すと，πラジアンが180°だから，$\dfrac{イ}{ウ}\pi=\dfrac{144}{180}\pi=\dfrac{4}{5}\pi$ラジアンである。

$\dfrac{23}{12}\pi$ラジアンを度で表すと，$\dfrac{23}{12}\pi$ラジアン$=\dfrac{23}{12}\times180°=$エオカ°$=345°$である。

(3)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$の範囲で

$$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{30}\right)=1 \quad ①$$

を満たすθの値を求めよう。

$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$とおくと，①は

$$2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{30}\right)=2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{キ}\right)=2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$$

と表せる。加法定理を用いると，この式は

$$2\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin x-2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sin x-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x-\sqrt{ク}\cos x=\sin x-\sqrt{3}\cos x=1\text{となる。}$$

さらに，三角関数の合成を用いると

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{ケ}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$$

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{ケ}\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{コ}=\dfrac{1}{2}$　と変形できる。$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$だから，

$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\theta-\frac{2\pi}{15}\right)=\frac{1}{2}$，$\therefore\ \theta-\frac{2\pi}{15}=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\cdots$

$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$だから，$\theta=\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{15}=\frac{サシ}{スセ}\pi=\frac{29}{30}\pi$である。

コメント：

三角関数の加法定理，合成などの基本的な問題である。スムーズに解答しよう。三角関数は日常生活でも利用される場面が多い。

［2］

cを正の定数として，不等式

$$x^{\log_3 x}\geqq\left(\frac{x}{c}\right)^3 \quad ②$$

を考える。

3を底とする②の両辺の対数をとり，$t=\log_3 x$とおくと，大小関係は変わらないから，

$\log_3\left(x^{\log_3 x}\right)=\log_3 x\cdot\log_3 x\geqq 3\log_3\frac{x}{c}=3(\log_3 x-\log_3 c)$

$t^2-3t+3\log_3 c=t^{ソ}-タt+タ\log_3 c\geqq 0$　③

$c=\sqrt[3]{9}$のとき，②を満たすxの値の範囲を求めよう。③により

$t^2-3t+3\log_3 c=t^2-3t+3\log_3(\sqrt[3]{9})=t^2-3t+3\log_3 3^{\frac{2}{3}}$

$\qquad=t^2-3t+3\times\frac{2}{3}=t^2-3t+2=(t-2)(t-1)\geqq 0$

したがって，$t\leqq$チ$=1$，$t\geqq$ツ$=2$

すなわち，$\log_3 x\leqq 1$，$\log_3 x\geqq 2$，さらに真数の条件$x>0$を考えて

テ$=0<x\leqq 3=$ト，$x\geqq 9=$ナ

次に，②が$x>0=$テの範囲でつねに成り立つようなcの値の範囲を求めよう。

xが$x>0$の範囲を動くとき，

$\lim_{x\to+0}t=\lim_{x\to+0}(\log_3 x)=-\infty$，$\lim_{x\to\infty}t=\lim_{x\to\infty}(\log_3 x)=\infty$，$t=\log_3 x$は単調増加関数だから，

tのとり得る値の範囲は　ニ②実数全体　である。

この範囲のtに対して，③がつねに成り立つためにの必要十分条件は，

2次方程式$t^2-3t+3\log_3 c=0$が重解あるいは虚数解をもつことである。

解の判別式$D=3^2-4\times 3\log_3 c\geqq 0$，したがって$\log_3 c\geqq\frac{3}{4}=\frac{ヌ}{ネ}$である。

すなわち，$c\geqq 3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}=\sqrt[ノ]{ハヒ}$である。

コメント：

対数の基本的な性質や演算を基礎とする問題であるから，それらをスムーズに扱えることが必要だ。さらに2次関数の値の正負に関して，判別式を用いることも忘れてはならない。

第２問（配点 30）

<解答>

［１］

(1)　ア 2　イウ −2　エ 2　オ 1

(2)　カ 3　キ 3　ク 3　ケ 1　コ 2　サ 3　シ 3　ス 5　セ 2　ソ 3　タチ −1

［２］

ツ 7　テ 4　トナ − 6　ニ 2　ヌ 2

<解説>

［１］

$p>0$ とする。座標平面上の放物線 $y=px^2+qx+r$ を C とし，直線 $y=2x-1$ を l とする。C は点 A(1 , 1) において l と接しているとする。

(1)

q と r を，p を用いて表そう。放物線 C について $y'=2px+q$ であり，放物線 C 上の点Aにおける接線 l の傾きはア$=2$であることから，$q=-2p+2=$イウ$p+$エ がわかる。さらに，C は点Aを通ることから，$1=p+q+r$，$r=1-(p+q)=1-(p-2p+2)=p-1=p-$オとなる。

(2)

