平成31年度（2019年度）センター試験　数学Ⅱ　数学Ⅱ・数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ・Ｂ]　（100点，60分）

数　学　Ⅱ（全問必答）

第１問（配点　30）

＜解答＞

［１］ アイ -1　ウ 2　エ 3　オ 1　カ 2　キ 2　ク 2　ケ 1　コ 2　サ 2　シ 4　ス 3　セ 4　ソ 2

［２］ タ 2　チ 2　ツ 2　テ 1　トナ 11　ニヌ 18　ネ 0　ノ 9　ハ 2　ヒ 1　フ 2　ヘ 3　ホ 4

＜解説＞

［１］ 関数 $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ を考える。

(1)

$$f(0)=3\sin^2 0+4\sin 0\cos 0-\cos^2 0=-1=\text{アイ}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sin^2\frac{\pi}{3}+4\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{3}$$

$$=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{4}=2+\sqrt{3}=\text{ウ}+\sqrt{\text{エ}}$$

(2)

2倍角の公式を用いて計算すると，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，$\therefore \cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}=\dfrac{\cos 2\theta+\text{オ}}{\text{カ}}$

さらに，$\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ を用いて $f(\theta)$ を表すと

$$f(\theta)=3(1-\cos^2\theta)+2\sin 2\theta-\cos^2\theta=3+2\sin 2\theta-4\cos^2\theta$$

$$=3+2\sin 2\theta-2\cos 2\theta-2=2\sin 2\theta-2\cos 2\theta+1=\text{キ}\sin 2\theta-\text{ク}\cos 2\theta+\text{ケ}\quad ①$$

(3)

$0\leqq\theta\leqq\pi$ で，関数 $f(\theta)$ のとり得る最大の整数 m とそのときの θ の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると，①は

$$f(\theta)=2\sin 2\theta-2\cos 2\theta+1=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\theta\right)+1$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin 2\theta-\sin\frac{\pi}{4}\cos 2\theta\right)+1=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1=\text{コ}\sqrt{\text{サ}}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{\text{シ}}\right)+\text{ケ}$$

したがって，$f(\theta)$ の最大値は $2\sqrt{2}+1$ であり，$3<2\sqrt{2}+1<4$ だから，最大の整数 $m=3=\text{ス}$

$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1=3$ となる θ は，$\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，$\therefore \sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3\pi}{4}$ だから，小さい順に，$\theta=\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{\text{セ}}$，$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{\text{ソ}}$

コメント：

昨年同様，三角関数に関する問題で倍角定理，合成などの基本的な問題である。スムーズに解答しよう。

［2］ 連立方程式

$$\log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 \quad ②$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 \quad ③$$

を満たす実数 x，y を求めよう。

真数の条件により，x，y のとり得る値の範囲は，$x+2>0$, $y+3>0$ だから，タ＝ ②

⓪ $x>0, y>0$　① $x>2, y>3$　② $x>-2, y>-3$　③ $x<0, y<0$　④ $x<2, y<3$　⑤ $x<-2, y<-3$

底の変換公式により

$$\log_4(y+3)=\frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\frac{\log_2(y+3)}{2}=\frac{\log_2(y+3)}{チ}$$

よって，②から，$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=\log_2\frac{x+2}{y+3}=-1$, $\therefore \frac{x+2}{y+3}=2^{-1}$

したがって，$y=2x+1=ツx+テ$　④

次に，$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおき，④を用いて③を t の方程式に書き直すと

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-\frac{11}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+6=\frac{1}{3}t^2-\frac{11}{3}t+6=0$$

したがって，$t^2-11t+18=t^2-トナt+ニヌ=(t-2)(t-9)=0$　⑤

また，x が タ における範囲を動くとき，$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^2=9$だから，

t のとり得る値の範囲は ネ$=0<t<9=$ノ　⑥

⑥ の範囲で方程式 ⑤ を解くと，$t=2=$ハとなる。

したがって，連立方程式 ②，③ を満たす実数x，y の値は

$$2=\left(\frac{1}{3}\right)^x から，\log_3 2=-x,\ \therefore x=\log_3\frac{1}{2}=\log_3\frac{ヒ}{フ}$$

$$y=2x+1=2\log_3\frac{1}{2}+1=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\log_3 3=\log_3\frac{3}{4}=\log_3\frac{ヘ}{ホ}$$

