令和２年度（2020年度）センター試験　数学Ⅱ･数学Ｂ　解説

数学　②　[数学Ⅱ　数学Ⅱ･数学Ｂ]　（いずれか選択　100点，60分）

数学Ⅱ･数学Ｂ

第１問（必答問題）（配点　30）

＜解答＞

［１］

(1) ア３　イ２　ウ３　エ３　オ２　カ３　キ５　ク３　　(2) ケコ 12　サ４　シ５　ス３　セ５　ソ３

［２］

(1) タチ 11　ツテ 13　トナニ −36　　(2) ヌ２　ネノ 10　ハ３　ヒフ −4　ヘ７　ホ５

＜解説＞

［１］(1)

$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき

$$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad ①$$

となるθの範囲を求めよう。

加法定理を用いると

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{ア}}{イ}\cos\theta+\frac{ウ}{イ}\sin\theta$$

三角関数の合成を用いると，①は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta-\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta$$

$$=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{エ}\right)<0$$

と変形できる。したがって，求める範囲は，$\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$から，$\frac{2}{3}\pi=\frac{オ}{カ}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi=\frac{キ}{ク}\pi$

(2)

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$とし，$k$を実数とする。$\sin\theta$と$\cos\theta$は$x$の2次方程式 $25x^2-35x+k=0$ の解であるとする。このとき，解と係数の関係により

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$$

$$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{k}{25}$$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta=1+\frac{2k}{25}=\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{49}{25}，\ \therefore\ k=12=ケコ$$

$25x^2-35x+k=25x^2-35x+12=(5x-3)(5x-4)=0$から，$x=\dfrac{3}{5}$または$\dfrac{4}{5}$，

したがって，θが$\sin\theta>\cos\theta$を満たすとすると，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}=\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}=\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}}$

$\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{4}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}$だから，このとき，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{3}$（$\boxed{\text{ソ ③}}$）を満たす。

［2］(1)

tは正の実数であり，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$を満たすとする。

このとき，$(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})^2=t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}-2t^{\frac{1}{3}}\cdot t^{-\frac{1}{3}}=t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}-2=(-3)^2=9$だから，

$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=11=$ タチ

$(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}})^2=t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}+2=13$，$\therefore\ t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{13}=\sqrt{\text{ツテ}}$

$(t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}})(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})=t-t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}-t^{-1}=t-t^{-1}-(t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}})=t-t^{-1}-(-3)=t-t^{-1}+3$

したがって，$t-t^{-1}+3=11\times(-3)$，$\therefore\ t-t^{-1}=-33-3=-36=$ トナニ

(2)

x，yは実数とする。連立不等式

$\log_3(x\sqrt{y})\leqq 5$　②

$\log_{81}\dfrac{y}{x^3}\leqq 1$　③

について考える。

$X=\log_3 x$，$Y=\log_3 y$とおくと，②は

$\log_3(x\sqrt{y})=\log_3 x+\log_3 y^{\frac{1}{2}}=X+\dfrac{1}{2}Y\leqq 5$だから，$2X+Y=$ ヌ$X+Y\leqq$ ネノ $=10$　④

と変形でき，③は

$\log_{81}\dfrac{y}{x^3}=\log_{81}y-\log_{81}x^3=\dfrac{\log_3 y}{\log_3 81}-\dfrac{\log_3 x^3}{\log_3 81}=\dfrac{Y}{\log_3 3^4}-\dfrac{3\log_3 x}{\log_3 3^4}=\dfrac{Y}{4}-\dfrac{3X}{4}\leqq 1$ だから

$3X-Y=$ ハ$X-Y\geqq$ ヒフ$=-4$　⑤

と変形できる。

④から，$Y\leqq 10-2X$　⑥

⑤から，$Y\leqq 3X+4$　⑦

④，⑤すなわち⑥，⑦の領域は図1の打点部である（ここではソフトによって正確な図になっているが，大雑把な図を手書きすれば十分）。$X=\dfrac{6}{5}$，$Y=\dfrac{38}{5}$が⑥，⑦の領域の境界線の交点だから，

X，Yが④と⑤を満たすとき，Yのとり得る最大の整数の値は$7=$ ヘ

$Y=7$のとき，⑥から$X\leqq\dfrac{3}{2}$，⑦から$X\geqq 1$，$\therefore\ 1\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}$，$\therefore\ 1\leqq\log_3 x\leqq\dfrac{3}{2}$，$\therefore\ 3\leqq x\leqq 3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}$