図１を参照する。

(1)から，放物線 C は $y=px^2-2(p-1)x+p-1$

$v>1$ とする。放物線 C と直線 l および直線 $x=v$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_1^v\{px^2-2(p-1)x+p-1-(2x-1)\}dx=p\int_1^v(x^2-2x+1)dx$$

$$=p\int_1^v(x-1)^2dx=\frac{p}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_1^v=\frac{p}{3}(v-1)^3=\frac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)=\frac{p}{\text{カ}}(v^3-\text{キ}v^2+\text{ク}v-\text{ケ})$$

また，x 軸と l および2直線 $x=1$，$x=v$ で囲まれた図形の面積 T は，図形が台形であることから

$T=\frac{1}{2}(v-1)(2v-1+1)=v^2-v=v^{\text{コ}}-v$ である。

$$U=S-T=\frac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)-(v^2-v)=\frac{p}{3}v^3-(p+1)v^2+(p+1)v-\frac{p}{3}$$

$U'=pv^2-2(p+1)v+(p+1)$，$v=2$ で極値をとるとする。このとき，

$U'=4p-4(p+1)+(p+1)=p-3=0$ だから，$p=3=$サ　であり，このとき，

$U=v^3-4v^2+4v-1=(v^3-1)-4v(v-1)=(v-1)(v^2+v+1-4v)=(v-1)(v^2-3v+1)$　①

$v>1$ の範囲で $U=0$ となる v の値を v_0 とすると，$v^2-3v+1=0$ から，$v_0=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\text{シ}+\sqrt{\text{ス}}}{\text{セ}}$

$v^2-3v+1=0$ のもう一つの解 $v_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1$ だから，

$1<v<v_0$ の範囲では U は ソ ③ 負の値のみをとる。

$p=3$ のとき，$v>1$ における U の最小値は，$v=2$ で極値をとるのだから，$v=2$ として，

$U=(v-1)(v^2-3v+1)=-1=$タチである。

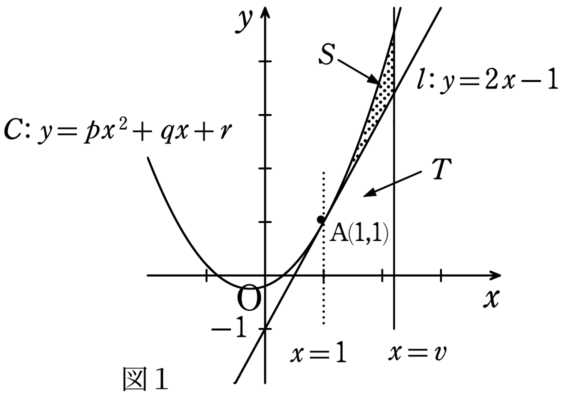

図１

コメント：

2次関数の微分，積分の問題。ことさら難しい考え方を必要とする問題ではない。計算ミスが誘発されやすい問題なので，落ち着いてさばいていこう。

［2］

関数$f(x)$は $x \geqq 1$ の範囲でつねに $f(x) \leqq 0$ を満たすとする。$t>1$のとき，曲線$y=f(x)$とx軸および2直線 $x=1$，$x=t$で囲まれた図形の面積をWとする。t が $t>1$の範囲を動くとき，Wは，底辺の長さが$2t^2-2$，他の辺の長さがそれぞれ t^2+1 の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする。このとき，$x>1$における$f(x)$を求めよう。

$F(x)$を$f(x)$の不定積分とする。一般に，$F'(x)=f(x)=$ ⑦ $=$ ツ

$W=\int_1^t \{0-f(x)\}dx=\Big[-F(x)\Big]_1^t=-F(t)+F(1)=$ ④ $=$ テ

が成り立つ。ツ，テに当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $-F(t)$	① $F(t)$	② $F(t)-F(1)$
③ $F(t)+F(1)$	④ $-F(t)+F(1)$	⑤ $-F(t)-F(1)$
⑥ $-f(x)$	⑦ $f(x)$	⑧ $f(x)-f(1)$

二等辺三角形の高さは$\sqrt{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}=2t$,

したがって，その面積$W=\dfrac{1}{2}\times(2t^2-2)\times 2t=2t(t^2-1)=-F(t)+F(1)$，$\therefore\ F(t)=-2t(t^2-1)+F(1)$

$f(t)=F'(t)=-6t^2+2=$トナ$t^{ニ}+$ヌ

よって，$x>1$における$f(x)$がわかる。

コメント：

問題文を正確に読み込むこと。$f(x) \leqq 0$ だから，$f(x) \geqq 0$などと早とちりしないこと（私はしてしまった）。したがってWの被積分関数は$\{0-f(x)\}$であり，$f(x)$ではない。

第３問（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア３　イ１　ウエ -3　オ６　カ３

(2)　キ３　ク１　ケ３　コ１　サシ -2　ス３　セ７　ソ３　タ１

(3)　チ９　ツ３　テ２　ト２　ナニ10　ヌ３　ネ２　ノ１　ハ４　ヒ５　フ３

＜解説＞

座標平面上の2点 $A(-1\,,0)$，$B(2\,,1)$ を通る直線を l_1 とする。

また，方程式 $x^2+y^2+6x-12y+36=0$ が表す円を C_1 とする。

(1)

l_1の方程式は$y=\dfrac{0-1}{-1-2}\{x-(-1)\}=\dfrac{1}{3}(x+1)$，$\therefore\ x-3y+1=x-$ア$y+$イ$=0$である。