コメント：

対数関数，指数関数を含む方程式に関する基本知識と処理に関する問題。対数の底を変換した場合の扱い方はきちんと理解しておこう。

第２問（配点 30）

＜解答＞

(1)　ア 0　イ 0　ウエ −3　オ 1　カキ −2

(2)　クケ −2　コ 2　サ a　シ 2　ス 3　セ 3　ソタ 12

(3)　チ 3　ツ a　テ a　ト 3　ナ 1　ニ 2　ヌ b　ネ 2　ノハ 12　ヒ 5　フ 3　ヘホ 25

<解説>

p，q を実数とし，関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ は$x=-1$で極値 2 をとるとする。また座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C，放物線 $y=-kx^2$ を D，放物線 D 上の点 $(a,\ -ka^2)$ を A とする。
ただし，$k>0$，$a>0$である。

(1)

関数$f(x)$が$x=-1$で極値をとるので，$f'(x)=3x^2+2px+q$，$f'(-1)=3-2p+q=0=$ア
$f(-1)=-1+p-q=2$より，$p=0=$イ，$q=-3=$ウエである。
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$だから，$x=1=$オで極小値$f(1)=1-3=-2=$カキ をとる。

(2)

点A における放物線 D の接線をl とする。Dとl およびx 軸で囲まれた図形の面積S をa とk を用いて表そう。l の方程式は，放物線D の導関数は $y'=-2kx$ だから，

$y-(-ka^2)=-2ka(x-a)$，$\therefore\ y=-2kax+ka^2=$クケ$kax+ka^{\text{コ}}$　①

lとx 軸の交点のx 座標は $\dfrac{a}{2}=\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$ であり，Dとx 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積は

$\displaystyle\int_0^a\{0-(-kx^2)\}dx=\left[\frac{1}{3}kx^3\right]_0^a=\frac{k}{3}a^3=\frac{k}{\text{ス}}a^{\text{セ}}$である。よって，

$S=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{1}{2}\times\left(a-\dfrac{a}{2}\right)\times ka^2=\dfrac{k}{12}a^3=\dfrac{k}{\text{ソタ}}a^{\text{セ}}$である。

(3)

さらに，点A が曲線 C 上にあり，かつ (2) の接線 l が C にも接するとする。
このときの (2) の S の値を求めよう。

A が C 上にあるので，$f(a)=a^3-3a=-ka^2$，$\therefore\ k=\dfrac{3}{a}-a=\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}-$テ

lと C の接点のx 座標をb とすると，接点は$(b,\ b^3-3b)$，$f'(b)=3b^2-3$ だから
l の方程式は b を用いて

$y-(b^3-3b)=3(b^2-1)(x-b)=3(b^2-1)x-2b^3=$ト$(b^2-$ナ$)x-$ニ$b^3$　②

②の右辺を$g(x)=3(b^2-1)x-2b^3$とおくと

$f(x)-g(x)=x^3-3x-\{3(b^2-1)x-2b^3\}=x^3-3b^2x+2b^3=(x-b)^2(x+2b)=(x-$ヌ$)^2(x+$ネ$b)=0$

とすれば，l が C と共有する点の x 座標は接点のbと$-2b$であるから，$a=-2b=-$ネbとなる。

①と②の表す直線の傾きが等しいことから，

$-2ka=3(b^2-1)$，$-6+2a^2=\dfrac{3}{4}a^2-3$，$\therefore\ a^2=\dfrac{12}{5}=\dfrac{\text{ノハ}}{\text{ヒ}}$

したがって，求める S の値は $S=\dfrac{k}{12}a^3=\dfrac{a^2}{12}(3-a^2)=\dfrac{3}{25}=\dfrac{\text{フ}}{\text{ヘホ}}$

コメント：

3次関数のグラフCと2次関数のグラフDとが接線を共有するときの，接線の方程式と面積を求める問題。大雑把に図１のような図を描いて（ここではソフトを使って描いたので正確な図になっている），題意を的確に把握しよう。