したがってxのとり得る最大の整数の値は$3=$ ホ

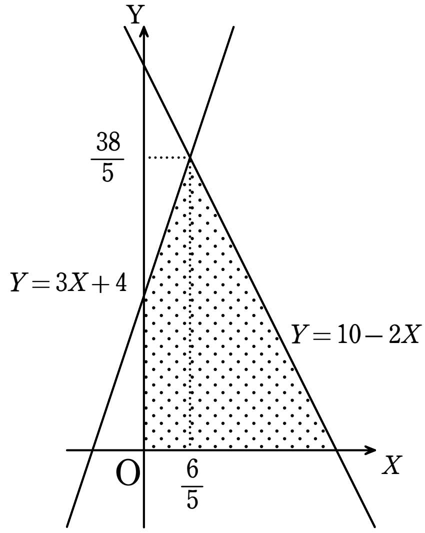

図１

第２問（必答問題）（配点 30）

＜解答＞

(1) ア２　イ２　ウ１　エ２　オ４　カ２　キ４　ク１　ケ０　コ２　サ２　シ１　(2) ス a　セ３　ソ３

(3) タ１　チ１　ツ３　テ２　ト４　ナ２　ニ１　ヌ３　(4) ネ２　ノ３　ハ２　ヒフ 27

＜解説＞

$a>0$ とし，$f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ とおく。座標平面上で，放物線 $y=x^2+2x+1$ をC, 放物線 $y=f(x)$ を D とする。また，l を CとD の両方に接する直線とする。

(1)

l の方程式を求めよう。

l と C が点 $(t,\ t^2+2t+1)$ において接するとすると，C について $y'=2x+2$ だから，l の方程式は

$y=(2t+2)x-t^2+1=($ア$t+$イ$)x-t^2+$ウ　①

また，l と D は点 $(s,\ f(s))$ において接するとすると，$f'(x)=2x-(4a-2)$だから，l の方程式は

$y=(2s-4a+2)x-s^2+4a^2+1=($エ$s-$オ$a+$カ$)x-s^2+$キ$a^2+$ク　②

ここで，①と②は同じ直線を表しているので，

$2t+2=2s-4a+2$，$-t^2+1=-s^2+4a^2+1$，$\therefore t=0=$ケ，$s=2a=$コa

したがって，l の方程式は $y=2x+1=$サ$x+$シ

(2)

二つの放物線 C，D の交点の x 座標は，$x^2+2x+1=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ から，$x=a=$ス

Cと直線l，および直線$x=a$で囲まれた図形の面積をSとすると，

$$S=\int_0^a\{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx=\int_0^a x^2dx=\frac{a^3}{3}=\frac{a^{セ}}{ソ}$$

(3)

$a \geqq \dfrac{1}{2}$とする。二つの放物線C, Dと直線lで囲まれた図形の中で，$0 \leqq x \leqq 1$を満たす部分の面積Tを求める。

CとDの交点は$(a,\ a^2+2a+1)$，lとDの接点は$(2a,\ 4a+1)$だから，$a>1=$タのとき，

aの値によらず，$T=\displaystyle\int_0^1\{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx=\frac{1}{3}=\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$

$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1=$ タのとき

$$T=\int_0^a\{(x^2+2x+1)-(2x+1)\}dx+\int_a^1\{(x^2-(4a-2)x+4a^2+1)-(2x+1)\}dx$$

$$=\frac{a^3}{3}+\int_a^1(x^2-4ax+4a^2)dx=\frac{a^3}{3}+\left[\frac{1}{3}(x-2a)^3\right]_a^1=\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3}(1-2a)^3+\frac{a^3}{3}$$

$$=-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}=-\text{テ}a^3+\text{ト}a^2-\text{ナ}a+\frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$$

(4)

(2)，(3)で定めたS，Tに対して，$U=2T-3S$とおく。

aが$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$の範囲を動くとき，

$$U=2\left(-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}\right)-a^3=-5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}$$

$$U'(a)=-15a^2+16a-4=-(3a-2)(5a-2)$$

$U=U(a)$は図１のように変化する。Uは$a=\dfrac{2}{3}=\dfrac{\text{ネ}}{\text{ノ}}$で最大値$U\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{27}=\dfrac{\text{ハ}}{\text{ヒフ}}$をとる。

a	0		$\frac{2}{5}$		$\frac{2}{3}$		1
$U'(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$U(a)$		↘		↗		↘	