また，$x^2+y^2+6x-12y+36=(x+3)^2-9+(y-6)^2=0$だから，

C_1の方程式は$(x+3)^2+(y-6)^2=9=3^2$となって，

C_1の中心は$(-3\,,6)=($ウエ$\,,$オ$)$で，半径は $3=$カである。

(2)

C_1上の点$P(a\,,b)$に対して，三角形ABPの重心Gの座標を$(s\,,t)$とおくと，

$s=\dfrac{-1+2+a}{3}$，$t=\dfrac{0+1+b}{3}$ だから，

$a=3s-1=$キ$s-$ク，$b=3t-1=$ケ$t-$コである。したがって，PがC_1上を動くとき，

$(a+3)^2+(b-6)^2=(3s-1+3)^2+(3t-1-6)^2=3^2\left(s+\dfrac{2}{3}\right)^2+3^2\left(t-\dfrac{7}{3}\right)^2=3^2$,

$\therefore\left(s+\dfrac{2}{3}\right)+\left(t-\dfrac{7}{3}\right)^2=1$，したがって $(s\,,t)$ は円の方程式 $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+\left(y-\dfrac{7}{3}\right)^2=1$ 上の点である。

G の軌跡は中心$\left(\dfrac{-2}{3}\,,\dfrac{7}{3}\right)=\left(\dfrac{\text{サシ}}{\text{ス}}\,,\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}\right)$，半径 $1=$タ の円となる。

(3)

(2)で求めた円をC_2とする。点Q が C_2上を動き，点R が線分AB 上を動くとき，線分QR の長さの最小値と最大値を求めよう。図１のような図を描いて考える。

C_2の中心を通り，直線l_1と垂直な直線l_2の方程式は，直線l_1の傾きは$\dfrac{1}{3}$だから，

$y-\dfrac{7}{3}=-3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$，$\therefore\ 3x+y-\dfrac{1}{3}=0$，$\therefore\ 9x+3y-1=$チ$x+$ツ$y-1=0$

直線l_1：$x-3y+1=0$，直線l_2：$9x+3y-1=0$，l_1とl_2の交点は$\left(0\,,\dfrac{1}{3}\right)$となり，

$A(-1\,,0)$，$B(2\,,1)$ を$1:2=1:$テ に内分することがわかる。

C_2の中心$O_2\left(\dfrac{-2}{3}\,,\dfrac{7}{3}\right)$と，$l_1$と$l_2$の交点$U\left(0\,,\dfrac{1}{3}\right)$ の距離は$\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

QRが最小になるのは，Qが直線O_2UとC_2の交点になり，RがUと一致したときだから，

QRの最小値は$\dfrac{2\sqrt{10}}{3}-1=\dfrac{ト\sqrt{ナニ}}{ヌ}-タ$ である。

QRの長さが最大になるのは，RがBに一致し，BとO_2を結んだ線分の延長がC_2と交わる点にQが一致したときだから，Rの座標は$(2,1)=$(ネ，ノ)

最大値は $BO_2+1=\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}-2\right)^2+\left(\dfrac{7}{3}-1\right)^2}+1=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}+1=\dfrac{ハ\sqrt{ヒ}}{フ}+タ$

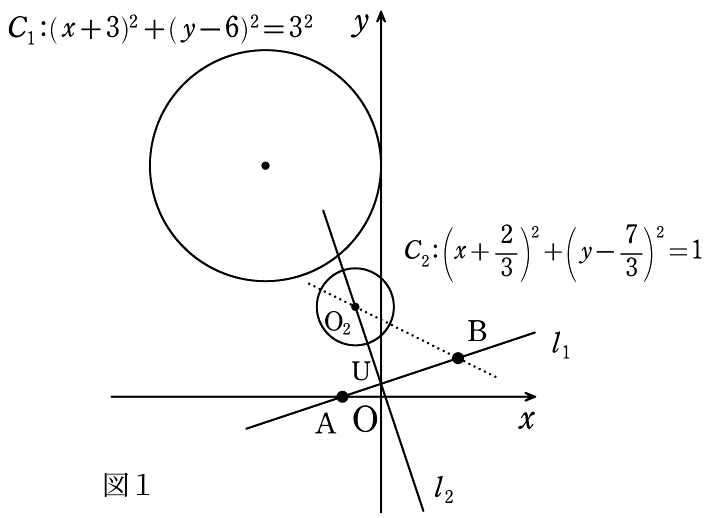

図１

コメント：

座標と図形の問題。重心の座標の公式は覚えていなければならない。(1)，(2)はスムーズに正答したい。(3)は図１のような図を描いて，題意を的確に把握したい。図１はソフトで描いたので，正確だが，試験では手書きだから，正確より時間を優先して大雑把に描く（ただし、できるだけ正確であることは解答を助けるから，日ごろから数学や物理では図を描くことを心がけること）。