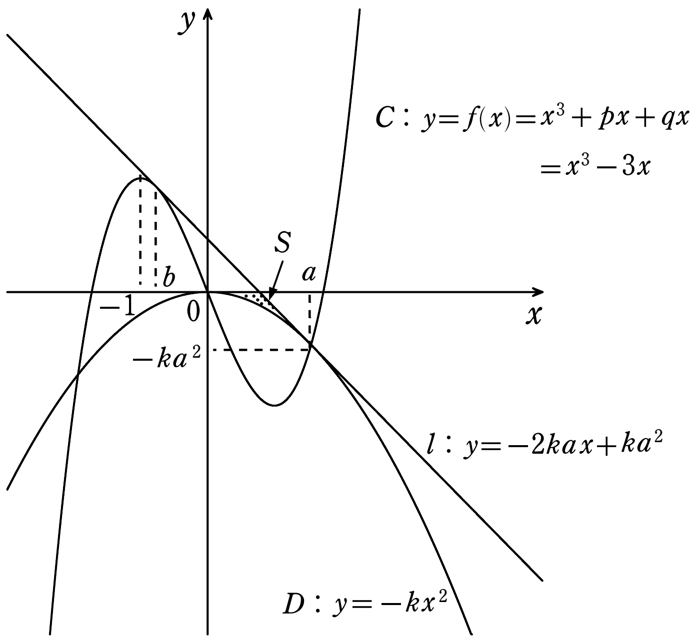

図１

第３問（配点　20）

＜解答＞

(1)　ア 2　イ 2

(2)　ウ 0　エ 1　オ 8　カ 5

(3)　キ 4　ク 8　ケ 6　コ 5　サ 4　シ 3　ス 2　セ 5

(4)　ソ 1　タ 5　チツ −2　テ 1　ト 2　ナ 5　ニ 2

＜解説＞

座標平面上に2点 A $(-4\,,\,-1)$，B$(2\,,\,2\,)$がある。

(1)

2点A，Bを通る直線の方程式は$y-2=\dfrac{2-(-1)}{2-(-4)}(x-2)=\dfrac{1}{2}(x-2)$

したがって，$x-2y+2=x-$ア$y+$イ$=0$である。

(2)

線分ABを 2 : 1 に内分する点のx 座標は $\dfrac{1\times(-4)+2\times2}{2+1}=0$，$y$ 座標は $\dfrac{1\times(-1)+2\times2}{2+1}=1$

したがって座標は$(0\,,1\,)=($ウ , エ$)$

線分ABを 2 : 1 に外分する点のx 座標は $\dfrac{-1\times(-4)+2\times2}{2-1}=8$,

y 座標は $\dfrac{-1\times(-1)+2\times2}{2-1}=5$，したがって座標は$(8\,,5\,)=($オ , カ$)$

(3)

2点A，Bからの距離の比が2 : 1である点Pの軌跡を求めよう。

Pの座標を$(x\,,\,y\,)$とすると

$$(x+4)^2+(y+1)^2=4\{(x-2)^2+(y-2)^2\}=キ\{(x-2)^2+(y-2)^2\}$$

である。この式を整理すると

$$4(x^2-4x+4)+4(y^2-4y+4)-(x+4)^2-(y+1)^2=3x^2-24x+3y^2-18y+15=0$$

したがって，$x^2+y^2-8x-6y+5=x^2+y^2-クx-ケy+コ=0$

$x^2+y^2-8x-6y+5=(x-4)^2+(y-3)^2-20$だから，

よって，求める軌跡は，中心が点$(4,3)=$(サ，シ)，半径が$2\sqrt{5}=ス\sqrt{セ}$の円である。

この円をCとする。

(4)