図１

第３問～第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第３問（選択問題）（配点 20）

<解答>

(1) ア 6

(2) イ 0　ウ 1　エ 1　オ 2　カ 3　キ 1　ク 2　ケ 1　コ 1　サ 1　シ 6　ス 1　セ 2　ソ 2　タ 3　チ 1

(3) ツ 3　テ 1　ト 4　ナ 1　ニ 2　ヌ 2　　(4) ネ 1　ノ 0　ハ 0　ヒ 1

<解説>

数列$\{a_n\}$は，初項a_1が0であり，$n=1,2,3,\cdots$のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}\quad ①$$

(1)

①に$n=1$を代入して,

$$a_2=\frac{1+3}{1+1}\{3a_1+3^{1+1}-(1+1)(1+2)\}=2(9-6)=6=ア$$

(2)

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよう。

b_nの初項 $b_1=\dfrac{a_1}{2}=0=イ$

①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$で割ると

$$b_{n+1}=\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{3^{n+1}}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$=b_n+\frac{ウ}{(n+エ)(n+オ)}-\left(\frac{1}{カ}\right)^{n+1}$$，ただし，エ < オ とする。

したがって，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}=\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$$=\left(\frac{キ}{n+1}-\frac{キ}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

nを2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{1+1}-\frac{1}{(n-1)+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)=\frac{1}{ク}\left(\frac{n-ケ}{n+コ}\right)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$は初項$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列の$(n-1)$までの和だから,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1-(1/3)^{n-1}}{1-(1/3)}=\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{6}\left\{1-3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{サ}{シ}-\frac{ス}{セ}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

が成り立つことを利用すると

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=b_n-b_1=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$b_1=0$だから，$b_n=\dfrac{n-2}{3(n+1)}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{n-ソ}{タ(n+チ)}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(3)

(2)により，$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=3^n(n+1)(n+2)b_n=3^n(n+1)(n+2)\left\{\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$=3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=ツ^{n-テ}(n^2-ト)+\frac{(n+ナ)(n+ニ)}{ヌ}$$

ただし，ナ<ニとする。

このことから，すべての自然数について，a_nは整数となることがわかる。

(4)

a_nの表式の左辺の第一項は3の倍数。したがって3で割った余りは第二項で決まる。

第二項は 2 の倍数であり，

$n=3k$のとき，$\dfrac{(3k+1)(3k+2)}{2}=\dfrac{9k^2+9k+2}{2}=\dfrac{9k(k+1)}{2}+1\equiv 1 \pmod{3}$

$n=3k+1$のとき，$\dfrac{(3k+2)(3k+3)}{2}=\dfrac{3(k+1)(3k+2)}{2}\equiv 0 \pmod{3}$

$n=3k+2$のとき，$\dfrac{(3k+3)(3k+4)}{2}=\dfrac{3(k+1)(3k+4)}{2}\equiv 0 \pmod{3}$

したがって，a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2}を 3 で割った余りはそれぞれ 1 = ネ，0 = ノ，0 = ハ

$2020=3\times 673+1$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{2020} a_n = a_1+a_2+\sum_{k=1}^{673} a_{3k}+a_{3\times 673+1}$

$\dfrac{\displaystyle\sum_{n=1}^{2020} a_n}{3}$ の余り $=\dfrac{a_1+a_2+\displaystyle\sum_{k=1}^{673} a_{3k}+a_{3\times 673+1}}{3}$ の余り $=\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{673} a_{3k}}{3}$の余りだから，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2020} a_n \equiv a_1+a_2+\sum_{k=1}^{673} a_{3k}+a_{3\times 673+1} \equiv \sum_{k=1}^{673} a_{3k} \equiv 673 \equiv 1 \pmod{3}$

したがって，$\{a_n\}$の初項から第2020項までの和を3で割った余りは 1 = ヒ

コメント：

(1)〜(3)はていねいに数式を追い，計算を続ければ正答を得ることができる。(4)は着眼，着想が必要であり，限られた時間の中では，難しい問題と感じた。整数問題の合同式の演算を理解していることが，助けになる。

第３問〜第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。

第４問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) ア 3　イ 6　ウ 4　エ 3　オカ 36　　(2) キク −2　ケ 3　コ 1　サ 2　シ 6

(3) ス 2　セ 2　ソタ −4　チ 3　ツテ 30

(4) ト 1　ナ 2　ニ 2　ヌ 1　ネ 2　ノ 2　ハヒ 60　フ 3　ヘ 4　ホ 3

＜解説＞

点Oを原点とする座標空間に2点

$A(3, 3, -6)$，$B(2+2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, -4)$

をとる。3点O，A，Bの定める平面をαとする。また，αに含まれる点Cは

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=24$　①

を満たすとする。

(1)

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+3^2+(-6)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}=$ ア$\sqrt{イ}$