QRの最小値，最大値がどのような場合かは，図を描きながら直感的にわかるようでありたい。QRはO_2とR（線分AB上の点）を結んだ線分の長さO_2Rを用いて，
$QR=O_2R\mp$(円C_2の半径)$=O_2R\mp1$ と表されるから，O_2Rの最小値，最大値がわかれば良い。

第４問（配点 20）

＜解答＞

(1)　アイ -5　ウエ 17　オカ -2　キ 3　ク 2　ケ 3　コ 7
　サシ 14　ス 2　セ 7　ソ 2　タ 0　チ －　ツ 2

(2)　テ 4　ト 5　ナ 3

＜解説＞

a，b，cを実数とし，xの整式$P(x)$を

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

とする。3次方程式 $P(x)=0$ は虚数 $-1+\sqrt{6}\,i$ を解にもつとする。

(1)

3次方程式 $P(x)=0$ の実数解を a を用いて表そう。

$P(x)$のxに虚数 $-1+\sqrt{6}\,i$ を代入し，整理すると

$$P(-1+\sqrt{6}\,i)=(-1+\sqrt{6}\,i)^3+a(-1+\sqrt{6}\,i)^2+b(-1+\sqrt{6}\,i)+c$$
$$=-5a-b+c+17+(-2a+b-3)\sqrt{6}\,i$$
$$=\text{アイ}a-b+c+\text{ウエ}+(\text{オカ}a+b-\text{キ})\sqrt{6}\,i=0$$

したがって，$-5a-b+c+17=0$，$-2a+b-3=0$

b，cをaを用いて表すと

$$b=2a+3=\text{ク}a+\text{ケ},\quad c=5a+b-17=7a-14=\text{コ}a-\text{サシ}$$

となる。

二つの虚数 $-1+\sqrt{6}\,i$，$-1-\sqrt{6}\,i$ を解とする2次方程式で，x^2の係数が1のものは解と係数の関係によって，

$$x^2-\{(-1+\sqrt{6}\,i)+(-1-\sqrt{6}\,i)\}x+(-1+\sqrt{6}\,i)(-1-\sqrt{6}\,i)$$
$$=x^2+2x+7=x^2+\text{ス}x+\text{セ}=0$$

である。

$P(x)$をこの方程式の左辺の整式で割ると，

$P(x)=x^3+ax^2+(2a+3)x+(7a-14)=(x^2+2x+7)(x+a-2)$だから，

商は $x+a-2=x+a-\text{ソ}$，余りは$0=\text{タ}$である。

よって，方程式$P(x)=0$の実数解は $x+a-2=0$ から，

$$x=-a+2=\text{チ}a+\text{ツ}$$

と表せる。

(2)

$$P(x)=(x^2+2x+7)(x+a-2)=(x^2+2x+7)\{(x+a-3)+1\}$$
$$=(x^2+2x+7)(x+a-3)+(x^2+2x+7)$$
$$=(x^2+2x+7)(x+a-3)+(x+a-3)(x+5-a)+7-(5-a)(a-3)$$

$x+a-3$で割ったときの余りが6のとき，

$7-(5-a)(a-3)=6$ だから，$a^2-8a+16=(a-4)^2=0$，$\therefore\ a=4=\text{テ}$

このとき，$P(x)=(x^2+2x+7)(x+2)=Q(x)(x-1)+13x+17$とおく。

$Q(x)=x^2+ux+v$として，$(x^2+2x+7)(x+2)=(x^2+ux+v)(x-1)+13x+17$

$x=0$のとき，$14=-v+17$，$\therefore\ v=3$

$x=-2$のとき，$0=-3(4-2u+v)-9$，$\therefore\ u=5$

したがって，$Q(x)=x^2+5x+3=x^2+\text{ト}x+\text{ナ}$

コメント：

3次方程式を素材とした複素数の問題である。$i^2=-1$として，実部と虚部に分けて，計算する。3次方程式は，少なくも１つの実数解をもつ。さらに仮に１つの虚数解をもつとすれば，それは2次方程式の虚数解であり，共役な複素数がもう一つの虚数解である。

＜総評＞

問題の分野や内容，そして難易度はほぼ昨年と同様である。解答時間が不足がちになるので，このレベルの過去問や類似問題に繰り返して取り組み，解答スピードを上げることに努める。