(3)で求めた円Cとy軸の交点の座標は，$x^2+y^2-8x-6y+5=0$で$x=0$とおいて

$y^2-6y+5=(y-5)(y-1)=0$から，$(0,1)$，$(0,5)=(0,ソ)$，$(0,タ)$である。ただし，ソ＜タとする。

点$(0,1)$，$(0,5)$におけるCの接線をそれぞれl_1，l_2とする。

点$(0,1)$と中心$(4,3)$を結ぶ直線の傾きは$\dfrac{3-1}{4-0}=\dfrac{1}{2}$だから，

その直線と直交する接線の傾きは$\dfrac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$，

したがって，接線l_1の方程式は$y-1=-2x$，∴ $y=-2x+1=チツx+テ$

同様に，点$(0,5)$と中心$(4,3)$を結ぶ直線の傾きは$\dfrac{3-5}{4-0}=-\dfrac{1}{2}$だから，

その直線と直交する接線の傾きは，$\dfrac{-1}{-\frac{1}{2}}=2$，

したがって，接線l_2の方程式は$y-5=2x$，∴ $y=2x+5=トx+ナ$

y軸と2直線l_1，l_2で囲まれた図形は底辺長$(5-1)=4$，高さ1の三角形だから，

その面積は$\dfrac{1}{2}\times4\times1=2=ニ$

コメント：

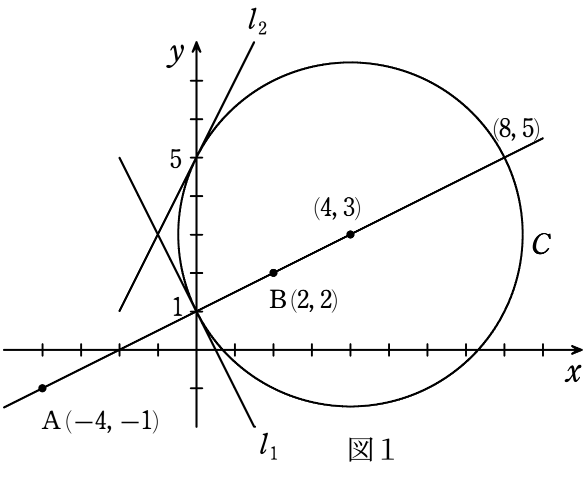

図１

図１のような図を大雑把に描き題意を把握する。直線ABを2：1に内分，外分する点については，公式を覚えておく。2点A，Bからの距離の比が2：1である点Pの軌跡は，この内分点，外分点を通るということを直感的に理解したい。

円 C 上の点 $(0, 1)$ と $(0, 5)$ における接線の傾きを求める必要がある。解答では中心と接点を結ぶ直線が接線と直交するという数学Aで既習の円の性質を利用して求めた。

微分は数学IIIの範囲だから，ここでは適用すべきではないが，円の方程式をxで微分して接線の傾きを求める方法を説明しておく。

円 C の方程式 $x^2+y^2-8x-6y+5=0$をxで微分すると，$2x+2y\dfrac{dy}{dx}-8-6\dfrac{dy}{dx}=0$

点 $(0\,,1\,)$での $\dfrac{dy}{dx}$ を求めると，$2\dfrac{dy}{dx}-8-6\dfrac{dy}{dx}=0$，$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-2$

したがって，接線 l_1 の方程式は$y-1=-2x$，$\therefore\ y=-2x+1=$チツ$x+$テ

点 $(0\,,5\,)$での $\dfrac{dy}{dx}$ を求めると，$10\dfrac{dy}{dx}-8-6\dfrac{dy}{dx}=0$，$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=2$

したがって，接線 l_2 の方程式は$y-5=2x$，$\therefore\ y=2x+5=$ト$x+$ナ

第４問（配点 20）

＜解答＞

ア 1　イ 3

(1)　ウエ $-a$　オ b　カ 2　キ 4　ク ②

(2)　ケ 2　コ 1　サ ①　シ 6　ス 9　セ 2　ソ 2　タ 3　チ 5

(3)　ツ 4　テ 2　トナ 12　ニ 9

＜解説＞

4 次の整式 $P(x)$ を考える。$P(x)$ のx^4 の係数は1であり，その他の項の係数は実数であるとする。また，4 次方程式 $P(x)=0$ は実数解 -1，3 をもち，それ以外の実数解をもたないととする。

因数定理により，$P(x)$ は $x+1=x+$ア と $x-3=x-$イ で割り切れるから

$$P(x)=(x+1)(x-3)(x^2+ax+b)=(x+\text{ア})(x-\text{イ})(x^2+ax+b)$$

と表せる。以下，$Q(x)=x^2+ax+b$ とする。

(1)

4 次方程式 $P(x)=0$ は実数解 -1，3 の他に，異なる二つの虚数解 α，β をもつとする。このとき，α，β は2次方程式 $Q(x)=0$ の解であるから，解と係数の関係により，$\alpha+\beta=-a=$ウエ，$\alpha\beta=b=$オである。また，$Q(x)=0$の判別式をDとすると，$D=a^2-4b=a^{\text{カ}}-$キbであり，クとなる。

クに当てはまるものは，次の⓪～②のうち，② $D<0$ である。

⓪ $D>0$　　① $D=0$　　② $D<0$

(2)

4 次方程式 $P(x)=0$ は虚数解をもたないとする。このとき，$P(x)=0$ は -1，3 のみを解にもつので，$Q(x)$ について，次の三つの場合が考えられる。

$Q(x)=x^2+2x+1$で，$Q(x)$の値は$x=-1$のとき0となり，その他の実数xで正となる。

$=x^2+$ケ$x+$コで，$Q(x)$の値はサ＝①

$Q(x)=x^2-6x+9$ で，$Q(x)$ の値は $x=3$ のとき0となり，その他の実数 xで正となる。

$=x^2-$シ$x+$ス で，$Q(x)$の値はセ＝②

$Q(x)=x^2-2x-3$で， $Q(x)$ の値は$-1<x<3$のとき負となり，その他の実数 x で 0 以上となる。

$=x^2-$ソ$x-$タで， $Q(x)$ の値はチ＝⑤

(3)