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(2+2\sqrt{3})^2+(2-2\sqrt{3})^2+(-4)^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}=$ ウ$\sqrt{エ}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3(2+2\sqrt{3})+3(2-2\sqrt{3})+(-6)(-4)=36=$ オカ

(2)

点Cは平面 α 上にあるので，実数 s，t を用いて，$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$と表すことができる。

このとき，①を利用すると，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=54s+36t=0$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=36s+48t=24$

これらを解いて，$s=\dfrac{-2}{3}=\dfrac{\text{キク}}{\text{ケ}}$，$t=1=$ コ を得る。

したがって，

$|\overrightarrow{OC}|=|s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}|=\left|\dfrac{-2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}}$

$=\sqrt{24-48+48}=2\sqrt{6}=$ サ$\sqrt{シ}$

(3)

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{-2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ だから，

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}=(2, 2, -4)=($ス, セ, ソタ$)$

平面 α 上の四角形 OABC について，OA∥CB，OA⊥OC，OA≠CB だから，

四角形 OABC は，平行四辺形ではないが，台形である（ チ ③ ）。

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$であるので，四角形 OABC の面積は，

$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OC}|(|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{CB}|)=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}(3\sqrt{6}+2\sqrt{6})=30=$ ツテ

(4)

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=2\sqrt{6}$ かつz座標が1であるような点 D について，

点 D の座標を $(x_d, y_d, 1)$とすれば，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=3x_d+3y_d-6=0$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0)\cdot(x_d, y_d, 1)=2\sqrt{3}x_d-2\sqrt{3}y_d=2\sqrt{6}$

∴ 点Dの座標は$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$，

このとき$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|\cos\angle COD=2\sqrt{6}\times2\cos\angle COD=2\sqrt{6}$だから，

$\cos\angle COD=\dfrac{1}{2}$，∴ $\angle\mathrm{COD}=60°=$ ハヒ°

3点 O，C，D の定める平面をβとする。αとβは垂直であるので，三角形 ABC を底面とする四面体DABCの高さは $|\overrightarrow{OD}|\sin\angle COD=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=\sqrt{フ}$ である。

三角形ABCの面積 = 三角形OBCの面積 $=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}=12$ だから，

四面体DABCの体積は $\frac{1}{3}\times 12\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}=$ へ$\sqrt{ホ}$

コメント：

空間ベクトルの問題。一見，複雑そうな問題だが，大雑把な図を描いて，順次，解を書き下ろしていけば，つまずくような箇所は少ないであろう。前問の結果を活用して次問に答えるという問題の流れに乗って，スムーズに解答したい。

$\boxed{\text{第３問〜第５問は，いずれか２問を選択し，解答しなさい。}}$

第５問（選択問題）（配点　20）

＜解答＞

(1) ア 1　イ 4　ウ 1　エ 2　オ 7　カ 4

(2) キクケ 240　コサ 12　シス 02　セ 2　ソ 6

(3) タチ 60　ツテ 30　トナ 44　ニ 1　ヌネ 55　ノ 9

＜解説＞

(1)

Xの発生確率を$P(X)$とすれば，

$$P(0)=\frac{612}{720}=\frac{17}{20},\ P(1)=\frac{54}{720}=\frac{3}{40},\ P(2)=\frac{36}{720}=\frac{1}{20},\ P(3)=\frac{18}{720}=\frac{1}{40},\ P(4)=0$$

$$E(X)=0\times P(0)+1\times P(1)+2\times P(2)+3\times P(3)+4\times P(4)$$

$$=0\times\frac{17}{20}+1\times\frac{3}{40}+2\times\frac{1}{20}+3\times\frac{1}{40}+4\times 0=\frac{3}{40}+\frac{2}{20}+\frac{3}{40}=\frac{1}{4}=\frac{ア}{イ}$$

$$E(X^2)=0\times P(0)+1^2\times P(1)+2^2\times P(2)+3^2\times P(3)+4^2\times P(4)$$

$$=0\times P(0)+1^2\times\frac{3}{40}+2^2\times\frac{1}{20}+3^2\times\frac{1}{40}+4^2\times 0$$

$$=\frac{3}{40}+\frac{4}{20}+\frac{9}{40}=\frac{1}{2}=\frac{ウ}{エ}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E(X^2)-(E(X))^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{オ}}{カ}$$

(2)

選ばれた一人の高校生が図書館を利用した確率はp，600人の生徒の一人一人が図書館を利用したかどうかは独立の事象だから，図書館を利用した生徒の人数 Y は二項分布 $B(600\,,\,0.4)$ に従う。