第１問［１］ 三角関数の加法定理や合成を用いた，三角関数の解に関する問題。難易度Ｂ－

［２］ 対数演算に関する問題。難易度Ｂ－

第２問 放物線と直線によって形成される図形の面積に関する問題。難易度はＢ

第３問 円と直線の方程式と図形に関する問題。やや錯綜するので落ち着いて問題文を把握しよう。解答時間の節約のためには直感を働かすことも重要だ。難易度はＢ＋

第４問 3次式の因数分解，2次方程式の複素数解に関わる問題。難易度はＢ－

数学Ⅱ・数学Ｂ

（注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第１問（必答問題）（配点 30）

数学Ⅱの第１問に同じ

第２問（必答問題）（配点 30）

数学Ⅱの第２問に同じ

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点 20）

＜解答＞

(1) アイ -6 ウエ 12 オ 6 カキ 12

(2) クケ 12 コ 3 サ 6 シ 3 ス 1

(3) セ 5 ソ 6 タ 3 チ 2 ツテト -18 ナ 2 ニ 3 ヌ 9 ネ 2

＜解説＞

第4項が30，初項から第8項までの和が288である等差数列を$\{a_n\}$とし，$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする。また，第2項が36，初項から第3項までの和が156である等比数列で公比が1より大きいものを$\{b_n\}$とし，$\{b_n\}$の初項から第n項までの和をT_nとする。

(1)

等差数列$\{a_n\}$の公差をdとして，

$$a_n=a_1+(n-1)d,\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}n\{2a_1+(n-1)d\}$$

題意によって，

$a_4=a_1+3d=30$ ①

$S_8=4(2a_1+7d)=8a_1+28d=288$ ②

①，②から$\{a_n\}$の初項は$a_1=-6=$アイ，公差は$d=12=$ウエであり，

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{-12+12(n-1)\}=6n^2-12n=$オ$n^2-$カキ$n$

である。

(2)

等比数列$\{b_n\}$の公比を $r>1$ として，$b_n=b_1r^{n-1}$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\dfrac{b_1(r^n-1)}{r-1}$

題意によって，

$b_2=b_1r=36$　③

$T_3=\dfrac{b_1(r^3-1)}{r-1}=b_1(r^2+r+1)=156$　④

③，④から$\{b_n\}$の初項は$b_1=12=$クケ，公比は$r=3=$コであり

$T_n=\dfrac{12(3^n-1)}{3-1}=6(3^n-1)=$サ(シ$^n-$ス)

である。

(3)

数列$\{c_n\}$を次のように定義する。

$c_n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$

$=n(a_1-b_1)+(n-1)(a_2-b_2)+\cdots+2(a_{n-1}-b_{n-1})+(a_n-b_n)$　($n=1$，2，3，$\cdots$)

たとえば

$c_1=a_1-b_1$，$c_2=2(a_1-b_1)+(a_2-b_2)$

$c_3=3(a_1-b_1)+2(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$

である。数列$\{c_n\}$の一般項を求めよう。

$\{c_n\}$の階差数列を$\{d_n\}$とする。

$d_n=c_{n+1}-c_n=\sum_{k=1}^{n+1}(n+1-k+1)(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$

$=\sum_{k=1}^{n+1}(n-k+1)(a_k-b_k)+\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$

$=\sum_{k=1}^{n+1}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n+1}b_k=S_{n+1}-T_{n+1}$

$d_n=c_{n+1}-c_n=S_{n+1}-T_{n+1}$であるから，$d_n=$セ$=$⑤である。

⓪　S_n+T_n　①　S_n-T_n　②　$-S_n+T_n$

③　$-S_n-T_n$　④　$S_{n+1}+T_{n+1}$　⑤　$S_{n+1}-T_{n+1}$

⑥　$-S_{n+1}+T_{n+1}$　⑦　$-S_{n+1}-T_{n+1}$

したがって，(1)と(2)により

$d_n=S_{n+1}-T_{n+1}=6(n+1)^2-12(n+1)-6(3^{n+1}-1)=6n^2-2\cdot3^{n+2}=$ソ$n^2-2\cdot$タ$^{n+チ}$

である。

$c_1=a_1-b_1=-6-12=-18=$ツテト，$c_n-c_{n-1}=d_{n-1}$だから，$\{c_n\}$の一般項は以下のようになる。

$(c_n-c_{n-1})+(c_{n-1}-c_{n-2})+\cdots+(c_3-c_2)+(c_2-c_1)=c_n-c_1=\sum_{k=n-1}^{1} d_k=\sum_{k=1}^{n-1} d_k$

$c_n=\sum_{k=1}^{n-1} d_k+c_1=\sum_{k=1}^{n-1}(6k^2-18\times 3^k)+c_1=6\sum_{k=1}^{n-1} k^2-18\sum_{k=1}^{n-1} 3^k-18$

$=(n-1)n(2n-1)-27(3^{n-1}-1)-18=2n^3-3n^2+n+9-3^{n+2}=$ ナn^3-ニn^2+n+ヌ$-$タ$^{n+ネ}$

コメント：

等差数列，等比数列は頻出だから，一般項，和の公式等の表現や算出などは熟知していなければならない。$\sum_{k=1}^{n-1} k^2$の公式も覚えていないと正答できない。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア２　イ２