整式 $P(x)$ がすべての実数xで0以上の値をとるとき，因数$x+$アと$x-$イのとる値の正負を考えると

$P(x)=x^4-$ツx^3-テx^2+トナ$x+$ニ　であることがわかる。

$P(x)=(x+1)(x-3)(x^2+ax+b)$ において，

$(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$は$-1<x<3$のとき負となり，その他の実数 x で 0 以上

したがって，$P(x)$がすべての実数xで0以上の値をとるためには，2次関数 x^2+ax+bも

$-1<x<3$のとき負となり，その他の実数 x で 0 以上

すなわち$x^2+ax+b=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$

$P(x)=(x+1)(x-3)(x+1)(x-3)=(x+1)^2(x-3)^2=(x^2+2x+1)(x^2-6x+9)$

$=x^4-4x^3-2x^2+12x+9=x^4-$ツ$x^3-$テ$x^2+$トナ$x+$ニ

コメント：

4 次方程式 $P(x)=0$ は実数解 -1，3 をもち，ということから，$P(x)=(x+1)(x-3)(x^2+ax+b)$ と因数分解されることは明らかである。

さらに虚数解をもつとすれば，$x^2+ax+b=0$が虚数解をもつことになる。

$P(x)=0$ が虚数解をもたないとすれば，実数解 -1，3 をもち，それ以外の実数解をもたない。

したがって$Q(x)=x^2+ax+b=0$について，$x=-1$の重解 をもつ，$x=3$の重解をもつ，

または $Q(x)=x^2-2x-3=0$ の2つの実数解 $x=-1$，3 をもつ，三つの場合のいずれかである。

<総評>

問題の分野や内容，そして難易度はほぼ例年と同様である。解答時間が不足がちになるので，このレベルの過去問や類似問題に繰り返して取り組み，解答スピードを上げることに努める。途中で計算ミスなどがあると，解答に矛盾が出て，元へ戻る必要が出るかも知れない。そのようなときのために，計算過程を見易く記載しておこう。

数学Ⅱ・数学Ｂ

（注）この科目には，選択問題があります。（15ページ参照。）

第１問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第１問に同じ

第２問（必答問題）（配点　30）

数学Ⅱの第２問に同じ

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　アイ 15　ウ 2

(2)　エ 4　オ ①　カ 1　キ 4　ク ①　ケ 3　コ 4　サ 3

(3)　シス −5　セ 4　ソ 3　タ 3　チ 4　ツ 6　テト −3　ナ ⓪　ニ 2　ヌ −　ネ 9　ノ 8　ハ 8　ヒ 3

＜解説＞

初項が 3，公比が 4 の等比数列の初項から第 n 項までの和をS_nとする。また，数列$\{T_n\}$は，初項が-1であり，$\{T_n\}$の階差数列が数列$\{S_n\}$であるような数列とする。

(1)

$S_2=3+3\times4=15=$アイ

$T_2-T_1=S_1$，$\therefore\ T_2=T_1+S_1=-1+3=2=$ウ

(2)

$\{S_n\}$と$\{T_n\}$の一般項は，それぞれ

$S_n=\dfrac{3(4^n-1)}{4-1}=4^n-1=$エ$^{オ}-$カ

$T_n-T_{n-1}=S_{n-1}$，したがって

$T_n=T_1+\sum_{k=1}^{n-1}S_k=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(4^k-1)=-1+\dfrac{4(4^{n-1}-1)}{3}-(n-1)=\dfrac{4^n}{3}-n-\dfrac{4}{3}=\dfrac{キ^{ク}-1}{ケ}-n-\dfrac{コ}{サ}$

オとクについては，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。

⓪　$n-1$　　①　n　　②　$n+1$　　③　$n+2$　　④　$n+3$

(3)

数列$\{a_n\}$は，初項が-3であり，漸化式

$$na_{n+1}=4(n+1)a_n+8T_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

を満たすとする。$\{a_n\}$の一般項を求めよう。

そのために，$b_n=\dfrac{a_n+2T_n}{n}$により定められる数列$\{b_n\}$を考える。

$\{b_n\}$の初項は$b_1=a_1+2T_1=-3-2=-5=$シス

$\{T_n\}$は漸化式

$$T_{n+1}=\frac{4^{n+1}}{3}-(n+1)-\frac{4}{3}=4\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)+3n+3$$

$$=4T_n+3n+3=セT_n+ソn+タ\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

を満たすから，$\{b_n\}$は漸化式

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}+2T_{n+1}}{n+1}=\frac{a_{n+1}}{n+1}+\frac{2T_{n+1}}{n+1}=\frac{4a_n}{n}+\frac{8T_n}{n(n+1)}+\frac{2T_{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{4a_n}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)8T_n+\frac{8T_n}{n+1}+6=\frac{4a_n+8T_n}{n}+6=4b_n+6=チb_n+ツ\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