したがって，平均は $E(Y)=600\times 0.4=240=$ キクケ

標準偏差は $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{600\times 0.4\times(1-0.4)}=\sqrt{600\times 0.4\times(1-0.4)}=12=$ コサ

$Z=\dfrac{Y-240}{12}$ とおくと，標本数は十分に大きいので，Zは近似的に標準正規分布に従う。

$Y\leqq 215$ となる確率は，$Y=0$のとき$Z=-20$，$Y=215$のとき$Z=-\dfrac{25}{12}$

$-20 \leqq Z \leqq -\dfrac{25}{12}$となる確率は，$\dfrac{25}{12}=2.083 \leqq Z \leqq 20$となる確率だから，添付の正規分布表によって $0.5-0.4812=0.0188 \fallingdotseq 0.02=$ シスになる。

また，$p=0.2$ のとき，Y の平均は $600\times0.2=120$ となり，キクケ $=240$ の $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{セ}$ 倍，

標準偏差は$\sqrt{600\times0.2\times(1-0.2)}=4\sqrt{6}$ となり，コサ $=12$ の $\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{ソ}}{3}$ 倍である。

(3)

市立図書館に利用登録のある高校生を母集団とする。1回あたりの利用時間（分）を表す確率変数をWとし，W は母平均 m，母標準偏差 30 の分布に従うとする。この母集団から大きさ n の標本 W_1，W_2，・・・，W_n を無作為に抽出した。

利用時間が60分をどの程度超えるかについて調査するために

$$U_1=W_1-60,\ U_2=W_2-60,\ \cdots,\ U_n=W_n-60$$

とおくと，確率変数 U_1，U_2，・・・，U_n の平均と標準偏差はそれぞれ

$$E(U_1)=E(U_2)=\cdots=E(U_n)=E(W_n-60)=E(W_n)-E(60)=m-60=m-タチ$$

$$\sigma(U_1)=\sigma(U_2)=\cdots=\sigma(U_n)=\sigma(W_n-60)$$

$$=\sqrt{V(W_n-60)}=\sqrt{V(W_n)}=\sigma(W_n)=30=ツテ$$

ここで，$t=m-60$として，t に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよう。

この母集団から無作為抽出された100人の生徒に対して U_1，U_2，・・・，U_{100} の値を調べたところ，その標本平均の値が 50分 であった。標本数は十分大きいことを利用して，この信頼区間を求める。

標本平均 $\overline{U}$ は平均 $m-60$，標準偏差 $\dfrac{30}{\sqrt{100}}=3$ の正規分布に従う。

$Z=\dfrac{\overline{U}-(m-60)}{3}$ とすれば，Z は平均 0，標準偏差 1の標準正規分布に従う。

$-z_0 \leqq Z \leqq z_0$であることが95%の確からしさであるとすれば，$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0)=0.95$だから，

$-z_0 \leqq \dfrac{\overline{U}-(m-60)}{3} \leqq z_0$，$\overline{U}-3z_0 \leqq (m-60) \leqq \overline{U}+3z_0$

$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0)=2P(0 \leqq Z \leqq z_0)=0.475\times2$，$P(0 \leqq Z \leqq z_0)=0.475$ となるのは添付の正規分布表から，$z_0=1.96$だから，　$\overline{U}=50$として，$50-5.88 \leqq (m-60) \leqq 50+5.88$

したがって，$t=m-60$ に対する信頼度 95% 区間は

トナ．ニ $=44.1 \leqq t \leqq 55.9=$ヌネ．ノ

コメント：

(2)では Y が二項分布となることを理解しなければならない。(3)では，標本平均から母集団平均を推定する問題であることを理解しなければならない。いずれもが，基本的な知識の具体的な応用であるが，教科書に記載のレベルを超えるものではないので，スムーズに解答したい。

＜総評＞

センター試験最後の数学Ⅱ･数学Ｂの問題である。例年とことさら異なるものではない。第一問では三角関数，対数関数の基本的性質と変形などの力が問われる。第二問では二次関数，その接線，それ

らに囲まれた図形の面積などを扱う。大雑把にグラフを描き，題意を理解し計算する。

第3問は漸化式で表現された数列の問題。ていねいな計算と着想が必要とされる。第4問は空間ベクトルの問題。これも大雑把に空間図形を描いて，題意の理解と思考の展開に役立てたい。

第5問は二項分布と正規分布（標本平均の確率から母集団平均の信頼区間を考察する）に関する問題。各問とも，思考の流れに沿った設問展開となっているので，スムーズな思考展開となることを意識したい。前問，後問の思考がうまく繋がらないときは，考え方に無理があるのかも知れない。

210312