(2)　ウ３　エ４　オ１　カ４

(3)　キク -3　ケ４　コ１　サ a　シ a　スセ $-a$　ソ４　タチ -3

(4)　ツ９　テ６　トナ $3a$　ニ２　ヌ２

＜解説＞

aを$0<a<1$を満たす定数とする。三角形ABC を考え，辺AB を1：3 に内分する点をD，辺BCを$a:(1-a)$ に内分する点をE，直線AE と直線CD の交点をF とする。$\overrightarrow{FA}=\vec{p}$，$\overrightarrow{FB}=\vec{q}$，$\overrightarrow{FC}=\vec{r}$ とおく。図１のような図を描いて考える。

(1)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=-\vec{p}+\vec{q}=\vec{q}-\vec{p}=$ア$=$②　であり

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=|\vec{p}|^2-$イ$\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$　①

である。アについては下記から一つ選ぶ。

⓪　$\vec{p}+\vec{q}$　①　$\vec{p}-\vec{q}$　②　$\vec{q}-\vec{p}$　③　$-\vec{p}-\vec{q}$

(2)

$\overrightarrow{FD}$ を$\vec{p}$ と$\vec{q}$ を用いて表すと

$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}=\vec{p}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\vec{p}+\frac{1}{4}(\vec{q}-\vec{p})=\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}=\frac{ウ}{エ}\vec{p}+\frac{オ}{カ}\vec{q}$　②

である。

(3)

s，t をそれぞれ $\overrightarrow{FD}=s\vec{r}$，$\overrightarrow{FE}=t\vec{p}$ となる実数とする。sとt をaを用いて表そう。

②により，$\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}=s\vec{r}$，$\therefore\ \vec{q}=-3\vec{p}+4s\vec{r}=$キク$\vec{p}+$ケ$s\vec{r}$　③　である。

$\vec{q}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EB}=t\vec{p}+a\overrightarrow{CB}=t\vec{p}+a(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FB})=t\vec{p}+a(-\vec{r}+\vec{q})$，したがって

$\vec{q}=\frac{t}{1-a}\vec{p}-\frac{a}{1-a}\vec{r}=\frac{t}{コ-サ}\vec{p}-\frac{シ}{コ-サ}\vec{r}$　④

である。③と④において，$\vec{p}$と$\vec{r}$の係数を等しいとおけば，

$-3=\dfrac{t}{1-a}$，$4s=-\dfrac{a}{1-a}$，$\therefore\ s=\dfrac{-a}{4(1-a)}=\dfrac{スセ}{ソ(コ-サ)}$，$t=-3(1-a)=タチ(コ-サ)$　⑤

である。

(4)

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BE}|$とする。$|\vec{p}|=1$のとき，$\vec{p}$と$\vec{q}$の内積を$a$を用いて表そう。

①により

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2 \quad \text{である。}$$

また④，⑤から，$\vec{r}=\dfrac{t}{a}\vec{p}+\dfrac{a-1}{a}\vec{q}=\dfrac{-3(1-a)}{a}\vec{p}+\dfrac{-(1-a)}{a}\vec{q}$

上述したように，$\overrightarrow{EB}=a\overrightarrow{CB}=a(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FB})=a(-\vec{r}+\vec{q})=3(1-a)\vec{p}+\vec{q}$

$$|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{EB}|^2=\{3(1-a)\vec{p}+\vec{q}\}^2=9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

$$=ツ(コ-サ)^2+テ(コ-サ)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{BE}|^2$だから，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{3a-2}{2}=\dfrac{トナ-ニ}{ヌ}$

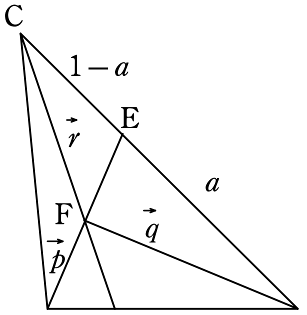

図１

コメント：

ベクトルによる図形の表現と計算の問題。図１のような図から，題意を的確に理解すれば，特段に難しさはないであろう。ただ，スピードが問われるから，やはり，この種の問題に習熟し，スムーズに解答することが必要だ。

第５問（選択問題）（配点　20）

<解答>

(1)　ア 1　イ a　ウ 6　エ 8　オ 2　カ 8　キ 6

(2)　ク 1　ケ 6　コサ 30　シス 25　セ 2　ソタ 40　チ 1　ツテ 20　トナ 88

(3)　ニ 8　ヌネ 76　ノハ 84　ヒ 4

<解説>

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて29ページの正規分布表を用いても良い。

(1)

a を正の整数とする。2，4，6，・・・，$2a$ の数字がそれぞれ一つずつ書かれたa 枚のカードが箱に入っている。この箱から1枚のカードを無作為に取り出すとき，そこに書かれた数字を表す確率