を満たす。よって，$\{b_n\}$ の一般項は，$b_{n+1}+2=4(b_n+2)=4^2(b_{n-1}+2)=\cdots=4^n(b_1+2)$から

$b_n=-3\cdot 4^{n-1}-2=$テト$4^{ナ}-$ニ

ただし，ナについては，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $n-1$　① n　② $n+1$　③ $n+2$　④ $n+3$

したがって，$\{T_n\}$，$\{b_n\}$の一般項から$\{a_n\}$の一般項を求めると

$$a_n=nb_n-2T_n=-3n\cdot 4^{n-1}-2n-2\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)=\frac{-(9n+8)4^{n-1}+8}{3}$$

$$=\frac{ヌ(ネn+ノ)4^{n-1}+ハ}{ヒ}$$

コメント：

等比数列，階差数列，漸化式等の基本的な数列の知識と処理が求められる。やや錯綜する式の取り扱いが必要になるので，ケアレスミスのないように。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　アイ 90　ウ 5　エ 2

(2)　オカ -1　キ 2　ク 2　ケコサ 120　シス 60　セ 2　ソ 2　タ 2　チ 3　ツ 3　テ 2

(3)　ト 0　ナ 1　ニ 3　ヌ 5　ネ 5　ノ 5　ハ 1　ヒ 6

(4)　フ 3　ヘ 3　ホ 3

＜解説＞

四角形ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。四角形 ABCD は，辺ADと辺 BC が平行で，AB=CD，∠ABC＝∠BCD を満たすとする。さらに，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=\sqrt{5}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

であるとする。

(1)

$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ から，OAとOC は直交している。$\angle AOC=90^\circ=$アイにより，三角形 OAC の面積は

$\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|=\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{ウ}}{エ}$ である。

(2)

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})=(-\vec{b}+\vec{a})(-\vec{b}+\vec{c})=|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=3-3-1+0=-1=オカ$$

$$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{\overrightarrow{BA}^2}=\sqrt{(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})^2}=\sqrt{(-\vec{b}+\vec{a})^2}$$

$$=\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{3-2+1}=\sqrt{2}=\sqrt{キ}$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\overrightarrow{BC}^2}=\sqrt{(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})^2}=\sqrt{(-\vec{b}+\vec{c})^2}$$

$=\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{c}}=\sqrt{3-6+5}=\sqrt{2}=\sqrt{ク}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC=2\cos\angle ABC=-1$,

$\therefore \cos\angle ABC=-\dfrac{1}{2}$，したがって $\angle \mathrm{ABC}=120°=ケコサ°$

さらに，辺ADと辺BCが平行であるから，$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{ADC}=60°=シス$である。

よって，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}=セ\overrightarrow{BC}$であり

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})+2\overrightarrow{BC}$

$=\vec{b}+(-\vec{b}+\vec{a})+2(-\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}=\vec{a}-ソ\vec{b}+タ\vec{c}$ と表される。

また，四角形ABCDは台形であり，$\mathrm{AD}=2\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$，

ADとBCの間隔は$\mathrm{AB}\sin 60°=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

したがって，四角形ABCDの面積は $\dfrac{1}{2}(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{チ\sqrt{ツ}}{テ}$

(3)

三角形 OACを 底面とする三角錐 BOAC の体積 V を求めよう。

3点 O，A，C の定める平面 α 上に，点 H を$\overrightarrow{BH}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{BH}\perp\vec{c}$ が成り立つようにとる。$|\overrightarrow{BH}|$ は三角錐 BOAC の高さである。H は α上の点であるから，実数 s，t を用いて $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{c}$ の形に表される。

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH}=\vec{b}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}$，$\therefore \overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}-\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{c}-\vec{b}$

$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{a}=0=ト$，$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{c}=0=ト$により，

$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{a}=(s\vec{a}+t\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{a}=s|\vec{a}|^2+t\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{a}=s-1=0$，$\therefore s=1=ナ$

$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{c}=(s\vec{a}+t\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{c}=s\vec{a}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=5t-3=0$，$\therefore t=\dfrac{3}{5}=\dfrac{ニ}{ヌ}$