変数をXとする。このとき,

$X=2a$となる確率は,a 枚から1枚を取り出す確率だから,$\dfrac{1}{a}=\dfrac{ア}{イ}$ である。

$a=5$とする。Xの平均値(期待値)は $\overline{X}=\sum_{k=1}^{a} X_k P(X_k)=\dfrac{1}{5}(2+4+6+8+10)=6=ウ$

Xの分散は $\sigma^2=\sum_{k=1}^{a}(X_k-\overline{X})^2 P(X_k)=\sum_{k=1}^{5} {X_k}^2 P(X_k)-\overline{X}^2=44-36=8=エ$

また,s,t は定数で $s>0$ のとき,$sX+t$ の平均が20,分散が32 となるようにs,t を定める。

$sX+t$ の平均は $\overline{sX+t}=s\overline{X}+t=6s+t=20$

$sX+t$ の分散は $\sum_{k=1}^{a}\{(sX_k+t)-(s\overline{X}+t)\}^2 P(X_k)=s^2\sigma^2=8s^2=32$,$\therefore s=2=オ$,$t=8=カ$である。

このとき,$sX+t=2X+8$ が20 以上となるのは,$X=6$,8,10 の場合だから,

その確率は $\dfrac{3}{5}=0.6=0.キ$ である。

(2)

(1)の箱のカードの枚数 a は3 以上とする。この箱から3 枚のカードを同時に取り出し,それらのカードを横 1 列に並べる。この試行において,カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とする。このとき,事象A の起こる確率p は,3枚のカードを並べる場合の数が$3!=6$だから,

$p=\dfrac{1}{6}=\dfrac{ク}{ケ}$である。

この試行を180 回繰り返すとき,事象A が起こる回数を表す確率変数をY とする。毎回の試行において,事象A が起きる場合と起きない場合の二つだから,事象A が起きる回数は二項分布に従う。X_j をj 回目の試行において事象A が起きる回数とすれば,$X_j=1$または0 であって

$Y=\sum_{j=1}^{180} X_j$,$E(X_j)=1\times p+0\times(1-p)=p$

毎回の試行は独立だから,

Yの平均 $m=E(Y)=E\left(\sum_{j=1}^{180} X_j\right)=\sum_{j=1}^{180} E(X_j)=\sum_{j=1}^{180} p=\dfrac{1}{6}\sum_{j=1}^{180} 1=\dfrac{180}{6}=30=コサ$

Yの分散 $\sigma^2=V(Y)=V\left(\sum_{j=1}^{180} X_j\right)=\sum_{j=1}^{180} V(X_j)$

$V(X_j)=E({X_j}^2)-\{E(X_j)\}^2=1^2\times p-p^2=p-p^2=p(1-p)$

$\therefore \sigma^2=\sum_{j=1}^{180} V(X_j)=180p(1-p)=180\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=25=シス$

ここで,事象Aが18 回以上36 回以下起こる確率の近似値を次のように求めよう。

試行回数180 回は大きいことから,Y は近似的に平均 $m=30$,標準偏差 $\sigma=\sqrt{25}$ の正規分布に従うと考えられる。ここで,$Z=\dfrac{Y-m}{\sigma}=\dfrac{Y-30}{5}$とおけば,$Z$は標準正規分布に従う。

$18\leqq Y\leqq 36$とすれば$-2.4\leqq Z\leqq 1.2$だから,求める確率の近似値は次のようになる。

$P(18\leqq Y\leqq 36)=P(-2.40\leqq Z\leqq 1.20)=P(-セ.ソタ\leqq Z\leqq チ.ツテ)$

標準正規分布は偶関数であり,29ページの正規分布表によれば,

$P(-2.40\leqq Z\leqq 1.20)=P(-2.40\leqq Z\leqq 0.0)+P(0.0\leqq Z\leqq 1.20)$

$=P(0.0\leqq Z\leqq 2.40)+P(0.0\leqq Z\leqq 1.20)=0.4918+0.3849=0.8767\fallingdotseq 0.88=0.トナ$

(3)

ある都市での世論調査において，無作為に400人の有権者を選び，ある政策に対する賛否を調べたところ，320人が賛成であった。この都市の有権者全体のうち，この政策の賛成者の母比率pに対する信頼度95%の信頼区間を求めたい。

この調査での賛成者の比率（以下，これを標本比率という）は$R=\dfrac{320}{400}=0.8=0.$ニ である。

標本の大きさが400と大きいので，二項分布の正規分布による近似を用いると，pに対する信頼度95%の信頼区間は

$R-1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}\leqq p\leqq R+1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$　①，$\therefore\ 0.8-1.96\times\dfrac{0.4}{20}\leqq p\leqq 0.8+1.96\times\dfrac{0.4}{20}$，