よって，$|\overrightarrow{BH}|=\sqrt{|\overrightarrow{BH}|^2}=\sqrt{|s\vec{a}+t\vec{c}-\vec{b}|^2}$

$=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+t^2\vec{c}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2t\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2t\vec{b}\cdot\vec{c}}$

$=\sqrt{5t^2-6t+2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{ネ}}{ノ}$ が得られる。

したがって，(1)により，$V=\dfrac{1}{3}\times$（三角形OACの面積）$\times|\overrightarrow{BH}|=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{1}{6}=\dfrac{ヒ}{ハ}$

(4)

$\dfrac{三角錐DOACの体積}{三角錐BOACの体積}=\dfrac{三角形ACDの面積}{三角形ABCの面積}=\dfrac{AD}{BC}=2$

したがって，四角錐OABCDの体積は $3V=フV$と表せる。さらに，

四角形ABCDを底面とする四角推OABCDの高さは

四角推OABCDの体積は$\dfrac{1}{3}\times$（四角推OABCDの高さ）$\times$（四角形ABCDの面積）$=3V=\dfrac{1}{2}$

四角形ABCDの面積$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$だから，四角推OABCDの高さ$=\dfrac{3}{2}\div\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{ヘ}}{ホ}$

コメント：

図１のような図を大雑把に描いて考察を進める。点Hは三角形 OAC 内から外へ出ているかも知れない。ベクトルによる直線の表示，ベクトルの加減算，内積等の計算の基礎知識を的確に理解していること。

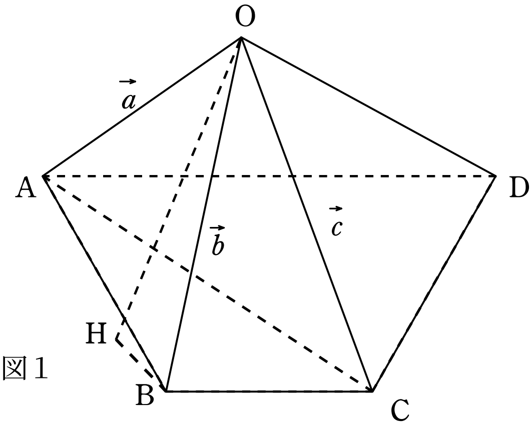

図１

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1)　アイ 74　ウ 3　エ 2　オ 6

(2)　カ 1　キ 4　クケ 08　コ 4　サ 0　シ 3　ス 7

(3)　セ 0　ソ 6　タチ 90　ツ ②

＜解説＞

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて29ページの正規分布表を用いても良い。

(1)

ある食品を摂取したときに，血液中の物質 A の量がどのように変化するか調べたい。食品摂取前と摂取してから3 時間後に，それぞれ一定量の血液に含まれる物質 A の量（単位はmg ）を測定し，その変化量，すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数をXとする。Xの期待値（平均）は$E(X)=-7$，標準偏差は $\sigma(X)=5$ とする。

このとき，

$$E\{(X-\overline{X})^2\}=E(X^2-2X\overline{X}+\overline{X}^2)=E(X^2)-E(\overline{X}^2)=E(X^2)-\overline{X}^2=\sigma^2(X)$$

したがって，X^2の期待値は $E(X^2)=\sigma^2(X)+\overline{X}^2=25+(-7)^2=74=$アイ

また，測定単位を変更して$W=1000X$とするとき，その期待値は

$E(W)=E(1000X)=10^3E(X)=-7\times10^3=-7\times10^{ウ}$，分散は

$V(W)=V(1000X)=(10^3)^2V(X)=5^2\times10^6=5^{エ}\times10^{オ}$ となる。

(2)

(1)のXが正規分布に従うとするとき，物質Aの量が減少しない確率 $P(X\geqq0)$を求めよう。

確率変数 X を $Z=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}=\dfrac{X-(-7)}{5}=\dfrac{X+7}{5}$ と確率変数 Z に変換すると，Z は標準正規分布に従う。$X\geqq0$のとき，$\dfrac{X+7}{5}\geqq1.4$だから，

確率$P(X \geqq 0) = P\left(\frac{X+7}{5} \geqq 1.4 = カ.キ\right) = P(Z \geqq 1.4 = カ.キ)$