したがって 0.ヌネ $\leqq p\leqq$ 0.ノハ，すなわち $0.76\leqq p\leqq 0.84$である。

母比率pに対する信頼区間 $A\leqq p\leqq B$ において，$B-A$ をこの信頼区間の幅と呼ぶ。

以下，Rを標本比率とし，pに対する信頼度 95% の信頼区間を考える。

上で求めた信頼区間の幅をL_1

標本の大きさが400 の場合に $R=0.6$ が得られたときの信頼区間の幅を L_2

標本の大きさが500 の場合に $R=0.8$ が得られたときの信頼区間の幅を L_3

とする。

①から信頼区間$B-A=2\times1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

$\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$は，L_1では$\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{400}}$，$L_2$では$\sqrt{\dfrac{0.6\times0.4}{400}}$，$L_3$では$\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{500}}$

したがって，L_1，L_2，L_3 について ヒ＝④ が成り立つ。

⓪ $L_1<L_2<L_3$　① $L_1<L_3<L_2$　② $L_2<L_1<L_3$

③ $L_2<L_3<L_1$　④ $L_3<L_1<L_2$　⑤ $L_3<L_2<L_1$

コメント：

(1)は迅速に正答したい。(2)は事象Aの起きる回数が二項分布であることを的確に理解することが必要である。その上で，二項分布の平均値，標準偏差の公式を思い出さなければならない（この問題では，公式を覚えている必要がある）。

(3)では，(2)から賛成者の人数は二項分布になるということを，直ちに気が付かなければならない。ひとり一人の賛否を400人 分調査するとする。X_j をj人目の調査において賛成となる人数とすれば，$X_j=1$または0 であって，賛成者の人数 $Y=\sum_{j=1}^{400}X_j$ は調査人数が400人と十分に多いので近似的に正規分布に従う。このことは(2)の事象と同じである。

$E(X_j)=1\times p+0\times(1-p)=p$

Yの平均 $m=E(Y)=E\left(\sum_{j=1}^{400}X_j\right)=\sum_{j=1}^{400}E(X_j)=\sum_{j=1}^{400}p=400p$

Yの分散 $\sigma^2=V(Y)=V\left(\sum_{j=1}^{400} X_j\right)=\sum_{j=1}^{400} V(X_j)$

$V(X_j)=E(X_j{}^2)-\{E(X_j)\}^2=1^2\times p-p^2=p-p^2$

$\therefore\ \sigma^2=\sum_{j=1}^{400} V(X_j)=400p(1-p)$

ここまで来たら，教科書の「確率分布と統計的な推測」などという章の記載を利用しよう。標本の統計値から母集団の統計値を推測する方法である。ここでは，標本比率から母比率を推定する。

ここで，母比率 p の代わりに標本比率 $p'=0.8$ を用いて，

$m'=400p'=320$，$\sigma'=\sqrt{400p'(1-p')}=8$ とすれば，$Z=\dfrac{Y-m'}{\sigma'}=\dfrac{400p-320}{8}=50p-40$

Y を平均 m'，標準偏差 σ' の正規分布に従うと仮定すると，Z は標準正規分布に従う。

Zの存在確率が95% になるのは，正規分布表から$-1.96\leqq Z\leqq 1.96$ のときである。

すなわち，$-1.96\leqq Z\leqq 1.96$ の範囲にZが取りえる値の95%が含まれるということを意味している。

$Z=50p-40$だから，$-1.96\leqq 50p-40\leqq 1.96$，$\therefore\ 0.76\leqq p\leqq 0.84$，すなわち$p$が取りえる値の95%が $0.76\leqq p\leqq 0.84$ の範囲に含まれる。結論として，

p に対する信頼度 95%の信頼区間は 0.ヌネ $\leqq p\leqq$ 0.ノハ， すなわち $0.76\leqq p\leqq 0.84$ である。

このコメントは解説の解説であって，この問題の解答として求められてるものではない。受験者は教科書に記載されている信頼区間の公式を活用して迅速に正答すれば良いのである。無論，こうした過程を理解していれば，効果的に活用できるので記載したものである。

＜総評＞

教科書の記載に応じた基本的な問題である。センター試験数学は，教科書を繰り返し読んで理解することが基本である。そして教科書に出ている練習問題にトライし，理解を確かなものにする。解答のスピードが求められ，スピードの差が点数の差となって表れるので，練習問題に反復して取り組み，習熟することが重要だと思う（昨年度の記載と同じ）。

選択問題の中では，第５問（確率統計）が他に対して，やや難しいように感じた。３問中から２問選択なのだが，受験生の選択比率はどのようなものだろうか。なぜ難しく感じるかといえば，事象を二項分布と捉えること，二項分布から正規分布へ転換すること，これらの過程を的確に理解することが難しいので，教科書を天下り的に理解せざるを得ないことに起因すると思う。第３，４問の数列やベクトルの問題は数学論理のみで自然に理解できるので，考えやすい。

第１問　数学Ⅱの第１問に同じ。

第２問　数学Ⅱの第２問に同じ。

第３問　昨年同様，数列の問題。頻出だから，一般項や和の公式等は利用できること。難易度はＢ

第４問　図形のベクトルによる取扱いの問題。難易度はＢ

第５問　確率統計の問題。教科書の公式の暗記と活用力が必要だ。難易度はＢ＋

190201