正規分布表から，$P(Z \geqq 1.4) = 0.5-0.4192 = 0.08 = 0.クケ$

無作為に抽出された50人がこの食品を摂取したときに，物質Aの量が減少するか，減少しないかを考え，物質Aの量が減少しない人数を表す確率変数をMとする。

Mは二項分布$B(50,\ 0.08 = 0.クケ)$に従うので，期待値は$E(M) = 50\times 0.08 = 4.0 = コ.サ$，標準偏差は$\sigma(M) = \sqrt{V(M)} = \sqrt{50\times 0.08\times 0.92} = \sqrt{3.7} = \sqrt{シ.ス}$ となる。

(3)

(1)の食品摂取前と摂取してから3時間後に，それぞれ一定量の血液に含まれる別の物質Bの量（単位はmg）を測定し，その変化量，すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数をYとする。Yの母集団分布は母平均m，母標準偏差6をもつものとする。mを推定するため，母集団から無作為に抽出された100人に対して物質Bの変化量を測定したところ，標本平均$\overline{Y}$の値は-10.2であった。

このとき，$\overline{Y}$の期待値は$E(\overline{Y}) = m$,

標準偏差は$\sigma(\overline{Y}) = \sqrt{\frac{V(Y)}{100}} = \sqrt{\frac{\sigma^2(Y)}{100}} = \frac{\sigma(Y)}{10} = 0.6 = セ.ソ$

$\overline{Y}$の分布が正規分布で近似できるとすれば，$Z = \frac{\overline{Y}-m}{セ.ソ}$ は近似的に標準正規分布に従うとみなすことができる。

正規分布表を用いて$|Z| \leqq 1.64$となる確率を求めると $0.4495\times 2 = 0.90 = 0.タチ$となる。

すなわち，正規分布表の数値1.6の行と数値0.04の列の交点 0.4495は $0 \leqq Z \leqq 1.64$となる確率だから，$|Z| \leqq 1.64$となる確率は 0.4495×2 となる。

このことを利用して，母平均mに対する信頼度 90 = タチ%の信頼区間，すなわち，90 %の確率でmを含む信頼区間を求めるとツ=②となる。

すなわち $Z = \frac{\overline{Y}-m}{0.6} = \frac{-10.2-m}{0.6}$ だから，$-1.64 \leqq \frac{-10.2-m}{0.6} \leqq 1.64$，$\therefore\ -11.2 \leqq m \leqq -9.2$

ツに当てはまる最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $-11.7 \leqq m \leqq -8.7$　① $-11.4 \leqq m \leqq -9.0$　② $-11.2 \leqq m \leqq -9.2$　③ $-10.8 \leqq m \leqq -9.6$

コメント：

(1)において，$V(W) = V(1000X) = E\{(1000X)^2\} - E\{(\overline{1000X})^2\} = 10^6\{E(X^2) - E(\overline{X}^2)\} = 10^6\sigma^2(X)$

(2)において，$M = \sum_{j=1}^{50} M_j$とする。ここで，j番目の人が食品を摂取したとき，物質Aの量が減少しないとき$M_j=1$，減少したとき$M_j=0$である。二項分布$B(N,\ p)$に従う確率変数Mについて

期待値は $\overline{M} = E(M) = E\left(\sum_{j=1}^{N} M_j\right) = \sum_{j=1}^{N} E(M_j) = N\{p\times 1 + (1-p)\times 0\} = Np$

ここでは$N=50$，$p=0.08$とすると $\overline{M} = 4.0$

j番目の人の物質Aの増減は他の人の増減とは無関係な独立の事象だから，$E\left(\sum_{j=1}^{N} M_j\right) = \sum_{j=1}^{N} E(M_j)$

p は各人の物質Aが減少しない確率で，$p=P(Z\geqq 1.4)=\ 0.08$ である。

また，二項分布 $B(N,\ p)$ の標準偏差は $\sigma(M)=\sqrt{V(M)}=\sqrt{Np(1-p)}=\sqrt{50\times 0.08\times 0.92}=\sqrt{3.7}$

(3)では標本の統計量（ここでは平均と標準偏差）とその母集団の統計量との関係を理解し覚えていなければならない。

＜総評＞

昨年同様の問題の構成であり，教科書が記載している基本的な知識と方法を，具体的な問題として作り上げることに苦心している。

選択問題の中では，昨年は第5問の確率統計の問題が他に比較してやや難しく感じたが，今年は容易化したように感じる。

第１問　数学Ⅱの第１問に同じ。

第２問　数学Ⅱの第２問に同じ。

第３問　数列の問題。難易度はＢ

第４問　立体図形のベクトルによる取扱いの問題。難易度はＢ

第５問　確率統計の問題。二項分布から正規分布の取り扱いなど，少し容易化した。難易度Ｂ

200712